Der Briefwechsel

von

Gottfried Wilhelm Leibniz

mit Mathematikern.

Herausgegeben

von

C. J. Gerhardt.

Mit Unterstützung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften.

Erster Band.

Mit einem photographischen Facsimile.

Berlin.

Mayer & Müller.

1899.

Der Briefwechsel

von

Gottfried Wilhelm Leibniz

mit Mathematikern.

Erster Band.

Der Briefwechsel

von

Gottfried Wilhelm Leibniz

mit Mathematikern.

Herausgegeben

von

C. I. Gerhardt.

Mit Unterstützung der Königl. Preußischen Akademie der Wissenschaften.

Erster Band.

Mit einem photographischen Facsimile.

Berlin.

Mayer & Müller.

1899.

Der Königlich Preußischen

Akademie der Wissenschaften

in Berlin

zum zweihundertjährigen Stiftungs-Jubiläum

gewidmet.

Von den Correspondenzen, die unter Leibniz' Manuscripten auf der Königlichen Bibliothek in Hannover sich vorfinden, ist eine der umfangreichsten und wichtigsten die mit Mathematikern. Sie beginnt mit den ersten wissenschaftlichen Studien Leibnizens und dauert sein ganzes Leben hindurch. Er richtete, als er den Drang fühlte, in die gelehrte Welt einzutreten, an die hervorragendsten Männer der Wissenschaft in England, Frankreich, Holland, Deutschland Briefe, in welchen er seine Ideen entwickelte. Diese Briefe aus der frühesten wissenschaftlichen Thätigkeit Leibnizens sind von besonderer Wichtigkeit, insofern darin der Ursprung der großen wissenschaftlichen Probleme sich findet, deren Lösung er sein ganzes Leben hindurch verfolgte. So zeigen sich in seinen frühesten Briefen bereits die ersten Ideen der Characteristica realis, einer Zeichensprache, die durch Zeichen auf die natürlichste Weise den Begriff ausdrückt und dadurch zugleich den Fortschritt der Wissenschaft vermittelt. Proben davon hat Leibniz später auf dem Gebiet der Mathematik gegeben; der von ihm gefundene Algorithmus der höheren Analysis zeigt das ausgezeichnetste Beispiel. Diese brieflichen Mittheilungen erhielten einen größeren Umfang, als Leibniz seit 1676 seinen Wohnsitz in Hannover nahm; er suchte die wissenschaftliche Einsamkeit, in der er sich dort befand, durch die fleißigste und ausgebreiteste Correspondenz zu verscheuchen. Da seit seinem Aufenthalt in Paris (1672—1676) die Mathematik sein Lieblingsstudium in einem höheren Grade geworden war, so verwandte er besondere Sorgfalt auf seine Correspondenz

mit Mathematikern. Sie gewann eine außerordentliche Zunahme seit 1684, in welchem Jahre Leibniz die Einführung des Algorithmus der höheren Analysis bekannt machte. Dadurch daß die neue Rechnung in den folgenden Jahren allmählich allseitig als zuverlässig anerkannt wurde, und daß sie namentlich in der Behandlung des großen, bereits von Galiläi vorgelegten Problems der Kettenlinie auf das eclatanteste sich bewährte (1691) — dadurch wurde ihr Erfinder Leibniz der Centralpunkt, an den die gleichzeitigen Mathematiker ihre Mittheilungen richteten. Hierzu kommt, daß Leibniz in seinen Briefen nicht selten Theorien zur Sprache bringt, die er nicht weiter veröffentlicht hat; es sei hier nur die Auflösung der Gleichungen mittelst der Determinanten erwähnt, deren erste Aufstellung und Anwendung auf ihn zurückzuführen ist. So ist Leibniz' mathematische Correspondenz nicht nur für seine Würdigung als Mathematiker von der höchsten Wichtigkeit, sie bildet auch die Grundlage für die Geschichte der Mathematik in der zweiten Hälfte des 17. und für die ersten Jahrzehnte des 18. Jahrhunderts. Insofern ist die vollständige Veröffentlichung derselben noch gegenwärtig geboten. Sie kann in der Weise ausgeführt werden, daß die Manuscripte, auf welche in den Briefen hingewiesen wird, eingeschaltet werden, was in den bisher veröffentlichten Correspondenzen mit Mathematikern oft vermißt wird.

Als der Streit über den ersten Entdecker der Differentialrechnung tobte und in England zu Gunsten Newton's das Commercium epistolicum D. Jo. Collins et aliorum de Analysi promota, Londin. 1712, erschien*), beschloß Leibniz ebenfalls ein Commercium epistolicum zu veröffentlichen, um seine Rechte in Betreff der Entdeckung der Differentialrechnung wahrzunehmen. Er gedachte darin

---

*) Die zweite Ausgabe erschien unter dem Titel: Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de Analysi promota, jussu Societatis Regiae in lucem editum: et jam una cum ejusdem Recensione praemissa, et judicio primarii, ut ferebatur, Mathematici subjuncto, iterum impressum. Lond. MDCCXXII.

seine Correspondenzen mit Huygens, Tschirnhaus, Wallis aufzunehmen, die in der Zeit, als er seine Entdeckung machte, lebten und deren Urtheile vollgültig und entscheidend sein mußten. Besonders aber kam es ihm darauf an, den Kernpunkt des Streites, der in dem Commercium epistolicum der Engländer absichtlich verhüllt oder auch nicht erkannt worden war, klar darzulegen*). Leibniz hat dieses Vorhaben nicht ausgeführt. Dadurch behielt das, was seine Gegner behaupteten, nicht allein in der Zeit des Streites Geltung, sogar bis in die Gegenwart zeigen sich noch immer die Folgen des Streites, die Verdunkelungen, welche die Gegner Leibnizens rücksichtslos ausgestreut haben. Um so mehr ist es geboten, auf Grund der noch vorhandenen Documente den Streit über den ersten Erfinder der Differentialrechnung zu klären und zu zeigen, was die Wissenschaft Leibniz zu verdanken hat, und wie er auf seine Erfindung gekommen ist**).

Das Verfahren, welches die griechischen Geometer zur Behandlung von Problemen der höheren Geometrie ersonnen hatten, und das namentlich von Archimedes mit Meisterschaft zur Anwendung gebracht wurde, behielt man bei dem Wiederaufleben der Wissenschaft in seiner äußern Form bei und bildete es zu einer Methode um, die jedoch den strengen Anforderungen der Mathematik nicht genügte. Diese

---

*) Sed majus operae pretium erat ipsam viam ac rationem, qua ad novum hoc calculi genus inventor pervenit, innotescere; ea enim hactenus publice ignoratur etiam illis ipsis fortasse qui in partem inventi venire vellent, quam exponere ipse et progressus studiorum suorum Analyticorum partim ex memoria partim ex scriptis extantibus et veterum schedarum qualibuscunque reliquiis tradere, eaque ratione Historiam profundioris Matheseos artemque ipsam inveniendi justo libello illustrare decreverat. Leibniz in der Abhandlung Historia et Origo Calculi differentialis.

**) Utilissimum est cognosci veras inventionum memorabilium origines, praesertim earum, quae non casu sed vi meditandi innotuere. Id enim non eo tantum prodest, ut Historia literaria suum cuique tribuat et alii ad pares laudes invitentur, sed etiam ut augeatur ars inveniendi, cognita methodo illustribus exemplis. Leibniz im Anfang der Abhandlung Historia et Origo Calculi differentialis.

Ausstellungen suchte Cavalieri zu vermeiden; er stellte ein anderes, allgemein anwendbares Verfahren als Ersatz für die strenge Archimedeische Weise auf, das allseitigen Beifall fand. Da es möglich ist, geometrische Größen zu erzeugen: Linien durch Bewegung eines Punktes, ebene Figuren durch Bewegung von Linien, körperliche Figuren durch Bewegung von Ebenen, so meinte Cavalieri an die Stelle von ebenen Figuren Summen von Linien, an die Stelle von körperlichen Figuren Summen von Ebenen setzen zu können, und durch die erzeugenden Größen die entstandenen zu ermitteln*). Indeß der Widerspruch im Princip der Methode, continuirliche Größen auf discontinuirlichem Wege bestimmen zu wollen, wurde durch das Zusammenfassen der erzeugenden Größen nicht beseitigt. Aber obwohl man fast allgemein die geringe Zuverlässigkeit der Methodus indivisibilium Cavalieri's erkannte, so blieb sie doch bis zur Einführung des Algorithmus der höheren Analysis das einzige Mittel besonders zur Bestimmung des Inhalts körperlicher Räume; sie hat die Entdeckung des Algorithmus der Differential- und Integralrechnung besonders beeinflußt.

Cavalieri veröffentlichte sein Verfahren in der Schrift: Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota, Bonon. 1635; fast gleichzeitig erschien Descartes' Traité de la Géométrie, Leyden 1637, in welchem dieser ein neues Verfahren zur Behandlung geometrischer Probleme bekannt machte. Nachdem bereits durch Viète die Verbindung der Algebra mit der Geometrie angebahnt war, zeigte Descartes, wie es möglich sei, durch Anwendung der Algebra die Natur von krummen Linien durch Gleichungen darzustellen, und die Eigenschaften einer Curve in einer Formel auszudrücken. Dadurch wurde die Verwandtschaft der Curven und, wie sie zusammengehören, erkannt, man theilte sie nach der Beschaffenheit der

*) Optimam methodum figurarum scrutandae mensurae judicavi prius linearum pro planis, et planorum pro solidis rationes indagare, ut illico ipsarum figurarum mensuram mihi compararem. Cavalieri in der Vorrede zur Methodus indivisibilium.

Formeln in Classen; es ergaben sich Methoden für die Construction der Tangenten; man konnte die Construction der Curven verfolgen, ob sie endlich waren oder sich ins Unendliche erstreckten u. s. w. Zu den Problemen, die Descartes mit Vorliebe bearbeitete, gehörte die Tangenten der Curven zu construiren; er fand für geometrische Curven (nach seiner Eintheilung) eine allgemeine Methode. Die neuen Lehren, welche Descartes aufgestellt hatte, wurden allseitig mit dem größten Beifall aufgenommen. Die berühmtesten Mathematiker des 17. Jahrhunderts haben sich bemüht, sie zu verbessern. Höchst wahrscheinlich beschloß Leibniz, um einen Platz in der Reihe der ersten Mathematiker zu gewinnen, die Vorzüge seiner neuen Erfindung in der Aufstellung einer allgemeinen Tangentenmethode darzuthun und zugleich ihre allgemeine Anwendbarkeit zur Lösung der Probleme der höheren Mathematik zu zeigen. Demnach ist, wie man fast allgemein angenommen hat, der Ursprung des Algorithmus der höheren Analysis keineswegs auf die Methode, Tangenten von Curven zu construiren zurückzuführen; sie hat nur das Verständniß der neuen Rechnung vermittelt. Cavalieri's Methodus indivisibilium und die von Descartes angebahnte und von seinen Nachfolgern verbesserte Methode, die Tangenten der Curven zu finden, haben zu der Grundlegung und dem Ausbau der neueren Analysis besonders beigetragen.

Als Leibniz in Paris sich aufhielt (1672—1676), machten die Schüler und Anhänger von Descartes durch die Vergötterung ihres Meisters auf ihn einen widerwärtigen Eindruck; sie priesen das, was er geleistet hatte, als das Höchste was zu erreichen wäre, und hielten das was ihm nicht gelungen war, für unausführbar. Dies Treiben war für ihn ein Sporn, die Lösung der Probleme, an welchen Descartes vergeblich seine Kraft versucht hatte, zu bewirken. Ein solches Problem, ein sogenanntes umgekehrtes Tangentenproblem (methodus tangentium inversa) war Descartes von seinem Freunde Florimond de Beaune vorgelegt worden: Trouver une courbe telle que l'or-

donnée fût à la soustangente comme une ligne donnée est à la partie de l'ordonnée comprise entre la courbe et une ligne inclinée sous un angle donné. Descartes vermochte nicht die Aufgabe durch seine Analysis vollständig zu lösen. Man hatte indeß erkannt, daß die Lösung dieses Problems, ebenso wie die Bestimmung der Rectification der Curven, ihrer Schwerpunkte, des Inhalts krummer Oberflächen u. s. w. durch Quadraturen bewerkstelligt werden könnte. Unter diesen Methoden war die mittelst der Guldin'schen Regel vielleicht die am wenigsten beachtete, da die Bestimmung des Schwerpunktes oft schwieriger war als die Ermittelung des Inhalts auf directem Wege. Leibniz beschloß (25. October 1675) diese Methode zuerst zu untersuchen; er überzeugt sich, daß durch zwei gegebene Momente in Bezug auf zwei parallele Linien die gerade Linie, die durch den Schwerpunkt geht, gegeben ist, und daß durch drei gegebene Momente in Bezug auf drei nicht parallele Linien der Flächeninhalt und der Schwerpunkt gefunden werden können. In den folgenden Tagen (26. October, 29. October) wendet sich Leibniz zur Ermittelung der Quadraturen, die unmittelbar aus der krummlinig begrenzten Figur sich ergeben. Er meint, daß durch Theilung der Figuren in verschiedene Elemente dies erreicht werden könnte, insofern durch die Bestimmung eines solchen Elementes auch die aller übrigen sich ergiebt. Ferner betrachtet er die Theilung der Figur durch senkrecht auf die Abscissenaxe gefällte Ordinaten, und bemerkt den Satz: Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem aequantur complemento summae terminorum, sive $\text{omn.}\,\overline{xw} \sqcap \text{ult.}\,x\,.\,\text{omn.}\,\overline{w} - \text{omn.}\,\overline{\text{omn.}\,w}$, oder nach der spätern Bezeichnung Leibnizens $\int\overline{xl} \sqcap x\int\overline{l} - \int\int\overline{l}$. Im Verlauf der Untersuchung über die Quadraturen zieht Leibniz das von ihm so genannte triangulum characteristicum der Curven in Betracht und erörtert hierbei, ob Ausdrücke wie omn. l und omn. p, wo l und p Linien bezeichnen, auf gewöhn-

liche Weise mit einander multiplicirt werden können, und welche Bedeutung das Product hat. Die Multiplication ist ausführbar, wenn omn. l eine Linie und omn. p eine ebene Figur bedeutet, und das Product wird den Inhalt einer körperlichen Figur ausdrücken. Leibniz setzt in der nebenstehenden Figur $BL \sqcap y$, $WL \sqcap l$, $BP \sqcap p$, $TB \sqcap t$, $AB \sqcap x$, $GW \sqcap a$, $y \sqcap \text{omn.}\, l$; es ergiebt sich daß $\frac{l}{a} \sqcap \frac{p}{\text{omn.}\, l \sqcap y}$, folglich $p \sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\, l}}{a} l$, d. h. es ist $\overline{\text{omn.}\, l}$ in l zu multipliciren, welches dem p entspricht, mithin ist $\text{omn.}\, p \sqcap \text{omn.} \frac{\overline{\text{omn.}\, l}}{a} l$. Nun ist $\text{omn.}\, p \sqcap \frac{y^2}{2} \sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\, l}\,\boxed{2}}{2}$, folglich $\text{omn.} \frac{\overline{\text{omn.}\, l}\,\boxed{2}}{2} \sqcap \text{omn.}\, \overline{\overline{\text{omn.}\, l}\, \frac{l}{a}}$; ergo habemus theorema, setzt Leibniz hinzu, quod mihi videtur admirabile et novo huic calculo magni adjumenti loco futurum. Hier die erste Erwähnung einer neuen Rechnung! Es folgt sofort auch die neue Bezeichnung: utile erit scribi $\int$ pro omn. ut $\int l$ pro omn. l, id est summa ipsorum l. Es sind für die neue Rechnung die beiden Theoreme gewonnen: $\frac{\overline{\int l}^{2}}{2a} \sqcap \int \overline{\int \overline{l}\, \frac{l}{a}}$ und $\int \overline{x\, l} \sqcap x \int \overline{l} - \int \overline{\int l}$; ferner $\int \overline{x} \sqcap \frac{x^2}{2}$, $\int \overline{x^2} \sqcap \frac{x^3}{3}$, $\int \overline{\frac{a}{b} l} \sqcap \frac{a}{b} \times \int \overline{l}$, mit der Bemerkung, daß diese Theoreme auch für Reihen gelten, in welchen die Differenzen der Glieder zu den Gliedern ein kleineres Verhältniß als ein irgend angebbares haben. Leibniz bemerkt zum Schluß: Satis haec nova et notabilia, cum novum genus calculi inducant. Darauf wendet sich Leibniz zur entgegengesetzten Rechnungsweise (contrario calculo). In den vorhergehenden Jahren hatte er sich besonders mit Untersuchungen von Zahlreihen beschäftigt; es war ihm das Ver-

hältniß der Summe zur Differenz geläufig; er bemerkt: ut $\int$ augebit, ita d diminuit dimensiones. $\int$ autem significat summam, d differentiam. Die Differenz ist das Umgekehrte der Summe; werden die obigen Bezeichnungen beibehalten, so wird $\frac{ya}{d}$ die Differenz ausdrücken, worin a die Einheit darstellt. So führt Leibniz ursprünglich die Bezeichnung für das Differential ein; erst in dem folgenden Manuscript vom 11. November bemerkt er: Idem est dx et $\frac{x}{d}$, id est differentia inter duas proximas.

Die mittelst der neuen Bezeichnung gewonnenen Resultate verwendet Leibniz in dem oben erwähnten Manuscript vom 11. November überschrieben: Methodi tangentium inversae exempla, zur Behandlung von Aufgaben der umgekehrten Tangentenmethode, mit welchen er seit längerer Zeit sich beschäftigt hatte und zu deren Lösung die bis dahin veröffentlichten Methoden nicht ausreichten. In einem Manuscript aus dem folgenden Jahre 1676, datirt Jul. 1676, und überschrieben: Methodus tangentium inversa, behandelt Leibniz auch die erwähnte Beaune'sche Aufgabe und giebt deren Lösung.

Durch die neu eingeführten Rechnungszeichen hatte Leibniz eine neue Rechnung angebahnt. Es kam nun darauf an, die Rechnungsregeln für diese neue Rechnung aufzustellen. Für Addition und Subtraction ergaben sie sich unmittelbar von selbst; sie blieben unverändert. Es blieb zu untersuchen, wie sie in Bezug auf Multiplication und Division sich gestalteten. Er überzeugt sich, das $d\overline{xy}$ nicht gleich ist $dx\,dy$, und ebenso $d\frac{x}{y}$ nicht gleich $\frac{dx}{dy}$. In dem Manuscript 11. Julii 1677, in welchem Leibniz eine Zusammenstellung des „Algorithme nouveau" giebt, finden sich die Differentiale des Products und des Quotienten, so wie für Potenzen und für die Wurzelausdrücke.

Aus dem Vorstehenden und den betreffenden Manuscripten ergiebt sich, daß in Bezug auf die Bezeichnung und den weiteren Algorithmus der neuen Rechnung keine Einwirkung von außen her auf Leibniz stattgefunden hat. Die Einführung desselben war vielmehr ein Ausfluß des Bewußtseins, daß von einer passend gewählten Zeichensprache der Fortschritt der Wissenschaft abhängt. Es erscheint demnach der Algorithmus der höheren Analysis als ein Corollarium des großen Problems, der Characteristica realis (auch generalis genannt) das Leibniz seit den ersten Anfängen seiner wissenschaftlichen Studien sein ganzes Leben hindurch verfolgt hat.*) Dasselbe Mittel hat Leibniz auch in anderen mathematischen Disciplinen, in der Algebra und in der Geometrie, zur Anwendung gebracht und dadurch Erfolge erzielt.

Die Fluxionsrechnung entbehrt dieses Vorzugs. Newton hat den mächtigen Einfluß einer passend gewählten Zeichensprache auf die Wissenschaft nicht erkannt. In der zweiten Ausgabe des Commercium epistolicum, die im Jahre 1722 erschien, ist eine von Newton ver-

*) Bereits in seiner Erstlingsschrift: De Arte combinatoria aus dem Jahre 1666 führt Leibniz aus, daß alle Begriffe in eine kleine Anzahl einfacher, widerspruchsloser Elemente sich zerlegen lassen, und daß, wenn es gelänge, für diese letztern bezeichnende Charaktere aufzufinden, die Möglichkeit gegeben wäre, durch Combination dieser Charaktere nicht allein alle bereits bekannten Wahrheiten sofort für jeden verständlich auszudrücken, sondern auch neue Wahrheiten zu entdecken; es könne auf diese Weise gewissermaßen ein Alphabet der menschlichen Gedanken geschaffen und durch Combination der Zeichen dieses Alphabets und durch Analysis der daraus gebildeten Wörter alles sowohl gefunden als beurtheilt werden. Leibniz schreibt in der angeführten Schrift: Verum constitutis Tabulis vel praedicamentis artis nostrae complicatoriae majora emergent. Nam Termini primi, ex quorum complexu omnes alii constituuntur, signentur notis, hae notae erunt quasi alphabetum. Commodum autem erit notas quam maxime fieri naturales v. g. pro uno punctum, pro numeris puncta, pro relationibus Entis ad Ens lineas, pro variatione angulorum aut Terminorum in lineis genera relationum. Ea si recte constituta fuerint et ingeniose, scriptura haec universalis aeque erit facilis quam communis, et quae possit sine omni lexico legi, simulque imbibetur omnium rerum fundamentalis cognitio. Fiet igitur omnis talis scriptura quasi figuris geometricis, et velut picturis, uti olim Aegyptii, hodie Sinenses, verum eorum picturae non reducuntur ad certum Alphabetum seu literas, quo fit ut incredibili memoriae afflictione opus sit, quod hic contra est.

faßte „Recensio libri“ vorausgeschickt; es heißt darin: Newtonus non in formis Symbolorum suam Methodum constituit, neque se alligat ad ullam unam speciem Symbolorum pro fluentibus et fluxionibus. Ubi areas Curvarum pro fluentibus ponit, saepe ponit ordinatas pro fluxionibus, et fluxiones denotat per Symbola ordinatarum, ut in Analysi sua fecit. Ubi Lineas pro fluentibus ponit, quaevis symbola ponit pro velocitatibus Punctorum Lineas describentium, hoc est, pro fluxionibus primis; et quaevis alia symbola pro incremento earum velocitatum, hoc est, pro fluxionibus secundis, ut saepe fit in Principiis Philosophiae. Ubi autem literas x, y, z pro fluentibus ponit, earum fluxiones denotat vel per alias literas ut p, q, r, vel per easdem literas alia forma positas ut X, Y, Z, vel $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ punctatas, vel per quasvis Lineas ut DE, FG, HI, consideratas tamquam earum exponentes. Atque hoc quidem manifestum est ex Libro ejus de Quadraturis, ubi in prima Propositione fluxiones indicat per literas punctatas, in ultima propositione per ordinatas Curvarum; et in Introductione per alia Symbola, dum Methodum explicat illustratque per Exempla. Leibnitius in sua Methodo nulla Fluxionum Symbola habet, et idcirco Newtoniana Fluxionum symbola sunt in eo genere prima. Leibnitius Symbolis illis Momentorum sive differentiarum dx, dy, dz primo uti coepit anno 9677: Newtonus Momenta denotabat per Rectangula sub Fluxionibus et Momento 0, cum Analysin suam scriberet, anno 1669 vel antea. Leibnitius Symbolis $\int x$, $\int y$, $\int z$ pro Summis Ordinatarum usus est, jam inde ab anno 1686: Newtonus in Analysi sua eandem rem denotavit, inscribendo Ordinatam in Quadrato vel Rectangulo ad hunc modum $\boxed{\frac{aa}{64\,x}}$. Omnia Newtoni Symbola sunt in suo quaeque genere prima.

Leibniz hat die Vorzüge des von ihm eingeführten Algorithmus der höheren Analysis auf das nachdrücklichste vertheidigt und zur Geltung gebracht in seinem Zusammensein mit Tschirnhaus in Paris und in dem darauf folgenden Briefwechsel mit demselben. Tschirnhaus, der mit den hervorragendsten Männern der Wissenschaft in London verkehrt hatte, kam mit Empfehlungen Oldenburg's an Leibniz im September 1675 nach Paris. Bald darauf, im Oktober 1675, geschah die Einführung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz. Es konnte nicht fehlen, daß darüber zwischen beiden Unterredungen stattfanden. Tschirnhaus meinte, eine allgemeine Methode zur Quadratur und Cubatur gefunden zu haben, wobei er nur die bisher üblichen Wege in Anspruch nahm (modum magis ordinarium et intelligibilem); er war der Ansicht, daß durch neu eingeführte Wörter und Zeichen die Wissenschaft nur unverständlicher gemacht würde*). Er lobt besonders Viète, daß er nur die Buchstaben des Alphabets gebraucht habe, anstatt andere wie Ungeheuer aussehende Charaktere (monstra characterum) einzuführen. Darauf erwidert Leibniz: Ego non hunc tantum, sed et infinitos alios modos habeo obtinendi aequationes tetragonisticas per calculum, cujus istae a Te propositae sunt casus tantum. Calculum autem hunc exequor per nova quaedam signa mirae commoditatis, de quibus cum nuper scripsissem respondes, tuum exprimendi modum magis ordinarium ac intelligibilem esse, et Te novitatem in definitionibus rerum quam maxime effugere, hoc enim nihil aliud esse quam scientias difficiles reddere. . . . . In signis spectanda est commoditas ad inveniendum, quae maxima est, quoties rei naturam intimam paucis exprimunt et velut pingunt, ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor. Talia vero sunt signa a me in calculo aequationum tetragonisticarum adhibita, quibus proble-

*) Novitatem in definitionibus vocum quantum possum effugio, hoc enim nihil aliud est quam scientias difficiles reddere. Tschirnhaus an Leibniz.

mata saepe difficillima pancis lineis solvo. . . . . Est mihi pro methodo tangentium inversa et methodo tetragonistica calculus idem, eadem signa. — Der Briefwechsel zwischen Leibniz und Tschirnhaus in Betreff des Algorithmus der höheren Analysis währt bis zu Ende des Jahres 1679; er wird beschlossen durch ein höchst wichtiges Schreiben Leibnizens, in dem er über seinen mathematischen Bildungsgang Mittheilungen macht.

Es ist auffallend, daß Tschirnhaus in seinen Briefen Newton und die Fluxionen nicht erwähnt; hätte er davon Kenntniß gehabt, er würde sicherlich sie dem Leibnizischen Algorithmus gegenüber zur Sprache gebracht haben. Auch hieraus ergiebt sich, daß auf die Erfindung Leibnizens irgend welche Beeinflussung nicht stattgefunden hat.

Es kann nicht behauptet werden, daß Leibniz sofort die Tragweite seiner neuen Rechnung übersah; dazu hatte er noch zu kurze Zeit Studien in Betreff der höheren Mathematik gemacht, und der Umfang der mathematischen Wissenschaft war ihm noch nicht ausreichend bekannt. Sie war ihm anfangs nur ein Mittel, die Aufgaben der umgekehrten Tangentenmethode zu lösen. Allmählich wuchs in ihm die Erkenntniß des ausgezeichneten Mittels zur Bewältigung der Probleme der höheren Mathematik. Dagegen hat er stets behauptet und mit Nachdruck darauf hingewiesen, daß er den „calculus differentialis“ zuerst gefunden und bekannt gemacht*); wie tief muß es ihn verwundet und geschmerzt haben, als in dem Streit über den ersten Erfinder der Differentialrechnung, in dem durch englische Perfidie und Ignoranz der Streitpunkt, um den es sich handelte, absichtlich verdunkelt wurde, er als zweiter Erfinder, der vielleicht

*) Newton hat zuerst in zwei Briefen an Wallis vom 27. August und 17. September 1692, die er auf dessen Wunsch schrieb, Erklärungen abgegeben, was er unter Fluenten und Fluxionen versteht, zugleich mit den Bezeichnungen der Fluxionen durch darüber gesetzte Punkte. Höchst wahrscheinlich ist diese Bezeichnung der Fluxionen erst damals entstanden.

sogar von Newton etwas entlehnt haben könnte, hingestellt wurde. Leibniz wies mit Recht darauf hin, daß es sich nicht um das Princip der höheren Analysis handle, das seit Archimedes bekannt war; es kam vielmehr darauf an, für dieses Princip eine Rechnung aufzustellen.

Der erste Band enthält die Briefwechsel mit Oldenburg, Newton, Collins, Conti, Tschirnhaus, Huygens, von denen Leibniz Tschirnhaus und Huygens als gleichzeitig lebende Zeugen für die Entdeckung seiner Rechnung aufführt, zugleich mit den Beweisstücken aus den Leibnizischen Manuscripten. Auf diese Weise erscheint zum ersten Male die Entdeckung der Differentialrechnung actenmäßig dargestellt.

Inhalt
des ersten Bandes.

Vorwort.

Briefwechsel zwischen Leibniz und Oldenburg, Newton, Collins, Conti. 1670—1716.

Briefwechsel zwischen Leibniz und Christiaan Huygens 1673(?)—1695.

Briefwechsel

zwischen

Leibniz

und

Oldenburg, Newton, Collins, Conti.

1670—1716.

Nachdem Leibniz auf der Universität seiner Vaterstadt Leipzig seit Ostern 1661 vorzugsweise philosophischen und juristischen Studien sich gewidmet hatte, beschloß er Ostern 1663 noch die Universität Jena zu besuchen. Er wurde vornehmlich, wie es scheint, durch Erhard Weigel, der die Professur der Mathematik bekleidete, dahin gezogen. Weigel hatte sich weniger durch die Wissenschaft, die er vertrat, als vielmehr durch seine anregende Unterrichtsweise und durch den besondern Verkehr, in den er zu seinen Schülern trat, einen weit verbreiteten Ruf erworben. Seine Kenntnisse gingen wohl nicht über die Elementar-Mathematik hinaus, aber er besaß großes mechanisches Geschick und Erfindungsgabe, die er für die praktischen Fächer und auf die Lebensverhältnisse verwandte.*)

Leibniz gewann demnach durch seinen Aufenthalt auf der Universität Jena keine erhebliche Förderung in seinen mathematischen Kenntnissen; dagegen dürften die Art und Weise, wie Weigel die Mathematik nach den verschiedensten Seiten zur Anwendung brachte, und überhaupt sein anregender Unterricht ihre Wirkung auf Leibniz nicht verfehlt haben. Vielleicht ist die Haltung der Schrift De Arte

*) Über Erhard Weigel sind zu vergleichen: Erhard Weigel. Ein Beitrag zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften auf den deutschen Universitäten im 17. Jahrhundert, von Dr. Bartholomaei in Jena (Supplementheft zum 13. Jahrgang der Zeitschrift für Mathematik und Physik. 1868). — Erhard Weigel, ein Lebensbild von Edmund Spieß, Leipzig 1881.

Combinatoria, Lips. 1666, auf seinen Jenenser Aufenthalt zurückzuführen; desgleichen auch die erste Idee seiner Rechenmaschine, die bereits vor dem Jahre 1671 entstanden ist.*)

Auch auf dem Gebiet der Philosophie dürfte eine Einwirkung Weigel's auf Leibniz nachzuweisen sein; waren doch beide in Übereinstimmung, daß zur Erklärung der Erscheinungen der Körperwelt von Aristoteles, nachdem er von den Schlacken der scholastischen Philosophie gereinigt, auszugehen sei. Hoc unum in quaestione est, schreibt Leibniz an Jacob Thomasius im Jahre 1669 (Leibniz, Philosophische Schriften Bd. I. S. 16. 17) an quae Aristoteles de materia, forma et mutatione abstracte disputavit, ea explicanda sint per magnitudinem, figuram et motum. Id Scholastici negant, Reformatores affirmant. Reformatorum sententia mihi non solum verior, sed et Aristoteli magis consentanea videtur.**) Es kam demnach nur darauf an, jede „mutatio", so verschiedenartig sie auch sein

*) Es wird meistens angegeben, daß Leibniz während seines Aufenthalts in Paris, als ihm die Rechenmaschine Pascal's gezeigt wurde, seine viel vollkommnere erfunden und ein Modell davon aufgestellt habe, wodurch er die Aufmerksamkeit des Ministers Colbert auf sich lenkte (Guhrauer, Leibniz Theil 1. S. 113). Dagegen geht aus der Correspondenz Leibnizens mit de Carcavy hervor, daß er bereits im Jahre 1671 während seines Aufenthalts in Mainz im Besitz seiner Rechenmaschine war — ob in der Idee oder schon ausgeführt, läßt sich nicht mit Bestimmtheit entscheiden. De Carcavy schreibt an ihn (Lutet. Par. die XX[a]. Junii an. 1671): Ad machinam tuam quod attinet, quam curiosam et utilem existimo, eam si ad nos mittere velis, dabo operam ut Excellentis Colberto innotescat, eamque nanciscar occasionem ut tua merita apud eum extollam, scilicet Effecta verbis praepollent praesertim apud eum qui plura facit quam dicit, nec dubito quin Vir Sagacissimus eam magni faciat. Arcanum autem Religiᵉ servabo; is enim sum qui tibi inservire etiam atque etiam exopto. Doctissimus Paschalius, Mathematicarum olim peritissimus, jam a multis annis similem fere machinam invenit ex multis rotis compositam, cuius beneficio additionem et subtractionem, proindeque alias Arithmeticae regulas conficere in promptu est. Eam si non videris, author sum ut videas. — Leider fehlt der Brief Leibnizens, welchen de Carcavy hier beantwortet.

**) In der Correspondenz mit Jacob Thomasius erörtert Leibniz den Ursprung seiner Philosophie ausführlich, namentlich daß er niemals Cartesianer gewesen sei (me fateor nihil minus quam Cartesianum esse; ferner: Quare dicere non vereor, plura me probare in libris Aristotelis περὶ φυσικῆς ἀκροάσεως quam in meditationibus Cartesii; tantum abest ut Cartesianus sim).

mag, auf „motus“ zurückzuführen. Um dies zu Stande zu bringen, sah sich Leibniz veranlaßt, von der metaphysischen Beschaffenheit der Körper eine Vorstellung zu gewinnen, und zugleich die Endursache der Bewegung aufzusuchen. So wurde die Bewegung der Ausgangspunkt seiner Metaphysik.

Im Jahre 1669 befand sich Leibniz in dem Badeort Schwalbach, als ihm ein Heft der Philosophical Transactions der Königlichen Societät in London zu Gesicht kam, in welchem Abhandlungen von Huygens und Wren über die Bewegungsgesetze enthalten waren. Er erkannte sofort, daß die Grundsätze (regulae), welche die Verfasser in Betreff der Bewegungen aufgestellt hatten, von den Erscheinungen (phaenomena) entlehnt waren, daß aber die ersten Gründe der Bewegungen ganz andere wären. Die Erscheinungen seien abhängig von der zufälligen Beschaffenheit ihrer Umgebung (ex statu Mundi); sie seien andere im leeren Raum oder in einem ruhenden Medium, gerade so wie die Schwere und die beschleunigte Bewegung der fallenden Körper nicht von einer innewohnenden Kraft, sondern von äußerlichen, nicht bemerkbaren Ursachen beeinflußt werden. Leibniz ergriff die Gelegenheit, um mit der Königlichen Societät in London in Berührung zu kommen. Er ordnete in kürzester Zeit seine Ideen über die erste Ursache aller Bewegungen in der Körperwelt, und wandte sich an Oldenburg, den Secretär der Societät,*) um zu erkunden, ob eine Schrift mit dem betreffenden Inhalt von der Societät entgegengenommen würde. Hiermit beginnt die Correspondenz Leibnizens mit Oldenburg, eine der wichtigsten, durch die er in seinen wissenschaftlichen Bestrebungen ganz besonders gefördert wurde. Als Leibniz von

*) Heinrich Oldenburg, geboren 1626 zu Bremen, bekleidete während Cromwell's Herrschaft das Amt eines Consuls seiner Vaterstadt in London. Nach Verlust seiner amtlichen Stellung wurde er Tutor eines englischen Edelmanns, den er 1656 nach Oxford begleitete. Er wurde daselbst mit den Gelehrten bekannt, welche die Royal Society zu London gründeten. 1663 wurde Oldenburg einer der Secretäre dieser gelehrten Gesellschaft.

Oldenburg zur Übersendung aufgefordert wurde, ließ er seine Schrift drucken. Die Briefe, die Leibniz in dieser Zeit an Oldenburg richtete, enthalten interessante Beiträge in Betreff der Entstehung und Entwickelung seiner metaphysischen Vorstellungen, insofern er sich genöthigt sah, zur Ermittelung der Grundursache der Bewegungen auf die Beschaffenheit der Körper einzugehen. Eine Hauptschwierigkeit verursachte ihm die Erklärung der Erscheinungen der Cohäsion sowohl in Betreff eines Körpers, als auch von mehreren Körpern unter sich, wie sie auf Bewegung zurückzuführen seien. Leibniz ging hierbei wiederum auf Aristoteles zurück, der „contigua" definirt, quorum termini sunt simul, et continua quorum termini sunt unum. Quorum igitur termini unum sunt, ea connexa ac sibi cohaerentia sunt, quamdin perdurat terminorum unitas. In Folge dessen stellt Leibniz die Behauptung auf: Quaecunque ita moventur ut unum in alterius locum subire conetur, ea durante conatu inter se cohaerent, und fügt hinzu: Conatus enim, rectissime observante Hobbio, est initium motus, seu id in motu, quod in linea punctum. In Betreff des Punktes nimmt Leibniz die Vorstellung Cavalieri's über die untheilbaren Größen zu Hülfe: Punctum non esse aliquid minimum et omnium partium expers; esse tamen inextensum seu expers partium distantium; quin etiam punctum esse puncto majus, ut angulum angulo: Punctum non esse cujus pars nulla est nec cujus pars consideratur, sed quod quolibet extenso assignabili minus est, quod est fundamentum methodi Cavalerianae. Kaum anders, setzt er hinzu, könne man sich aus dem Labyrinth des Begriffs des Continuirlichen herausfinden. An einer andern Stelle bemerkt Leibniz: Ex subtilissima contemplatione de natura puncti seu indivisibilium pleraque miracula in rebus naturalibus oriuntur. An diese keineswegs widerspruchslose Auffassung von dem Begriff des Punktes reihen sich alle übrigen metaphysischen Vorstellungen Leibnizens.*)

*) In Bezug auf das Obige spricht sich Leibniz in seinem ersten Schreiben an

Die von Leibniz verfaßte Schrift hat zum Titel: Hypothesis physica nova, qua Phaenomenorum Naturae plerorumque causae ab unico quodam universali motu, in globo nostro supposito, neque Tychonicis, neque Copernicanis aspernendo, repetuntur, Autore G. G. L. L. Moguntiae Anno M.DC.LXXI. Sie besteht aus zwei Theilen, von denen der erste die Aufschrift hat: Theoria motus concreti seu Hypothesis de rationibus phaenomenorum nostri Orbis, und der Königlichen Societät in London gewidmet ist; der zweite Theil hat den Titel: Theoria motus abstracti seu rationes motuum universales, a sensu et phaeno-

---

Johann Friedrich, Herzog von Braunschweig-Lüneburg, datirt Maynz 21 Maji 1671 (Leibniz, Philosoph. Schriften Bd. I. S. 52) wie folgt aus: Sonsten habe unterthänigst beygefügt (zu dem Exemplar der Hypothesis physica) einen kurtzen geschriebenen Discours den ich einstmahls auff begehren De usu et necessitate demonstrationum immortalitatis Animae auffgesetzet, darinnen ich eineß undt das andere de Demonstrationibus meis circa Naturam Dei et Mentis gedenke. Obgleich solche Demonstrationes selbst wegen ihrer unzertrennlichen Kette, damitt sie einander nicht allein bestärken, sondern auch erläuttern, extractes oder stückweise verständtlich beyzufügen unmöglich gewesen. Denn auch meine Demonstrationen gegründet sein auff der schwehren doctrina de puncto, instanti, indivisibilibus, et conatu; dann gleich wie Actiones corporum bestehen in motu, so bestehen Actiones mentium in conatu, seu motûs, ut sic dicam, minimo vel puncto; dieweil auch mens selbsten eigentlich in puncto tantum spatii bestehet, hingegen Ein Corpus einen platz einnimbt. Welches ich, nur populariter davon zu reden, daher klarlich beweise, dieweil das gemüth sein muß in loco concursus aller bewegungen, die von den objectis sensuum unß imprimirt werden; dann wann ich schließen will, daß ein mir vorgegeben corpus gold sey, so nehme ich zusammen seinen glantz, Klang und gewicht, und schließe darauß daß eß gold sey, muß also das gemüth ahn einem orth sein, da alle diese Linien visus, auditus, tactus zusammen fallen, undt also in Einem punct. Geben wir dem Gemüth einen größern platz als einen punct, so ist eß schon ein Cörper, undt hat partes extra partes, ist daher sich nicht selbst intime praesens, undt kan also auch nicht auff alle seine stücke undt Actiones reflectiren. Darinn doch die Essentz gleichsamb deß Gemüthes bestehet. Gesetzt nun das Gemüth bestehe in Einem punct, so ist es unzertheilig undt unzerstörlich. Auß welchen undt anderen dazu genommenen fundamenten ich viel wunderlich dingß von eigenschafft der menschlichen Seele undt inßgemein aller verständigen Gemüther bewiesen, daran wohl bißher niemandt gedacht, obgleich die wahrheit der Religion, der Göttlichen Providentz, der Unsterblichkeit unserer Seele undt vieler hohen mysterien (als der gerechtikgeit, der praedestination und gegenwart im sacrament) müglichkeit auff gantz niemahlß gesehene manier darauß flieset: Welches alleß ich einstmahlß so klar als Etwaß sein kan, zu machen undt damitt bey allen Verständigen, den jetzo einreißenden Atheismum hassenden undt umb die Ewigkeit sich bekümmernden Menschen einigen Dank zu verdienen hoffe.

menis independentes, und ist der Akademie der Wissenschaften in Paris zugeeignet. In dem ersten Theil entwickelt Leibniz die Hypothese einer Universalbewegung in dem Weltenraum als Ursache aller Bewegungen in der Körperwelt. Er geht davon aus, daß die Sonne um ihren Mittelpunkt rotirt und zugleich Lichtstrahlen aussendet. Durch beides wird der ganze Weltenraum, der aus dem „aether“ und den darin vorkommenden, um ihre eigenen Mittelpunkte rotirenden Himmelskörpern besteht, in eine Centralbewegung versetzt. Durch das Zusammentreffen (concursus) dieser Centralbewegung des Äthers und der eigenen Rotation der Erde entstehen gewisse Blasen oder feine Gefäße (bullae quaedam seu vasa subtilia) welche gleichsam die Fundamente der Körper sind, und die sich, wie durch ein unsichtbares, aus dem Zusammentreffen beider Bewegungen entstandenes Feuer (ignis invisibilis, omnia nostra permeans totumque globum quousque nobis nosse datum est servans in perpetuo fluxu) in einer dem Kochen gleichen Bewegung (bullitio) befinden, nam bullitio rerum igne liquescentium, setzt Leibniz hinzu, in perpetua bullarum generatione et interitu, transfiguratione, unione plurium parvarum sibi appropinquantium in unam majorem, dispersione unius nimis tumefactae in plures parvas, mirabili circulatione consistit.*) Der Äther, der zur Bildung der „bullae“ nicht mitwirkt, rotirt mit dem Licht in schnellster Bewegung um die Erde. So entstehen die Elasticität und die Schwere und von diesen beiden die meisten Körperphänomene.**) — Den Inhalt des zweiten Theils der Hypothesis physica, der die

*) Diese letztere Auseinandersetzung ist der Correspondenz Leibnizens mit de Carcavy entlehnt.

**) Hic (aether) statim tam vim Elasticam tam Gravitatem efficit: Vim Elasticam, quia si quid crassi consistentisque aetheri occurrat. quod in tantam subtilitatem divisum non est, quanta est aetheris gyrantis, id motui aetheris obsistit, quia ab eo abripi eadem celeritate non potest: necesse est ergo, vel disjiciatur in similem aethereae tenuitatem, motui aptam, vel dejiciatur in locum, ubi motus tam fortis ac proinde tanta tenuitate opus non est, id est prope centrum: a disjectione Vis elastica, a dejectione gravitas: ab his duobus pleraque corporum phaenomena.

Theorie der Bewegung ohne Rücksicht auf die Phänomene behandelt, hat Leibniz selbst in dem Briefe an Oldenburg vom 29. April 1671 wie folgt angegeben: Die Lehre von der Bewegung an sich (theoria motus abstracti) beseitigt die fast unüberwindlichen Schwierigkeiten in der Zusammensetzung des Continuirlichen; sie stützt die Geometrie der untheilbaren und die Arithmetik der unendlichen Größen. Sie zeigt, daß in der Natur der Dinge nichts ohne Theile ist; das Continuirliche besteht aus unendlich vielen Theilen. Die Lehre von den Winkeln handelt von Größen ohne Ausdehnung (de quantitatibus inextensorum). Weiter heißt es: Motum esse motu fortiorem, ergo et conatum conatu: conatum autem esse motum per punctum in instanti; punctum ergo puncto majus esse. Si corpus premat corpus, conari ac proinde incipere in ejus loco esse; ergo incipere uniri seu penetrare; terminos igitur eosdem; ergo corpora se prementia cohaerere. Conatus diversos inter se per minima mixtos producere novi generis motus. Nullam esse cohaesionem quiescentis. Omnem potentiam esse a celeritate. Omne corpus esse mentem instantaneam; mentem servare conatum amisso motu, corpus non servare; sed mentem ab agendo desistere non posse, mentem propagare se ipsam sine nova creatione.

Die Londoner Societät übergab die Leibnizische Schrift an Wallis, Professor in Oxford, zur Berichterstattung. Sie fiel für Leibniz günstig aus. Das Wesentlichste davon enthält der Brief Oldenburg's vom 16. Juni 1671.*)

---

*) Leibniz hat später über die Hypothesis physica nova ein ganz ähnliches Urtheil gefällt wie über die vorausgegangene Schrift De Arte combinatoria. Er schreibt an Foucher (Leibniz, Philosoph. Schrift. Bd. I S. 415): Il est vray que j'avois fait deux petits discours il y a vingt ans, l'un de la Theorie du mouvement abstrait, où je l'avois consideré hors du systeme comme si c'estoit une chose purement mathematique, l'autre de l'Hypothese du mouvement concret et systematique, tel qu'il se rencontre effectivement dans la nature. Ils peuvent avoir quelque chose de bon, puisque vous le jugés ainsi, Monsieur, avec d'autres. Cependant il y a plusieurs endroits, sur lesquels je crois d'estre mieux instruit presentement, et entre

Die Correspondenz zwischen Leibniz und Oldenburg in den Jahren 1670 und 1671 bewegt sich wesentlich über die von Leibniz aufgestellte Hypothesis physica nova und über die Bewegung überhaupt; sie wird beschlossen durch das längere Schreiben Leibnizens von 15/25 Oktober 1671, mit welchem er zugleich eine kleine Abhandlung: Notitia Opticae promotae, Francofurt. 1671, übersendet, die er der Königlichen Societät vorzulegen bittet. Über den Inhalt derselben schreibt Leibniz an den Herzog Johann Friedrich von Braunschweig-Lüneburg wie folgt (Leibniz, Philosoph. Schrift. Bd. I S. 59): In Opticis habe ich entdecket erstlich 1) ein gewißes Genus Tuborum oder Lentium, so ich Pandochas nenne, dieweil sie das ganze objectum uniformiter faßen, und nicht weniger die strahlen extra axem opticum als in axe optico distincte colligiren, dadurch dasjenige, was man bishehr vergebens gesucht, zu wege gebracht wird, wie nehmlich den vitris objectivis eine so große apertura gegeben werde, als wir wollen, umb der strahlen desto mehr damit zu faßen. 2) Tubos-Catadioptricos, da in einem tubo Spiegel und Perspectiv mit einander conjungirt, und dadurch viel sonst unvermeidtlich drauff gehende strahlen, zum wenigsten noch einsten so viel als iezo müglich, erhalten werden. 3) Ein mittel, so bishehr vergeblich gesucht worden, mit Perspectiven aus einem stand zu meßen, ich höhre das dergleichen auch andere tentirt, welcher gestalt aber, habe noch von keinem Menschen verstanden, und dahehr per artem Combinatoriam gefunden. — Man kann wohl als ziemlich sicher annehmen, daß Leibniz dergleichen Linsen und Instrumente nicht

---

autres je m'explique tout autrement aujourdhuy sur les indivisibles. C'estoit l'essay d'un jeune homme qui n'avoit pas encor approfondi les mathematiques. Les Loix du mouvement abstrait que j'avois données alors devroient avoir lieu effectivement, si dans le corps il n'y avoit autre chose que ce qu'on y conçoit selon Des Cartes, et même selon Gassendi. Mais comme j'ay trouvé que la nature en use tout autrement à l'egard du mouvement, c'est un de mes argumens contre la notion receue de la nature du corps.

praktisch construirt hat; er hatte die Meinung, daß dergleichen möglich sei. Von weit höherem Interesse ist der übrige Inhalt dieses wichtigen Schreibens. Leibniz kommt auf Wallis' Bericht über die Hypothesis physica zurück und hebt hervor, daß Wallis mit der Behauptung einverstanden sei: nulla est cohaesio quiescentis d. h. Cohäsion entsteht nicht in der Ruhe, sie wird vielmehr durch Bewegung hervorgebracht. Es giebt keine absolute Ruhe in den Körpern, und Leibniz fügt hinzu: Quod a nobis appellatur corpus quiescens, id in rei veritate esse spatium vacuum, quicquid dissentiant Cartesiani. Hinc infero, ad essentiam corporis requiri aliud aliquid quam extensionem (id est magnitudinem et figuram), alioquin a spatio non differet. Ostendam autem, illud nihil aliud esse posse quam motum. Possum ergo demonstrare has propositiones alicujus in Philosophia momenti: (1) datur vacuum; (2) quod quiescit, est spatium vacuum; (3) quicquid movetur, cohaeret in linea motus; (4) Tellus movetur. Quae propositiones a se invicem pendent, aut consequuntur. Ausim me primum asserere qui demonstravit Motum Terrae. Si demonstrationes harum propositionum Illustri Societati Regiae non ingratas esse intellexero, transmittam aliquando. Hieran schließt Leibniz eine Kritik der Sätze, die Descartes über die Gesetze der Natur und über die Bewegung aufgestellt hat. Es finden sich hier schon die Grundlagen der Angriffe, mit welchen Leibniz ein Jahrzehnt später den Kampf gegen die Cartesianer eröffnete.

Die Correspondenz zwischen Leibniz und Oldenburg ist vom Ende des Jahres 1671 bis Anfangs 1673 unterbrochen, da Leibniz durch Arbeiten politischer Art anderweitig in Anspruch genommen wurde, die damit endigten, daß er im Auftrage des Barons von Boineburg den 19. März 1672 in einer politischen Mission nach Paris ging. Durch die Unterhandlungen, die Leibniz daselbst zu

führen hatte, wurde er längere Zeit festgehalten; er unterließ indeß nicht mit den hervorragendsten Männern der Wissenschaft in Paris in Verkehr zu treten; unter andern machte er die Bekanntschaft von Huygens, der als der vornehmste Vertreter der mathematischen Wissenschaften seit 1665 in Paris lebte. Im Herbst 1672 erschien eine außerordentliche Gesandtschaft des Churfürsten von Mainz in Paris, welche die Weisung hatte, von Paris nach England zu gehen. Im Gefolge des Gesandten kam Leibniz den 11. Januar 1673 nach London; er verweilte daselbst bis Anfangs März. Er machte die persönliche Bekanntschaft von Oldenburg, und verkehrte hier, ebenso wie vorher in Paris, mit den bedeutendsten Gelehrten London's, besonders mit dem Chemiker Boyle. In einem am 3. Februar in London an Oldenburg geschriebenen Briefe berichtet Leibniz, daß er am Tage vorher bei Boyle mit dem Mathematiker Pell zusammen getroffen sei; er habe zufällig geäußert, daß er im Besitz einer Methode sei, mit Hülfe der Differenzen die Glieder einer continuirlich wachsenden oder abnehmenden Zahlenreihe zu bestimmen, worauf Pell bemerkte, daß dies bereits in der Schrift Mouton's De Diametris apparentibus Solis et Lunae erwähnt werde.*) Leibniz hatte von dem Vorhandensein dieser Schrift keine Kenntniß. Er erhielt sie von Oldenburg zur Einsicht, und überzeugte sich sofort, daß das daselbst angegebene Verfahren in Betreff der Bildung der Glieder einer Reihe ein anderes sei als das seinige. Er konnte demnach nicht allein den Beweis führen, daß er durch eigene Untersuchungen dahin gelangt sei, er zeigte zugleich, daß er mit dem Gegenstand ausreichend vertraut, über das was andere bisher in dieser Hinsicht geleistet hatten, hinaus-

*) Gabriel Mouton (geb. 1618 zu Lyon, gest. daselbst 1694) hat sich durch Berechnung der Logarithmen der Sinus und Tangenten der Winkel von 0^0 bis 4^0 für jede Secunde auf 10 Decimalstellen mittelst der Differenzen einen Namen gemacht. Der genaue Titel seiner angeführten Schrift ist: Observationes diametrorum Solis et Lunae apparentium, meridianarumque aliquot altitudinum cum tabula declinationum Solis etc. Lugd. 1670.

gegangen wäre. Leibniz hatte in dem Tableau der Binomialcoefficienten nicht nur wie bisher die Horizontalreihen der Zahlen betrachtet, er hatte für die in den Verticalreihen unter einander stehenden Zahlen das bisher nicht beobachtete Bildungsgesetz erkannt, daß jede Zahl eine Summe zweier Zahlen in der vorhergehenden Horizontalreihe ist (ita enim statim vera genuina eorum (numerorum) natura ac generatio apparet). Leibniz bemerkt ferner, daß er seine Untersuchungen auf unendliche Reihen ausgedehnt habe, und ganz besonders, daß er die unendlichen Reihen von Brüchen, deren Zähler 1 und deren Nenner die Triangular-Pyramidal- u. s. w. Zahlen wären, summiren könne.

Das Zusammentreffen mit dem Mathematiker Pell wurde für Leibniz von der folgenreichsten Bedeutung. Er erfuhr von ihm, was in England auf dem Gebiet der höheren Mathematik veröffentlicht worden war, unter andern in Betreff der Reihen die Leistung Mercator's über die Quadratur der Hyperbel in dessen 1668 erschienenen Schrift: Logarithmotechnia.*) Leibniz nahm diese Schrift mit nach Paris. Von den Leistungen Newton's auf dem Gebiet der höheren Mathematik, die namentlich in der Abhandlung: De Analysi per Aequationes numero terminorum infinitas, niedergelegt sind, erhielt er keine Kenntniß; es ist wohl mit Sicherheit anzunehmen, daß der Mathematiker Collins,**) der darin eingeweiht war und eine Abschrift der Newtonschen Abhandlung besaß, während des Auf-

---

*) Der vollständige Titel dieser Schrift ist: Logarithmotechnia sive Methodus construendi Logarithmos nova, accurata et facilis, scripto antehac communicata Anno Sc. 1667 Nonis Augusti, cui nunc accedit vera Quadratura Hyperbolae et Inventio Summae Logarithmorum. Auctore Nicolao Mercatore, Holsato, e Societate Regia. Londini MDCLXVIII.

**) John Collins (1625—1683) hat sich um die mathematische Literatur dadurch verdient gemacht, daß er den Druck von Schriften der Mathematiker seiner Zeit vermittelte, mehr aber noch dadurch, daß er so der Mittelpunkt von brieflichen Mittheilungen der damaligen Mathematiker, besonders Großbritanniens, wurde, in einer Zeit, wo die Veröffentlichungen der Akademien und Zeitschriften eben im Entstehen waren.

enthaltes Leibnizens in London nicht anwesend war*); jedenfalls würde Oldenburg, der mit Collins näheren Umgang hatte, eine Begegnung beider vermittelt haben. In dem ersten Briefe, den Leibniz von Paris an Oldenburg richtete, wird Newton nur in Betreff seiner optischen Entdeckungen erwähnt.**)

Die Anregung, die Leibniz zum Studium der höheren Mathematik in London erhalten hatte, gewann nach seiner Rückkehr in Paris durch Huygens eine ganz besondere Förderung. Leibniz hat zu jeder Zeit anerkannt und hervorgehoben, wie viel er in seiner mathematischen Bildung dem Umgang mit Huygens verdanke. Er erhielt von ihm ein Exemplar seines eben fertig gewordenen, berühmten Werkes: Horologium oscillatorium***) zum Geschenk, und wurde von ihm in Betreff der Lehre vom Schwerpunkt in der Kürze unterwiesen. Einen größeren Umfang erhielten die wissenschaftlichen Unterhaltungen beider, seit Leibniz aufs eifrigste in das Studium der höheren Mathematik sich vertiefte. Huygens wurde sein Führer und Berather; er empfahl ihm die Schriften des Gregorius a S. Vincentio****) und die Briefe und Abhandlungen, die Pascal unter dem angenommenen Namen Dettonville veröffentlicht hatte.*****) Das erste Ergebniß dieser

---

*) Oldenburg schreibt an Leibniz Londini die 6. April. 1673: Scias itaque primo, me scriptum illud tuum de Interpolationum doctrina deque tuo cum clariss° Pellio circa id argumentum et Moutonum colloquio impertiisse Doctiss° nostro Collinio, similiter e Societate Regia, qui in hac est sententia etc.

**) De Neutonii sententia scribe, quaeso, quid vestri sentiant; aegre certe adducentur eruditi, ut ejus sententiam de differente radiorum refrangibilitate admittant.

***) Horologium oscillatorium sive de Motu pendulorum ad Horologia aptato, demonstrationes Geometricae. Paris. MDCLXXIII. Die Dedication an den König Ludwig XIV ist datirt vom 25. März 1673.

****) Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni, decem libris comprehensum. Antwerp. 1647.

*****) Lettres de A. Dettonville contenant quelques unes de ses Inventions de Geometrie. Sçavoir, La Resolution de tous les Problemes touchant la Roulette qu'il avoit proposez publiquement au mois de Juin 1658. L'Egalité entre les Lignes courbes de toutes sortes de Roulettes et des Lignes Elliptiques. L'Egalité entre les Lignes Spirale et Parabolique demonstrée à la maniere des Anciens. La Dimension

Studien war, nach dem Vorgange Mercator's in Betreff der Hyperbel, daß Leibniz die nach ihm benannte Reihe $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ in inf. fand, die sich zur Einheit verhält wie der Kreis zu dem umschriebenen Quadrat.*) Auf der andern Seite wurde Leibniz von Oldenburg, dem Collins als Berather in mathematischen Fragen zur Seite stand, über die Fortschritte in den mathematischen Disciplinen

---

d'un Solide formé par le moyen d'une Spirale autour d'un Cone. La Dimension et le Centre de gravité des Triangles Cylindriques. La Dimension et le Centre de gravité de l'Escalier. Un Traitté des Trilignes et de leurs Onglets. Un Traitté des Sinus et des Arcs de Cercle. Un Traitté des Solides Circulaires. A Paris M.DC.LIX. In dieser Schrift sind die Abhandlungen Pascal's aus dem Jahre 1658 mit den Zuschriften an Huygens, de Sluze und einen Ungenannten vereinigt.

*) Ueber die Herleitung dieser Reihe verbreitet sich Leibniz ausführlich in der Abhandlung: Historia et origo calculi differentialis. Der Zeitpunkt der Entdeckung dieser Reihe wird annähernd bestimmt durch Huygens' Brief an Leibniz vom 6. November (1674), welcher auch deshalb hier einen Platz verdient, insofern er in Betreff des Streites zwischen Leibniz und Jac. Gregory über die Entdeckung dieser Reihe entscheidend ist.

Huygens an Leibniz.

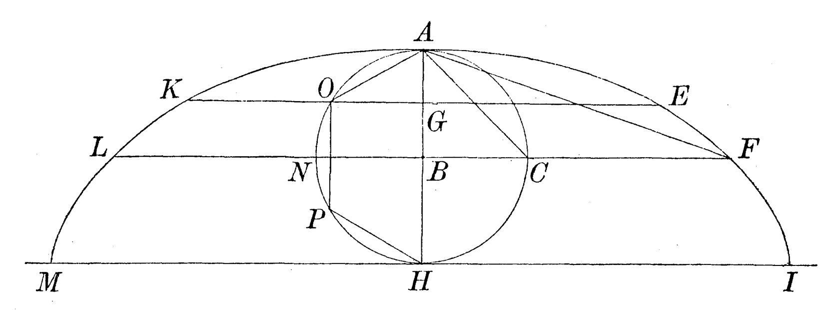
Ce 6. Novembre (1674).

Je vous renvoie, Monsieur. Vostre escrit touchant la Quadrature Arithmetique, que je trouve fort belle et fort heureuse; Et ce n'est pas peu à mon avis d'avoir decouvert dans un Probleme qui a exercé tant d'esprits, une voye nouvelle qui semble donner quelque esperance de parvenir à sa veritable solution. Car le Cercle, suivant vostre invention estant à son quarré circonscrit comme la suite infinie de fractions $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ etc. à l'unité, il ne paroistra pas impossible de donner la somme de cette progression ni par consequent la quadrature du cerle, apres que vous aurez fait voir que vous avez determiné les sommes de plusieurs autres progressions qui semblent de mesme nature. Mais quand mesme l'impossibilité serait insurmontable dans celle dont il s'agit, vous ne laisserez pas d'avoir trouvé une proprieté du cercle tres remarquable, ce qui sera celebre à jamais parmi les geometres. Pour ce qui est de la ligne courbe Anonyme qui sert à Vostre demonstration, j'avois envie de la baptizer, en luy donnant quelque nom composé des noms de deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le cercle et la Cissoïde des anciens. Mais ayant vu du depuis que cette mesme ligne a esté premierement mise en avant par J. Gregorius, je crois qu'il luy faut laisser le droit de la nommer comme il voudra. Il s'en est servi pour demonstrer le rapport qu'il y a entre la mesure de la Cissoïde et celle du cercle, qui est de mon invention, ainsi qu'il paroit par le traité de M. Wallis de Cissoïde, et par ce que le mesme autheur en a dit dans son traité du Mouvement, où la demonstration que j'ay donnée de ce Theoreme est inserée. Laquelle estant supposée, vous pourriès par là abbreger de beaucoup vostre demonstration de la Quadrature Arithmetique. Mais vous ferez en cela comme vous le jugerez à propos. Je vous donne le bon jour etc.

in England unterrichtet; zugleich brachte dieser die neuesten Erscheinungen in der mathematischen Literatur auf dem Festlande zur Sprache, und bat Leibniz um die Beschaffung der Bücher. In Folge dieser freundschaftlichen Beziehungen zwischen Leibniz und Oldenburg, namentlich wohl durch die besondern Bemühungen des letztern, wurde Leibniz zum Mitglied der Royal Society den 9. April 1673 einstimmig gewählt.

Die Auffindung der oben erwähnten Reihe für die Quadratur des Kreises wurde für Leibniz die Veranlassung, seine Studien mehr als bisher geometrischen Problemen zu zuwenden. Zunächst ergab sich ihm ein gemeinsames Theorem für die Kegelschnitte, die einen Mittelpunkt haben: Wenn man von dem Scheitel eines Kegelschnitts aus einen beliebigen Curvenbogen abschneidet, die Endpunkte desselben mit dem Mittelpunkt verbindet, und durch dieselben Endpunkte Tangenten legt, so ist der entstandene Sector einem Rechteck gleich, welches aus der halben großen Axe und einer geraden Linie, durch die unendliche Reihe $t \pm \frac{1}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \pm \frac{1}{7} t^7$ in inf. ausgedrückt, construirt werden kann, wo t das Stück der Tangente des Scheitels bezeichnet, das zwischen dem Scheitel und dem Durchschnittspunkt der Tangente des andern Endpunktes des Curvenbogens liegt, und das Rechteck aus der halben großen und halben kleinen Axe der Einheit gleich gesetzt ist. In Betreff der doppelten Vorzeichen ist zu bemerken, daß das Zeichen + für die Hyperbel, das Zeichen — für den Kreis und die Ellipse gilt. — Ein anderes bemerkenswerthes Theorem fand Leibniz für den Inhalt eines Cycloidensegmentes durch unmittelbare Quadratur, unabhängig von dem Inhalt des erzeugenden Kreises.*) Wird in der Cycloide MKAEI durch den Halbirungspunkt G des senkrechten Radius des erzeugenden Kreises die Linie KE parallel zu der Ebene, auf welcher der erzeugende Kreis rollt, gezogen, so ist,

*) Leibniz an Oldenburg, Paris den 15. Juli 1674.



wie Huygens gefunden hatte, das Cycloidensegment KEAK = dem halben regulären Sechseck AOPH, welches in dem erzeugenden Kreis eingeschrieben ist. Leibniz legte die Parallele LF durch den Mittelpunkt des erzeugenden Kreises und zog die Linie AF; er fand, daß das Cycloidensegment AFEA = △ ABC ist.

Leibniz beschloß die neuen Ergebnisse, die er durch seine Studien auf den Gebieten der Reihen und der Quadraturen gewonnen hatte, in ein Ganzes zusammen zu fassen und zum Gegenstand einer selbstständigen Schrift zu formen. Sie war im Jahre 1675 vollendet und ist unter seinen Manuscripten vorhanden unter dem Titel: De Quadratura Arithmetica Circuli, Ellipseos et Hyperbolae, cujus corollarium est Trigonometria sine Tabulis. Autore G. G. L. L.

In seinen Briefen aus dem Jahre 1674 kommt Leibniz auf die Quadratur des Kreises mittelst der von ihm für die Peripherie gefundenen Reihe wiederholt zurück, und erhebt dieses Theorem als das Vorzüglichste, was bisher von einem Mathematiker geleistet worden ist. Er bemerkt, daß das, was in Betreff der Quadratur des Kreises von Lord Brounker und Wallis aufgestellt wurde, nur annähernd die Peripherie des Kreises ausdrücke; es habe aber noch Niemand eine unendliche Progression in rationalen Zahlen aufgestellt, wie die von ihm gefundene Reihe, deren Summe die Peripherie des Kreises vollständig angebe. Es komme hinzu, daß die von ihm gefundene Reihe auf Hyperbel und Ellipse, überhaupt auf die Kegelschnitte, die einen Mittelpunkt haben, Anwendung finde. Dadurch sieht sich Oldenburg

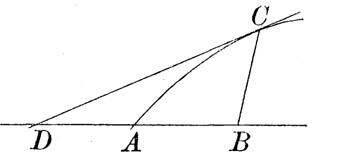
veranlaßt in dem Schreiben vom 8. December 1674 Leibniz mitzutheilen, daß in Betreff der Quadratur von Curven und der Cubatur der von krummen Oberflächen begränzten Körper durch Jacob Gregory und Newton Bedeutendes geleistet worden sei. Auf diese allgemeine Andeutung folgen im Laufe des Jahres 1675 durch Oldenburg, mit Hülfe von Collins, einzelne Angaben in Betreff der Leistungen englischer Mathematiker, namentlich Jac. Gregory's, welcher Reihen für die Größe eines Kreisbogens, für die Tangente des Kreises, für den Inhalt eines Kreissegments und Kreissectors aufgestellt hatte, und über die Leistungen Pell's in Betreff der Behandlung algebraischer Gleichungen. Diese Mittheilungen werden beschlossen, nachdem Leibniz am Schluß des Jahres 1675 in seinem Schreiben vom 28. December die Andeutung über die Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis gemacht hat,*) durch die umfangreichen, sehr ausführlichen Schreiben Collins' und Newton's vom 26. Juli 1676. Beide kamen überein, rücksichtlich der Arbeiten der englischen Mathematiker im letzten Jahrzehnt, so weit sie noch nicht durch den Druck veröffentlicht waren, den französischen Mathematikern gegenüber, eine Übersicht zu geben: Collins, durch dessen Hände die gegenseitigen brieflichen Mittheilungen der englischen Mathematiker gingen und der in dieser Hinsicht gewissermaßen einen Mittelpunkt bildete, war ganz besonders dazu geeignet; er besaß namentlich die Correspondenz Jac. Gregory's, der gegen Ende des Jahres 1675 gestorben war; Newton wollte selbst über seine Arbeiten und Erfindungen Mittheilung machen. Collins bemerkt zunächst in seinem Schreiben, daß auf Grund der Correspondenz Gregory's eine „historia

*) Sed et ad aliud Problema Geometricum, hactenus pene desperatum (Leibniz spricht hier offenbar vom umgekehrten Tangentenproblem) nuper aditum reperi felicem. De quo pluribus loquar, ubi otium erit absolvendi. Haec vero omnia ubi ita in ordinem redegero ut mitti possint, singulatim tibi spondeo. Ex quibus agnoscetis, credo, non tantum soluta a me Problemata, sed et nova methodo (hoc enim ego unice aestimo) detecta esse.

de seriebus“ gegeben werden könne, indem er hinzufügt, daß zur Zeit über Newton's Arbeiten nichts weiter bekannt sei, als was er in dem Schreiben vom 10. December 1672 mitgetheilt hätte, eine Bemerkung, die hinsichtlich des Streites zwischen Leibniz und Newton über die so genannte Erfindung der Differentialrechnung von höchster Wichtigkeit ist.*) Besonders auffallend ist diese Bemerkung, da Collins eine Abschrift von Newton's Abhandlung De Analysi per Aequa-

---

*) Das Schreiben Newton's vom 10. December 1672, das hier erwähnt wird und auf welches in dem Streite zwischen Leibniz und Newton ganz besonders Bezug genommen wird, mag hier eine Stelle finden (Sieh. Commercium epistolicum J. Collins et aliorum de Analysi promota etc. Ausgabe von Biot und Lefort, Paris 1856. S. 83 f.): Ex animo gaudeo D. Barrovii amici nostri reverendi lectiones Mathematicis exteris adeo placuisse, neque parum me juvat intelligere eos [Slusium et Gregorium] in eandem mecum incidisse ducendi Tangentes Methodum. Qualem eam esse conjiciam ex hoc exemplo percipies. Pone C B applicatam ad A B, in quovis angulo dato, terminari ad quamvis Curvam A C, et dicatur A B x et B C y, habitudoque inter x et y exprimatur qualibet aequatione, puta $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = o$, qua ipsa determinatur Curva. Regula ducendi Tangentes haec est; multiplica aequationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y, puta $\underset{0}{x^3} - \underset{1}{2xxy} + \underset{0}{bxx} - \underset{0}{bbx} + \underset{2}{byy} - \underset{3}{y^3}$; ut et juxta dimensiones x, puta $\underset{3}{x^3} - \underset{2}{2xxy} + \underset{2}{bxx} - \underset{1}{bbx} + \underset{0}{byy} - \underset{0}{y^3}$. Prius productum erit Numerator, et posterius divisum per x Denominator Fractionis, quae exprimet longitudinem B D, ad cujus extremitatem D ducenda est Tangens C D: est ergo longitudo $BD = \frac{-2xxy + 2byy - 3y^3}{3xx - 4xy + 2bx - bb}$.



Hoc est unum particulare, vel corollarium potius Methodi generalis, quae extendit se citra molestum ullum calculum non modo ad ducendum Tangentes ad quasvis Curvas sive Geometricas sive Mechanicas, vel quomodocunque rectas lineas aliasve Curvas respicientes; verum etiam ad resolvendum alia abstrusiora Problematum genera de Curvitatibus, Areis, Longitudinibus, Centris Gravitatis Curvarum etc. Neque (quemadmodum Huddenii methodus de Maximis et Minimis) ad solas restringitur aequationes illas, quae quantitatibus surdis sunt immunes.

Hanc methodum intertexui alteri isti, qua Aequationum Exegesin instituo, reducendo eas ad Series infinitas. Memini me ex occasione aliquando narrasse D. Barrovio, edendis Lectionibus suis occupato, instructum me esse hujusmodi methodo Tangentes ducendi: Sed nescio quo diverticulo ab ea ipsi describenda fuerim avocatus.

Slusii Methodum Tangentes ducendi brevi publice prodituram confido: quamprimum advenerit exemplar ejus, ad me transmittere ne grave ducas.

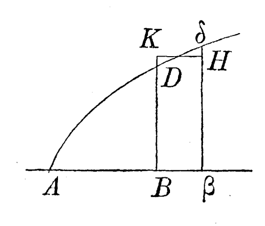
tiones numero terminorum infinitas besaß und diese ganz mit Stillschweigen übergeht. Darauf macht Collins aus den Briefen Gregory's in den Jahren 1671 bis 1675 Mittheilungen über die Bestimmung der Wurzeln von Gleichungen in Reihen ausgedrückt und mit Hülfe von Logarithmen, nachdem die Glieder der Gleichungen zwischen der höchsten und niedrigsten Potenz eliminirt sind. Hierauf folgt eine Übersicht der übrigen Arbeiten Gregory's nach seinen Briefen. Das Schreiben schließt mit einer Darstellung der Leistungen Pell's.

Newton hat unter demselben Datum, 26. Juli 1676, ein Schreiben an Leibniz gerichtet; er hat diesem, da Leibniz einige weitere Aufklärungen wünschte, ein zweites unter dem 24. October desselben Jahres folgen lassen. Beide Schreiben von höchster Wichtigkeit für die Geschichte der Wissenschaft stehen im engsten Zusammenhang und bilden zusammen ein Ganzes. Newton berichtet darin eingehend über den Gang seiner mathematischen Studien. Er begann mit den Resultaten, die Wallis in der Arithmetica infinitorum niedergelegt hat in Betreff der Quadratur der Curven. Wallis hatte für die Curven, die durch die Gleichungen von der Form $y = x^{\frac{m}{n}}$ bestimmt sind, durch Induction gefunden, daß die Quadratur derselben durch den Ausdruck $\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$ dargestellt wird. Newton bewies dieses Theorem allgemein für beliebige Exponenten. Ferner hatte Wallis gefunden, daß, wenn die Ordinate durch eine algebraische Summe ausgedrückt ist, der Flächeninhalt der Curve durch ebenso viele Glieder mit den entsprechenden Vorzeichen bestimmt wird. Zu diesen Theoremen fügte Newton als neues hinzu, daß, wenn in den Bestimmungsgleichungen der Curven Brüche oder Wurzelausdrücke vorkommen, diese in unendliche convergente Reihen zu entwickeln sind, auf deren einzelne Glieder die Vorschriften für die Quadraturen angewendet werden. Hierbei war die Anwendung des sogenannten allgemeinen binomischen Lehrsatzes, den Newton beim Beginn seiner mathematischen Studien

durch Interpolation der Ausdrücke für $(1 - x^2)^0$, $(1 - x^2)^1$, $(1 - x^2)^2$, $(1 - x^2)^3$ . . . . . gefunden hatte, von der größten Wichtigkeit. An zahlreichen Beispielen überzeugte sich Newton von der Anwendbarkeit dieser analytischen Theoreme. Durch die Übertragung derselben auf die Geometrie gewann er mit Hülfe der Vorstellungen Cavalieri's die Grundtheoreme der Fluxionsrechnung, die er in diesen Briefen in Chiffer- und Zeichenschrift verbirgt. Er betrachtete die Fläche einer Curve entstehend durch continuirliche Bewegung der senkrechten Ordinate längs der Abscissenaxe; indem die Ordinate während dieser Bewegung proportional zunimmt, wächst die Abscisse gleichmäßig in Verhältniß der Zeit. Die Zunahme der Ordinate wie der Abscisse wird mit o bezeichnet und Moment genannt. Die daraus entstehende unendlich kleine Zunahme der Fläche der Curve oder das Rechteck aus der Ordinate in die unendlich kleine Zunahme der Abscisse nennt Newton das Moment der Fläche; demnach ist das Moment der Fläche yo.*) Die Fläche ist die Fluente (quantitas

*) In der „Recensio libri", die der zweiten Ausgabe des Commercium epistolicum D. Joannis Collins et aliorum de Analysi promota jussu Societatis Regiae in lucem editum vom Jahre 1722 vorgedruckt ist, und die Newton verfaßt hat, wiederholt er zur Erläuterung der Fluxionsrechnung das Beispiel, das er in der Abhandlung De Analysi per Aequationes numero terminorum infinitas gegeben hat. Es mag hier Platz finden wegen der Bemerkungen, die Newton hinzufügt: Quoque melius intelligas, quo calculationis genere Newtonus usus fuerit Anno 1669, vel ante, cum hoc Analyseos suae Compendium scripsit, ponam hic ejus demonstrationem primae illius Regulae supra memoratae.

Sit Curvae alicujus A D δ Basis $AB = x$, perpendiculariter applicata $BD = y$ et area $ABD = z$, ut prius. Item sit $B\beta = o$, $BK = v$, et Rectangulum $B\beta HK$ (ov) aequale spatio $B\beta\delta D$.



Est ergo $A\beta = x + o$, et $A\delta\beta = z + ov$. His praemissis, ex relatione inter x et z ad arbitrium assumpta quaero y ut sequitur. Pro lubitu sumatur [aequatio] $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} = z$, sive $\frac{4}{9} x^3 = zz$. Tum $x + o\,(A\beta)$ pro x, et $z + ov\,(A\delta\beta)$ pro z substitutis, prodibit $\frac{4}{9}$ in $x^3 + 3xxo + 3xoo + o^3 =$ (ex natura curvae) $z^2 + 2zov + v^2o^2$. Et sublatis $\frac{4}{9} x^3$ et zz aequalibus, reliquisque per o divisis, restabit $\frac{4}{9}$ in $3x^2 + 3xo + o^2 = 2zv + ov^2$. Si jam suppo-

fluens), das Moment der Fläche die Fluxion. — Newton hatte

---

namus B β in infinitum diminui et evanescere, sive o esse nihil, erunt v et y aequales, et termini per o multiplicati evanescent, ideoque restabit $\frac{4}{9} \times 3xx = 2zv$, sive $\frac{2}{3}xx\,(=zy) = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}y$, sive $x^{\frac{1}{2}}\left(=\frac{x^2}{x^{\frac{3}{2}}}\right) = y$. Quare e contra, si $x^{\frac{1}{2}} = y$, erit $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$.

Vel generaliter, si $\frac{n}{m+n} \times ax^{\frac{m+n}{n}} = z$: sive ponendo $\frac{na}{m+n} = c$, et $m+n = p$, si $cx^{\frac{p}{n}} = z$, sive $c^n x^p = z^n$; tum $x + o$ pro x et $z + ov$ sive (quod perinde est, $z + oy$) pro z, substitutis, prodit c^n in $x^p + pox^{p-1}$ etc. $= z^n + noyz^{n-1}$ etc. reliquis nempe [serierum] terminis, qui tandem evanescerent, omissis. Iam sublatis $c^n x^p$ et z^n aequalibus, reliquisque divisis, restat $c^n p x^{p-1} = nyz^{n-1}\left(= \frac{nyz^n}{z} = \frac{nyc^nx^p}{cx^{\frac{p}{n}}}\right)$ sive dividendo per $c^n x^p$, erit $px^{-1} = \frac{ny}{cx^{\frac{p}{n}}}$ sive $pcx^{\frac{p-n}{n}} = ny$; vel restituendo $\frac{na}{m+n}$ pro c et $m+n$ pro p, hoc est, m pro $p-n$, et na pro pc, fiet $ax^{\frac{m}{n}} = y$. Quare e contra si $ax^{\frac{m}{n}} = y$, erit $\frac{n}{m+n}ax^{\frac{m+n}{n}} = z$. Q. E. D.

Eadem operandi ratione, etiam Regula secunda demonstrari potest. Et si quaelibet Aequatio assumatur, Relationem exprimens inter Abscissam et Aream, ordinata inveniri poterit eadem ratione, ut in proximis Analyseos verbis indicatur. Et si illa ordinata in unitatem ducta pro Area novae Curvae ponatur, novae illius Curvae ordinata eadem methodo inveniri potest, atque ita in perpetuum. Haeque ordinatae primam, secundam, tertiam, quartam, sequentesque Fluxiones primae Areae repraesentant.

Haec Newtoniana fuit operandi methodus, eo tempore quo Compendium illud suae Analyseos scripsit: eademque methodo usus est in Libro Quadraturarum, atque in hunc usque diem adhuc utitur.

Hieraus ergiebt sich, daß Newton Brüche und Wurzelausdrücke, durch die der Fortschritt in der Lösung von Problemen der höheren Analysis aufgehalten wurde, durch Entwicklung in unendliche convergente Reihen beseitigte; es geschah dies mit Hülfe des allgemeinen binomischen Lehrsatzes. Rechnungsregeln, sowie irgend welche bestimmte Bezeichnung der gebrauchten Größen fehlen. Daß Newton überhaupt die hohe Wichtigkeit einer zweckmäßigen Bezeichnung für die Anwendbarkeit der Theorie verkannte und auf die Einführung eines durchgreifenden Algorithmus kein Gewicht legte, geht aus der folgenden Stelle in derselben „Recensio" hervor: Ut Methodi Differentialis primum se auctorem venditaret Leibnitius, insimulavit Newtonum litera o more vulgari pro dato Incremento τοῦ x primo fuisse usum, qui mos Differentialis Methodi utilitates tollit: post edita vero Principia mutavisse o in ẋ, substituendo ẋ pro dx. Hoc vero nunquam quis probaverit, Newtonum unquam o in ẋ mutavisse, vel usurpasse ẋ pro dx, vel omisisse uti litera o. Newtonus in Analysi anno 1669, vel antea scripta, et in Libro de Quadraturis, et in Principiis Philosophiae usus est litera o; atque adhuc utitur, eodem

erkannt, daß die Entwickelung in unendliche convergente Reihen ein vorzügliches Mittel sei, um die Probleme der Quadratur, Cubatur, Rectification u. s. w. der höheren Mathematik zu behandeln und zu lösen; es lag nahe, dasselbe Verfahren auf die Ermittelung der Wurzeln von höheren Gleichungen anzuwenden. In seinem ersten Schreiben giebt er die Auflösung von zwei Gleichungen dritten Grades, einer numerischen und einer mit allgemeinen Coefficienten; dem Wunsche Leibnizens entsprechend fügt er in dem zweiten Schreiben nähere Erläuterungen über sein Verfahren hinzu. Außerdem zeigt Newton noch in diesem zweiten Schreiben, wie die Reihen zur Berechnung von Logarithmen und zur Berechnung einer Tafel der Kreisfunctionen angewandt werden können. — Der Inhalt beider Schreiben geht wesentlich nicht über das hinaus, was Newton bereits in der Abhandlung De Analysi per Aequationes numero terminorum infinitas zur Sprache gebracht hat.

Das erste Schreiben Newton's erhielt Leibniz noch während

---

plane quo prius sensu. In libro de Quadraturis usus est litera o una cum symbolo $\dot{x}$; ideoque non posuit unum loco alterius. Symbola ista o et $\dot{x}$ pro rebus diversi generis posita sunt. Prius est momentum, alterum Fluxio est sive velocitas, ut supra est explicatum. Cum litera x pro quantitate uniformiter fluente ponitur, symbolum $\dot{x}$ est unitas, et litera o (seu $1\dot{x}o$) momentum, atque $\dot{x}o$ et dx idem ambo Momentum significant. Literae punctatae numquam indicant Momenta, nisi cum mnltiplicantur per momentum o vel expressum vel subintellectum quo infinite parvae evadant; et tum Rectangula pro momentis ponuntur.

Newtonus non in formis Symbolorum suam Methodum constituit, neque se alligat ad ullam unam speciem Symbolornm pro fluentibus et fluxionibus. Ubi areas Curvarum pro fluentibus ponit, saepe ponit ordinatas pro fluxionibus, et fluxiones denotat per Symbola ordinatarum, ut in Analysi sua fecit. Ubi Lineas pro fluentibus ponit, quaevis symbola ponit pro velocitatibus Punctorum Lineas describentium, hoc est, pro fluxionibus primis; et quaevis alia symbola pro incremento earum velocitatum, hoc est, pro fluxionibus secundis, ut saepe fit in Principiis Philosophiae. Ubi autem literas x, y, z pro fluentibus ponit, earum fluxiones denotat vel per alias literas ut p, q, r, vel per easdem literas alia forma positas ut X, Y, Z, vel $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, punctatas, vel per quasvis Lineas ut DE, FG, HJ, consideratas tamquam earum exponentes. Atque hoc quidem manifestum est ex Libro ejus de Quadraturis, ubi in prima Propositione fluxiones indicat per literas punctatas, in ultima propositione per ordinatas Curvarum, et in Introductione per alia Symbola, dum Methodum explicat illustratque per Exempla.

seines Aufenthalts in Paris; seine Antwort ist datirt den 27. August 1676. Leibniz bemerkt, daß seine Weise, die Wurzeln der Gleichungen zu finden, und seine Quadraturmethode nicht durch unendliche Reihen geschehe, wie es von Newton bewirkt werde; seine Quadraturmethode bestehe darin, daß die Gleichung der zu quadrirenden Curve in eine andere transformirt werde, so daß die höchste Potenz der Ordinate nicht über den zweiten oder dritten Grad hinausgeht; alsdann könne durch Wurzelausziehung oder durch einfache Division nach dem Vorgang Mercator's die Quadratur bewirkt werden. Leibniz zerlegt die zu quadrirende Curve auf zweifache Weise, durch parallele senkrechte Ordinaten in Paralleltrapeze und durch Linien von einem Punkt aus in Dreiecke, so daß an die Stelle eines jeden Trapezes ein gleiches Dreieck tritt, und mit Hülfe dieser Dreiecke construirt er eine zweite Curve, die der ersten an Flächeninhalt gleich ist, und die nach Mercators's Verfahren behandelt werden kann. Diese Transformation Leibnizens ist offenbar dasselbe, was gegenwärtig in Betreff der Integration durch Einführung einer neuen Veränderlichen geschieht. Zugleich zeigt Leibniz, daß er auch auf dem Gebiet der Reihen zu bemerkenswerthen Resultaten gelangt sei, namentlich wie mit der von ihm gefundenen Reihe für die Quadratur des Kreises die Summirung neuer Reihen in Verbindung steht. Hervorzuheben ist noch die Bemerkung gegen den Schluß des Schreibens: Quod dicere videmini, plerasque difficultates (exceptis Problematibus Diophanteis) ad Series Infinitas reduci, id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira et implexa, ut neque ab Aequationibus pendeant neque ex Quadraturis. Qualia sunt (ex multis aliis) Problemata methodi Tangentium inversae, quae etiam Cartesius in potestate non esse fassus est. In tomo 3. Epistolarum una habetur ad Beaunium, in qua, ad propositas a Beaunio, Curvas quasdam invenire conatur, quarum una est Ludus Naturae, ut intervallum inter Tangentem ad (axem) directricem usque productam et

ordinatim applicatam ex Curva ad directricem sit semper idem, recta scilicet constans. Hanc Curvam nec Cartesius nec Beaunius nec quisquam alius (quod sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, coepi quaerere, statim certa Analysi solvi. Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum, quamquam maximi momenti esse sciam. Durch die Lösung dieses sogenannten Beaune'schen Problems ging Leibniz zuerst über die Leistungen der Cartesianischen Geometrie hinaus.*) — Der Hinweis auf die Mechanik, mit dem Leibniz sein Schreiben schließt, ist insofern von Bedeutung, als daraus hervorgeht, daß Leibniz auch während seines Pariser Aufenthalts die Vervollkommnung der Lehren der Mechanik, besonders der Dynamik, nicht aus den Augen verlor.

Die Abschrift von dem zweiten Schreiben Newton's erhielt Leibniz im folgenden Jahre 1677, nachdem er längst seinen Wohnsitz in Hannover genommen hatte (sieh. das Schreiben Collins' an Newton, datirt Lond. 5 Martii 167$\frac{6}{7}$).

Leibniz verließ Paris im Oktober 1676, um nach Deutschland zurückzukehren. Er ging zunächst nach London, wo er eine Woche verweilte. In dieser Zeit machte er die persönliche Bekanntschaft von Collins, der ihm Einsicht in seine Sammlung von Correspondenzen mit Mathematikern gestattete. Leibniz fand darunter eine Abschrift der Abhandlung Newton's: De Analysi per Aequationes numero terminorum infinitas, von deren Inhalt er hier zuerst Kenntniß erhielt.**) Von England wandte sich Leibniz nach Holland, das damals einen Brennpunkt wissenschaftlicher Bestrebungen bildete. Er hatte im November 1676 Unterredungen mit Spinoza im Haag

*) Unter den Leibnizischen Manuscripten ist die betreffende Untersuchung vorhanden; sie folgt zu dem Schreiben Leibnizens als Beilage.

**) Vergl. meine Abhandlung: Leibniz in London, n den Monatsberichten der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1890.

(sieh. Leib. Philosophische Schrift. Bd. I. S. 117. Bd. VII. S. 251), mit dem Mathematiker Hudde in Amsterdam; er besuchte Leeuwenhoek in Delft.

Die Unterredung Leibnizens mit Hudde wurde in Betreff der Mathematik von der folgenreichsten Bedeutung. Sie bewegte sich über die Probleme, die damals an der Tagesordnung waren, über die Quadratur von Curven, über die Auflösung der Gleichungen, über die Methoden, die Tangenten an Curven und die Maxima und Minima zu bestimmen. Von den Tangentenmethoden war die de Sluze's als die neueste in den Philosoph. Transact. der Royal Society des Jahres 1673 in zwei Briefen an Oldenburg veröffentlicht. Hudde bewies Leibniz, daß die seinige allgemeiner und umfassender war, als die de Sluze's. Hierdurch wurde Leibniz veranlaßt, zu prüfen in wie weit durch seinen „calculus differentialis" ein Instrument zur Lösung der Probleme über die Bestimmung der Tangenten und der Maxima und Minima der Curven gegeben sei. Er überzeugte sich, daß seine Tangentenmethode mittelst des „calculus differentialis" alle bisher bekannten an Allgemeinheit und Leichtigkeit der Anwendung überträfe. Es war nicht mehr nöthig, aus den Gleichungen die Quotienten der Unbekannten und die irrationalen Ausdrücke zu beseitigen, was nur durch sehr umbequeme und umständliche Rechnungen möglich war. Offenbar war dieser Umstand für Leibniz mit entscheidend, daß er später lediglich die Differentialrechnung bekannt machte, da er etwas Vollkommnes und alles Bisherige Übertreffendes veröffentlichen konnte.

Unter dem lebendigen Eindruck der neu gewonnenen Resultate auf dem Gebiet der höheren Mathematik ist Leibnizens Antwort (21. Junii 1677) auf das zweite Schreiben Newton's abgefaßt. Er setzt ohne Rückhalt die Tangentenmethode mittelst des calculus differentialis aus einander und hebt ihre Vorzüge vor allen andern

hervor, indem er hinzufügt: Arbitror quae celare voluit Newtonus de tangentibus ducendis, ab his non abludere. — Mehr zurückhaltend und vorsichtiger ist Leibniz in Betreff des umgekehrten Tangentenproblems d. i. seines calculus summatorius, später calculus integralis genannt. Einerseits hatte er in dieser Hinsicht etwas ganz Neues gefunden, das er bei weiten noch nicht vollständig ausgebeutet hatte, anderseits wollte er noch nicht mit dem Algorithmus dieses Calculs hervortreten, wodurch er eben die Lösung der Probleme bewerkstelligte. Newton hatte in seinem zweiten Schreiben geäußert, daß er die Probleme der umgekehrten Tangentenmethode zu lösen vermöchte; in Bezug darauf bemerkt Leibniz, daß dieses, wie er glaube, durch unendliche Reihen geschehe. Sed a me, fährt er fort, ita desiderantur, ut curvae exhibeantur geometrice quatenus id fieri potest, suppositis (minimum) quadraturis. Exempli causa, cycloidem deprehendit Hugenius sui ipsius evolutione describi; difficile autem fuisset, credo, solvere hoc problema: invenire curvam, quae sui ipsius evolutione describitur. Nec refert quod istius curvae descriptio quadraturam circuli supponit. Et hoc problema etiam ex eorum est numero, quae voco Methodi Tangentium inversae. In diesem Schreiben, so wie in dem folgenden, beweist Leibniz, wie weit er in der Integralrechnung vorgeschritten war. Wenn auch die Quadratur der meisten bis dahin behandelten Curven auf die des Kreises oder der Hyperbel zurückgeführt werden könnte, so müßte nach seinem Dafürhalten die Quadratur derjenigen Curven, für die dies nicht möglich sei, auf andere höhere Curven zurückgehen (restat ut alias quasdam figuras primarias altiores constituamus, ad quarum reducantur caeterae omnes, quando id fieri potest). — Außerdem bringt Leibniz noch viele andere Probleme zur Sprache: ob es möglich sei, bei der Auflösung der Gleichungen durch Reihen zu entscheiden, daß die Wurzeln rational oder irrational

seien, ferner Auflösung von Gleichungen, in welchen die Unbekannten als Exponenten vorkommen u. s. w.

Noch in demselben Jahre, im September 1677, starb Oldenburg. In ihm verlor Leibniz den treuesten Freund, der ihn auf jede Weise zu fördern suchte, der ihm unermüdlich über alle neuen wissenschaftlichen Erscheinungen in England Mittheilung machte. Seine Nachfolger als Secretäre der Royal Society, Robert Hook und Nehemias Grew, scheinen nicht ein gleiches Interesse für Leibniz gehabt zu haben. Dasselbe gilt auch von Collins, der immer nur durch Oldenburg mit Leibniz in Verbindung stand. So war Leibniz wesentlich auf Berichte von Deutschen, die damals in England lebten, angewiesen.

Bevor Leibniz nach langer Unterbrechung die Correspondenz mit Newton wieder anknüpfte, hatte er die Grundzüge der Differential- und Integralrechnung in den Act. Erudit. Lips. veröffentlicht; die Richtigkeit und Anwendbarkeit der neuen Rechnung hatten sich durch die Lösungen der vorgelegten Probleme, der isochronischen Curve und der Kettenlinie, glänzend bewährt. Nicht nur die hervorragendsten Mathematiker des Festlandes bedienten sich beifällig der neuen Methode, auch in England fand sie Aufnahme; der Schotte Joh. Craige rühmte in seiner Schrift: Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi, Lond. 1685, die Differentialrechnung als die vorzüglichste Methode zur Bestimmung der Tangenten an Curven. Über Newton's Fluxionsrechnung wurde zuerst durch Wallis einiges in die Öffentlichkeit gebracht. In seiner Algebra, die er 1693 lateinisch herausgab, erwähnte er Bruchstücke aus den beiden Briefen, die Newton an Oldenburg zur Mittheilung an Leibniz im Jahre 1676 richtete; auf Anregung eines Freundes, der von den gegenseitigen Mittheilungen Newton's und Leibnizens Kunde hatte,*) veröffentlichte er in dem zweiten Bande seine Werke,

*) Diese Persönlichkeit ist höchst wahrscheinlich Fatio de Duillier, der mit Huygens in Holland verkehrte und in dieser Zeit mit ihm in Correspondenz stand. Aus seinen

der vor dem ersten im Jahre 1693 erschien, die beiden Briefe Newton's vollständig zugleich mit einem von Newton verfaßten Unterricht über die Fluxionsrechnung und ihre Bezeichnung. Dies wurde ohnstreitig die Veranlassung, daß Leibniz nach 17 jähriger Unterbrechung die Correspondenz mit Newton und zugleich mit Wallis begann. In seinem Schreiben bemerkt Leibniz, nachdem er die Verdienste Newton's um die höhere Mathematik gebührend hervorgehoben, daß auch er durch seine Methode, durch die Differential- und Integralrechnung, nicht Unerhebliches auf dem Gebiet der transcendenten Geometrie geleistet habe. Er erwartet von Newton, daß er seine Aufmerksamkeit auf die Vervollkommnung der Integralrechnung richten werde. Gegenüber den bewunderungswerthen Leistungen Newton's in Betreff der Mechanik der Himmelskörper hält er seine Hypothese von der Existenz eines Äthers (fluidi ambientis), durch welchen die Bewegungen der Himmelskörper bewirkt oder geleitet werden, aufrecht. Zugleich bringt

---

Briefen, die Uylenbroek (Christ. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae, Hag. Comit. MDCCC XXXIII. Tom. II. p. 99—131) veröffentlicht hat, geht hervor, daß Fatio bereits 1691 Newton als den ersten Erfinder der Differentialrechnung bezeichnete. Er schreibt (à Londres ce $\frac{18}{28}$ Dec. 1691): Il me paroit par tout ce que j'ai pu voir jusques ici, en quoi je comprens des papiers écrits depuis bien des années, que Mr. Newton est sans difficulté le premier auteur du calculus differentialis, et qu'il le connaissait autant ou plus parfaitement que Mr. Leibniz ne le connait encore, avantque ce dernier n'en eut eu seulement la pensée, qui même ne lui est venue, à ce qu'il semble, qu'à l'occasion de ce que Mr. Newton lui écrivit sur ce sujet. — In dem folgenden Briefe (à Londres ce $\frac{5}{15}$ Fevr. 1692) fügt Fatio hinzu: Les lettres, que Mr. Newton écrivit à Mr. Leibnitz, il y a 15 ou 16 ans, parlent bien plus positivement que l'endroit que je vous ai cité des Principes, qui neanmois est assez clair; surtout quand ces lettres lui servent d'explication. Je ne doute pas qu'elles ne fissent quelque peine à Mr. Leibnitz, si on les imprimoit, puisque ce n'est que bien longtemps aprez qu'il a donné au public les regles de son calculus differentialis, et cela sans rendre à Mr. Newton la justice qu'il lui devoit. Et la maniere dont il s'en est acquitté est si éloignée de ce que Mr. Newton a là-dessus, que je ne puis m'empecher en comparant ces choses ensemble, de sentir bien fortement leur difference, comme d'un original achevé et d'une copie estropiée et trez imparfaite. — Man sieht hieraus, daß der Angriff Fatio's auf Leibniz, der 1699 öffentlich erfolgte, bereits seit längerer Zeit vorbereitet war.

Leibniz mehrere Fragen aus der Optik als Gegenstand für die weitere Correspondenz zur Sprache. Erst nach Ablauf eines Halbjahrs antwortet Newton. Er erwähnt, daß die Briefe, die er durch die Vermittelung Oldenburg's an Leibniz gerichtet habe, von Wallis zugleich mit einem von ihm verfaßten kurzen Unterricht über die Fluxionsrechnung herausgegeben worden wären. Um Leibnizens Wünschen entgegen zu kommen, giebt er ein Verfahren, wie die Quadratur der Curven auf die Rectification zurückgeführt werden kann. Alle übrigen Fragen in Betreff der Bewegung der Himmelskörper und über die Theorie des Lichtes, die Leibniz zur Discussion angeregt hatte, weist Newton zurück; die von ihm aufgestellten Gesetze seien ausreichend begründet, auch vermeide er alles was zu wissenschaftlichen Streitfragen Veranlassung geben könnte. Damit ist jede Fortsetzung der Correspondenz abgebrochen.

Noch einmal kam Leibniz in seinen letzten Lebensjahren mit Newton in Berührung. Es geschah dies in Folge des so genannten Streites über den ersten Erfinder der Differentialrechnung. Um den Zusammenhang klar zu legen, ist hier über die Entstehung und den Fortgang dieses Streites in Kürze zu berichten. Es sind bereits die betreffenden Äußerungen Fatio de Duillier's in seiner Correspondenz mit Huygens erwähnt worden; er war mit Newton bekannt und hatte offenbar Einsicht in dessen Manuscripte gehabt. Diese Äußerungen wiederholte er öffentlich in der kleinen Schrift: Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex, cui addita est investigatio geometrica Solidi rotundi in quod minima fiat resistentia, Lond. 1699. Newtonum — so lauten seine Worte — primum ac pluribus annis vetustissimum hujus Calculi Inventorem ipsa rerum evidentia coactus agnosco: a quo utrum quicquam mutuatus sit Leibnitius, secundus ejus Inventor, malo eorum quam meum sit judicium, quibus visae fuerint Newtoni Literae aliique ejusdem

manuscripti Codices. Neque modestioris Newtoni silentium aut prona Leibnitii sedulitas inventionem hujus Calculi sibi passim tribuentis ullis imponet, qui ea pertractarint quae ipse evolvi Instrumenta. Leibniz wies den Angriff Fatio's zurück in der Abhandlung: G. G. Leibnitii Responsio ad Dn. Nic. Fatii Duillerii imputationes. Accessit nova Artis Analyticae promotio specimine indicata, dum designatione per numeros assumtitios loco literarum, Algebra ex Combinatoria Arte lucem capit (Act. Erudit. Lips. an. 1700). Die Entgegnung Fatio's wurde von den Herausgebern der Act. Erudit. Lips. nicht aufgenommen. Der Streit brach von neuem aus im Jahre 1705. Ein Jahr vorher war Newton's Schrift: Optics or, a Treatise on the Reflections, Refractions, Inflections, and Colours of light, London 1704, erschienen, in welcher als Anhang zwei Abhandlungen: Tractatus de quadratura curvarum und Enumeratio linearum tertii ordinis hinzugefügt waren. Eine anonyme Recension darüber enthielten die Act. Erudit. Lips. mens. Januar. 1705; hierin heißt es: Pro differentiis igitur Leibnitianis D. Newtonus adhibet, semperque adhibuit fluxiones, quae sunt quam proxime ut fluentium augmenta, aequalibus temporis particulis quam minimis genita, iisque tum in suis Principiis Naturae mathematicis, tum in aliis postea editis eleganter est usus; quemadmodum et Honoratus Fabrius in sua Synopsi Geometrica motuum progressus Cavallerianae methodo substituit. Diese Behauptungen riefen die Entrüstung der Schüler und Freunde Newton's hervor. Einer von ihnen Keill, Professor der Astronomie in Oxford, erklärte in einer Schrift, die in den Philosophical Transactions des Jahres 1708 abgedruckt ist, daß Newton nach seinen von Wallis herausgegebenen Briefen ohne allen Zweifel der erste Erfinder der Fluxionen sei, und daß dieselbe Rechnungsart, nur mit abgeändertem Namen und Be-

zeichnung von Leibniz in den Act. Erudit. Lips. bekannt gemacht worden wäre. Über diesen äußerst plumpen Angriff beklagte sich Leibniz im Jahre 1711 in einem Briefe an Sloane, den Secretär der Royal Society, zu deren Mitgliedern Keill gehörte, und verlangte, daß die Königliche Societät den letzteren zu einem Widerruf veranlassen sollte. Es wurde beschlossen, daß Keill seine aufgestellten Behauptungen beweisen solle, mit andern Worten, daß er das Prioritätsrecht Newton's vertheidigen solle. Dies geschah in einem Briefe an Sloane im Mai 1711, in welchem Keill wesentlich bei seinen Behauptungen stehen blieb, indem er ausführte, daß Newton in seinen beiden Briefen an Oldenburg Andeutungen gegeben hätte, aus welchen Leibniz die Principien seiner Differentialrechnung gefolgert habe oder doch folgern konnte. Auf dieses längere Schreiben Keill's, das Leibniz durch die Königliche Societät in Abschrift mitgetheilt wurde, forderte dieser, daß Keill durch die Societät zum Schweigen gebracht würde; derselbe habe ohne die Autorität Newton's gehandelt, und sei als ein homo novus und als ein mit den Dingen wenig Bekannter zu betrachten. Da die Societät eines ihrer Mitglieder nicht ungehört zum Schweigen verurtheilen konnte, so sah sie sich veranlaßt, zunächst den Stand des Streites durch eine Commission untersuchen zu lassen. Der Bericht derselben wurde von der Societät einstimmig angenommen, und der Druck derselben beschlossen. Die Commission erklärte am Schluß, daß Newton seine Rechnung vor dem Jahre 1669 gefunden, daß die Differentialrechnung nur dem Namen und der Beziehungsweise nach von der Fluxionsrechnung sich unterscheide, daß es deshalb nur einen Erfinder der neuen Rechnung geben könne, und dieser sei Newton. Der Bericht der Commission erschien zu Anfang des Jahres 1713 unter dem Titel: Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de Analysi promota jussu Societatis Regiae in lucem proditum, und wurde als Geschenk der

Gesellschaft den hervorragendsten Gelehrten Englands und des Continents zugesandt. Leibniz, der sich damals in Wien befand, erhielt die erste Nachricht von dem Erscheinen des Commercium epistolicum durch Joh. Bernoulli, der zugleich erklärte, daß seiner Meinung nach Newton nicht der erste Erfinder der Differentialrechnung sei. Das Schreiben Bernoulli's veröffentlichte Leibniz in einem fliegenden Blatt im Juli 1713. Auch das Journal littéraire, das im Haag erschien, enthielt eine Entgegnung auf das Commerc. epistol., worin ausgeführt wurde, daß Newton erst nach Leibniz im Besitz der Fluxionsrechnung gekommen sei. Behufs einer Antwort darauf wurde Keill von Newton mit den nöthigen Unterlagen versehen; sie erschien im Sommer 1714 ebenfalls im Journal littéraire. So wurde der Streit ein persönlicher zwischen Newton und Leibniz. Nachdem von Chamberlayne im Jahre 1714 vergebens der Versuch gemacht worden war, die beiden berühmtesten Männer des Jahrhunderts zu versöhnen, wurde der Streit zwischen Newton und Leibniz, als der Churfürst Georg Ludwig von Hannover als Georg I im September 1714 den Thron von England bestiegen hatte, eine Angelegenheit des Hofes, insbesondere dadurch, daß der Abbate Conti*) den König dafür zu interessiren wußte.

*) Der Abbate Conti — sein eigentlicher Name war Antonio Schinella — stammte aus einer vornehmen Familie Venedigs. 1677 zu Padua geboren, zeigte er frühzeitig ein großes Interesse für die Wissenschaften. Er trat 1699 in Venedig in die Congregation des Oratoriums; 1708 trat er aus, um auf der Universität zu Padua Philosophie und Mathematik zu studiren. Er schrieb daselbst eine Dissertation über die Zeugung gegen den Arzt Nigrisoli in Ferrara (sie ist abgedruckt im Giornale de' Letterati d'Italia, vol. XII art. 10 des Jahres 1712), durch welche er sich in der gelehrten Welt bekannt machte. In Padua hörte Conti die mathematischen Vorträge des Mathematikers Hermann (Hermann an Leibniz Patavii d. 27. October 1712), mit welchem er auch später in Correspondenz blieb. Auch stand er mit Christ. Wolf über die Philosophie Leibnizens in Briefwechsel. Um die Mitte des Jahres 1714 befand sich Conti in Paris, wo er in dem Kreise von Gelehrten, zu denen Remond gehörte, verkehrte (Remond an Leibniz 5. May 1714, Leibniz' Philosophische Schriften Bd. VII S. 616). Im Sommer 1715 ging Conti mit dem Mathematiker Remond de Montmort nach England. Er suchte die Bekanntschaft Newton's, der ihn zu seinem Vertrauten machte. (Conti an Remond ce 30 d'Aoust: Je vais trois fois la semaine chez Mr. Newton, et quand je reviendrai à Paris, je vous assure que vous serez content de lui et de moi. —

Conti hatte noch von Paris aus im Sommer 1715 ein Schreiben an Leibniz gerichtet, das dieser durch Remond im Oktober desselben Jahres zugesandt erhielt. Seiner Antwort fügte Leibniz ein umfangreiches Postscriptum hinzu, das sich auf seinen Streit mit Newton bezog und zur weitern Verbreitung bestimmt war. Mit einem gewissen überlegenen Selbstbewußtsein bemerkt darin Leibniz, namentlich unterstützt durch das Urtheil Joh. Bernoulli's, daß es nicht glücken würde zu beweisen, daß Newton vor ihm die Charakteristik und den Algorithmus der Infinitesimalrechnung gefunden habe. Es sei die Lauterkeit seiner Gesinnung (candeur) verdächtigt worden durch falsche Auslegungen, aber er werde dadurch zu keiner Erwiderung gereizt werden. Dabei sei man zugleich von der Sache, um die es sich handelt, abgegangen und man habe, anstatt über die Differentialrechnung zu urtheilen, die Reihen erwähnt, worin Newton ohne Zweifel ihm vorausgegangen wäre. Seine Gegner hätten im Commercium epistolicum die Briefe nicht vollständig veröffentlicht, vielmehr nur das, wodurch sie ihre falschen Auslegungen unterstützen könnten. Er bedauere Newton, daß er für Schmeichler zu willfährig gewesen sei, die ihn nur in Zwistigkeiten hätten verwickeln wollen. Auch habe die Königliche Societät in Betreff der Veröffentlichung des Commerc.

Remond an Leibniz 4 Sept. 1715: Mons. l'abbé Conti, qui m'ecrit tres souvent, est charmé de ce pays là; il me paroit que M. Newton n'a rien de caché pour lui). Newton zeigte ihm seine Manuscripte und seine schönen Experimente, und bewirkte, daß er als Mitglied in die Königliche Societät aufgenommen wurde. Conti fand Zutritt zum Königlichen Hofe; der König Georg I ließ sich durch ihn über den Streit zwischen Leibniz und Newton berichten und erhielt so Kenntniß von Leibnizens Schreiben vom 6. December 1715 (Remond an Leibniz ce 15 de Mars 1716: M. l'abbé Conti est tous les jours plus charmé de l'Angleterre et plus amoureux de Mr. Newton. Il a eu l'honneur de souper avec le Roy d'Angleterre et aux propos de table il paroit bien que ce grand Prince a vecu avec Monsieur de Leibniz. Sa Majesté Britannique voulut savoir de lui l'historique de vostre dispute avec Mr. Newton. Je lui ecris sur tout cela, comme je dois, c'est à dire suivant ce qui je dois à la verité et à mon attachement declaré pour vous, car vous devez compter, Monsieur, d'avoir en moi un admirateur tres sincere et un ami tres fidele). 1716 ging Conti über Holland nach Deutschland; er war der tägliche Tischgenosse des Königs Georg, während dieser in Hannover verweilte. 1718 kam er nach Paris zurück. Conti starb zu Padua 1749.

epistol. die wesentlichen Formalitäten nicht erfüllt, indem sie jede Mittheilung an ihn unterlassen hätte, ob er gegen die Commissare derselben etwas einzuwenden habe; daher habe denn auch die Societät nicht definitiv zwischen ihm und Newton entscheiden wollen. Alsdann wendet sich Leibniz sehr ausführlich gegen die kosmisch-physikalischen Vorstellungen Newton's. Wenn auch jeder Körper schwer ist, so müßte doch die Gravitation als eine Eigenschaft, die zu den von den Scholastikern aufgestellten verborgenen Eigenschaften gehört (qualité occulte Scholastique), betrachtet werden. Ebenso wenig ist von Newton und seinen Anhängern das Vorhandensein eines leeren Raumes nachgewiesen. Ferner könne er in Betreff der Dynamik oder der Lehre von den Kräften sein Erstaunen nicht zurückhalten, daß Newton und seine Anhänger meinten, daß Gott die Welt so unvollkommen erschaffen habe, daß, wenn er seine Hand davon abzöge, sie, wie es bei einer Uhr der Fall ist, still stehen würde. Trotz dieser Ausstellungen wird aber von Leibniz Newton das höchste Lob gespendet über die Art und Weise, wie derselbe aus den Phänomenen seine Schlüsse zieht, ohne irgend welche Hypothesen zu machen. Bei seinen Schülern und Anhängern sehe man indeß keine Spur davon. Überhaupt sei für England das goldene Zeitalter der Wissenschaften vorüber; Wren, Flamstead, Newton seien noch der einzige Überrest. Politische und religiöse Streitfragen seien an der Tagesordnung. Gewissermaßen um die Geistesfähigkeiten der englischen Mathematiker zu prüfen und ihnen den Puls zu fühlen, legte Leibniz seinem Schreiben ein Billet bei, in dem er zur Lösung der folgenden Aufgabe aufforderte: Trouver une ligne qui coupe à angles droites toutes les courbes d'une suite determinée d'un même genre.*)

Leibniz' Schreiben wurde in London viel gelesen und machte großes Aufsehen; auch der König Georg nahm Kenntniß davon.

*) In Betreff dieses Problems siehe die Beilage zu dem letzten Schreiben von Leibniz an Conti.

Die Freunde Newton's drangen in ihn darauf zu antworten; aber er war dazu nicht zu bewegen. Er schrieb erst seine Erwiderung, als der König sich erkundigte, ob die Antwort Newton's abgegangen wäre. In diesem Schreiben vom 26. Februar $17\frac{15}{16}$ weist Newton die von Leibniz aufgestellten Behauptungen als unbewiesen zurück. Es sei an ihm die Beschuldigungen als wahr zu beweisen, sonst sei er als ein Verläumder zu betrachten. Leibniz sei der angreifende Theil, es liege ihm ob, die Anklage zu rechtfertigen. In einem längeren an Conti gerichteten Schreiben tritt Leibniz zuerst der Beschuldigung entgegen, als habe er den Streit begonnen. Die angeführte Stelle in den Act. Erudit. Lips. an. 1705: Pro differentiis Leibnitianis D. Newtonus adhibet semperque adhibuit Fluxiones, sei durch die Hinzunahme der folgenden Worte: quemadmodum et Honoratus Fabri in sua Synopsi geometrica motuum progressus Cavallerianae methodo substituit, böswillig gedeutet, als würde darin Newton des Plagiats beschuldigt. Alsdann wendet sich Leibniz zu dem Commercium epistolicum, von dessen Erscheinen, da er in Wien war, er erst später Kenntniß erhielt. Ein ihm befreundeter ausgezeichneter Mathematiker habe in einem Flugblatte seine Rechte wahrgenommen, worüber Newton sich nicht beklagen könnte. In Betreff des Commercium epistolicum bemerkt Leibniz, daß der Inhalt desselben sich ganz entfernt von dem Punkte, um welchen es sich handelt, von der Erfindung der Differentialrechnung; es ist vielmehr darin von den Reihen die Rede. Um in dieser Hinsicht den Veröffentlichungen in dem Commercium epistolicum entgegenzutreten, müßte er ein Werk von eben solchem Umfange herstellen, in welchem er die Briefe aus der frühesten Zeit seiner Studien veröffentlichte, die zum Theil verloren gegangen, zum Theil unter seinen Papieren vergraben lägen und die er nicht hervorsuchen könnte. Er habe sich beim Durchlesen des Commercium epistolicum überzeugt,

daß es im Interesse Newton's und zu seinem Nachtheil redigirt sei; er habe darin so viele Zeichen von Böswilligkeit und Chicane bemerkt, daß er mit Leuten, die von dergleichen Gebrauch machten, in eine weitere Discussion sich nicht einlassen wollte. In einem großen Theil des Schreibens zeigt Leibniz den Gang seiner Studien in der Mathematik, und weist die Angriffe zurück, die in Betreff seiner Erfindungen erhoben werden. Zu Leibniz' Schreiben hat Newton Bemerkungen gemacht, aus welchen besonders das hervorzuheben ist, was er über die Erfindung der Fluxionen und über die Zeit der Entstehung derselben berichtet. Newton versichert, daß er die Methoden der Reihen und der Fluxionen im Jahre 1665 gefunden und im folgenden Jahre weiter ausgebildet habe. Aus einem Manuscript, welches vom 13. November 1665 datirt ist, führt er die Behandlung des Problems an, zu einer gegebenen Gleichung die Fluxionsgleichung zu suchen, worin die directe Methode der Fluxionen enthalten sei, und bemerkt, daß dieselbe Behandlung auch auf die Bestimmung der Tangenten und der Krümmung der Curven angewandt sei. In einer kleinen Abhandlung, die im November 1666 geschrieben ist, habe er die Methode so weit vervollkommnet, daß sie auf Brüche und transcendente Größen anwendbar war. Am Schluß derselben habe er das Verfahren, wie aus der Fluxion die Fluente zu finden sei, so weit er es damals in seiner Gewalt hatte, hinzugefügt. Newton zeigt, daß er bei der Abfassung dieser Abhandlung im Stande war, aus einer Fluxionsgleichung die der Fluenten herzuleiten, jedoch nur für Glieder, die ganze algebraische Functionen enthielten; von den Gliedern, in welchen Brüche vorkommen, schreibt er zur Bezeichnung des Integrals das Zeichen □; er bemerkt auch, daß er sich zuweilen (sometimes) der punktirten Buchstaben zur Bezeichnung der Fluxionen bedient habe. Newton fügt hinzu, daß er diese kleine Abhandlung im Jahre 1671 weiter ausgeführt habe, wie er in dem Schreiben

an Leibniz vom 24. October 1676 erwähnt. Sie beginnt mit der Entwicklung endlicher Größen in convergente Reihen und mit der Lösung der beiden Probleme: 1. Relatione Quantitatum fluentium inter se data, Fluxionum relationem determinare; 2. Exposita aequatione Fluxiones Quantitatum involvente, invenire relationem Quantitatum inter se. Newton setzt hinzu, daß er durch die Methode der Reihen und durch die Methode der Fluxionen seine Analysis so allgemein gemacht habe, daß sie fast auf alle Arten von Problemen anwendbar war. Auffallend ist, daß Newton hier von irgend einem Algorithmus der Fluxionen keinen Gebrauch macht.

I.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London (Letterbook IV, 51—53.)

Ignosce quod ignotus scribo ad non ignotum; cui enim Reg. Societatem non ignoranti ignotus esse possis? Et quem Societas latere possit, qui aliqua verae Eruditionis cura ducitur, verae, inquam, quae paulatim vestris potissimum auspiciis a criticorum ambulacris in arcem naturae se recipit. Est, fateor, gens gente in accipiendis his igniculis languidior; sed scis, alium aliis constantius semel haustos tenere. Nostris certe non desunt experimenta praeclara, sed, prout nunc est Reip. status, pro cujusque promptitudine aut invidia recondita vel aperta, quod in Societates coitum non est, nec ita facile inter tot in una Rep. Respublicas coiri potest.

Me quidem, cujus alioquin potissima opera, instituto vitae meae congrua in jurisprudentia ad eas rationes prope demonstratorias revocanda, quae Philosopho utcunque severo satisfacere possint, consumitur, a natura exactius pervestiganda non pauca alia prohibuerunt: videor tamen mihi nonnulla observasse, quae fortasse conferre poterunt aliquid ad accensum a vobis verae Philosophiae lumen. Nam de veris Motus rationibus Elementa quaedam condidi, ex solis terminorum definitionibus Geometrica methodo demonstrata, in quibus causam connexionis, flexionis duritiaeve in corporibus, hactenus quod sciam a nullo explicatam aperuisse mihi videor, atque illud etiam ostendisse, Regulas illas, quas de motu incomparabiles viri Hugenius Wrennusque constituerunt, non primas, non absolutas, non liquidas esse, sed per accidens, ob certum globi Terraqu-aërei statum, evenire (non minus quam gravitatem); non axiomata, non theoremata demonstrabilia, sed experientias, phaenomena, observationes, at felices, at praeclaras (ultra quas hactenus nemo pro-

cesserit) esse; in medio tamen quiescente, vel aliter moto, alia omnia eventura. Nam et separatas meditationes habeo, quibus ex unica quadam hypothesi certi motus universalis in globo nostro Terraqu-aëreo (quem et Copernicus et Tycho admittere possit) omnium motuum, quos in corporibus miramur, insueta hactenus claritate reddi ratio potest Gravitatis, Levitatis, Paradoxorum omnium hydrostaticorum, Mechanicorum, motus projectorum, Reflexionum, Refractionum; sed et, quod mireris, trium chymicorum quae vocant principiorum, a confusione vulgari ad accuratas definitiones reductorum, omniumque solutionum, reactionum, praecipitationum, idque non atomis quibusdam, non ramentis, non abstractis, sed familiari quadam et pene mechanica ratione. Edidi etiam ante quadriennium dissertatiunculam de Arte Combinatoria, in qua nova non pauca, quaedam etiam forte profutura, observata sunt, sed quod per aetatem adolescentiam vix ingressam, tunc illaboratior fuerit edita, resumere aliquando cogito. Caeteroquin apud nos avide expectatur, quid eruditi, et Vos inprimis, de Hugeniano Longitudinum, ope Penduli, Invento sentiant, cujus mentio in Ephemeridibus Gallicanis; satisne vobis perfectum videatur; tum quae fuerit ratio quive exitus tentaminis Gallici de dulcescentia aquae marinae procuranda. A Cl^mo^. Hezenthalero*) habeo, quae de perfecta quadam ad usum Philosophiae lingua condenda celeberrimus vester Wilkinsius deliberet. Idem significavit, Jungii Phoronomica lucem quam merentur, vobis obstetricantibus visura. Quod linguam universalem attinet, scio, Virum aliquem Illustrem sumptuosis itineribus plerarumque orbis linguarum radices collegisse et comparasse, condendae linguae matricis causa. Sed et Athanasius Kircherus mihi scripsit, Ferdinandi III Caesaris auspiciis multum ea in re a se, sed nondum pleno successu laboratum compluraque eo in negotio observata a se in turrim Babel mox edendam translata esse. Sed nolo Te a negotiis immortalis vestrae Societatis, cui nihil decedere generis humani interest, diutius avocare. Vale faveque etc.

Moguntiae**)
$\frac{15}{22}$ Julii 1670.

---

*) Hesenthaler (1621—1681) Professor der Politik und Beredsamkeit an der Universität in Tübingen.

**) Die vor mir liegende Abschrift ist datirt: Aug. 23. 1670. Ich halte dies Datum schon seiner Wortstellung nach für unrichtig.

II.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Obtinere a me non potui, Vir consultissime, ut Literas tuas $\frac{15}{23}$ Julii novissimi Moguntia ad me datas silentio praeterirem. Spirant quippe humanitatem non vulgarem; quin et eximiam in provehenda re Philosophica voluntatem testantur. Hujusmodi nova non leviter eos afficiunt juvantque, qui in votis omnino habent, ut omnium gentium viri sagaces et industrii velint studia et exercitia sua ad augendam ornandamque solidam et feracem Philosophiam consociare. Anglia nostra eo imprimis annititur; molitur idem Gallia et ipsa Italia: nec Germaniam opinamur post principia latere. Tu, Vir amplissime, insigniorem pro aetate tua in rebus physicis tum affectum tum progressum significas, eaque de veris Motus Rationibus epistola tua subinnuis, quae Salivam mihi et aliis movent, unicam illam tuam, de qua loqueris, certi Motus universalis in Globo nostro Terraqu-aëreo Hypothesin cognoscendi, ex qua scil. omnium quos in corporibus est deprehendere motuum ratio, insueta hactenus claritate, reddatur. Virum sane Philosophum Te praestabis, si tanti momenti negotium confeceris, remque feceris Societati Regiae gratissimam, si Hypothesis illius Summam et rationes exponere non graveris. Idem jam fecit de suis Motus Regulis Hugenius, aliis ipsum in eodem argumento explicando imitantibus; quorum nomina aeque ac meletemata, cedro digna, numquam intermorituram in Soc. Regiae Archivis, suum cuique tribuere summopere satagentibus, perennitatem consequuntur: Quod idem Tuis eveniet meditationibus et inventis, si quidem in iis edisserendis et communicandis cordatum et facilem Te mihi praebueris.

Quam de arte Combinatoria Dissertationem edidisse Te scribis, ea ad oras nostras necdum pervenit. Eam tanto magis videre opto, quod in ea Te nova non pauca, quaedam etiam profutura observasse subindicas. Quae hactenus de Arte illa varii scripserunt, vanam potius loquendi de variis amplitudinem, quam judiciose disserendi et nova solida ac profutura excogitandi rationem docuerunt.

Societas nostra in consectandis perpetim Experimentis laborat, unde Sylva suo tempore confertissima succrescet, amplissimam Naturae Historiam complectens, solido et feraci Physices Systemati condendo

posteritati forte suffecturam. Quidam ejus Socii de variis varia nuper in lucem emiserunt. Nosti jam, quae Dn. Boylius per aliquot annos feliciter edidit, quorum postrema sunt de Formarum et Qualitatum origine; de Argumento illo, Num detur absoluta sive perfecta Quies in corporibus etiam solidissimis? De Qualitatibus Systematicis sive Cosmicis: de Suspicionibus Cosmicis: De regionum subterranearum juxta ac submarinarum Temperie: deque maris Fundo: quibus accessit Ejusdem Introductio in Historiam de Qualitatibus particularibus. Insuper Dn. Wallisius imprimi nuper curavit duas partes priores Mechanicae sive Tractatus sui Geometrici de Motu, in quarum prima de Motu praemittit Generalia, agitque de Gravium descensu et Motuum Declivitate, speciatim vero de Libra doctrinam tradit: in secunda vero de Centro Gravitatis ejusque Calculo in figuris quam plurimis Curvi-lineis atque ex his oriundis Solidis et Superficiebus Curvis. Tertiam et ultimam partem habebimus, quam primum per Praeli difficultates licebit. At haec Dn. Barrovius, priori haud impar Author, Lectiones edidit tum Opticas tum Geometricas, a subacti judicii Lectoribus magni aestimatas. — In Anatomicis prodiere Dr. Lowerus de Motu Cordis et Sanguinis, ubi Experimenta istius generis egregia inseruntur: nec non Dr. Thrustoni de Respirationis Usu primario diatriba.

Non ita pridem ad manus meas ex Germania pervenerunt chartae quaedam impressae, quarum titulus: Inventum novum Artis et Naturae Connubium, in copulatione Levitatis cum Gravitate, per Artificium Syphonis, Machinae Aquaticae et Anthliae exhibitum a Georg. Christoph. Wernero, Memmingensi, excusum Augustae A. 1670. Ait Author, Machinam hanc non modo in minori, sed et majori forma descriptam, in aedibus ipsius ad quorumvis conditionis hominum servitia prostare. Scire percuperem, num dicta Machina per Germaniam longe lateque innotuerit et a viris harum rerum callentioribus laudem impetraverit. Multum me tibi devinxeris, Vir spectatissime, si Memmingae, ubi inventi Author degit, vel Augustae Vindelicorum, ubi excusus est Libellus, rei et successus veritatem sollicite inquiras, meque de re tota et de ipsius imprimis artificii ratione perfecte edoceas.

Hugenianum Longitudinis, Penduli beneficio, Inventum adhuc in suspenso est. Existimant nonnulli, duo adhuc istius Automati complemento deesse; unum est, quod necdum perpetuo retineatur in situ perpendiculari; alterum, quod multum incommodi ab irregulari Motu aëris ingeratur. Spes tamen est, remedium, defectibus hisce curandis aptum, non adeo esse difficile inventu, quum degit inter nos Vir quidam Mathematicus, qui actu se invenisse remedium illud affirmat, cumque opportunum fuerit, se propalaturum pollicetur. Haec sunt,

quae Tuis regerenda hac vice suppetebant. Tu interim, Vir doctissime, rem philosophicam ornare et augere perge.

Dabam Londini d. 10 Augusti 1670.

P. S. Literas tuas Dn. Hobbio inscriptas rus, ubi nunc degit, transmisi.*) Si quid responsi dederit, sine mora ad te curabitur.

III.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London (Letter-book, IV, 85—91).

Meditationes meas de primis abstractisque Motus rationibus conceperam superiore anno Sualbaci in ipso acidularum usu, cum Clarissimus Mauritius,**) Juris Consultus Chiloniensis, Vir varie eruditus, ostendisset mihi in Transactionibus philosoph. quarum aliquas secum habebat, ingeniosissimorum Virorum, Hugenii Wrennique, cogitata de rationibus motuum. Ea cum primum vidi, dixi, mihi ea Phaenomena vera videri, sed primas abstractasque Motuum rationes longe alias necessario esse; Phaenomena autem haec sane admiratione digna, si modo accurata experientia comprobata sunt, oriri ex statu Mundi; in vacuo, aut medio quiescente, omnia longe alia esse; prorsus ut gravitas motusque in gravibus acceleratio, non innata corporum vi, sed externis insensibilibusque causis contingunt. Continuo igitur sumto calamo, et scribendi impetu simul, coepi exarare, quae dudum ea de re conceperam; demonstrationibus figurisque illustrandi spatium non fuit. Bidui triduive spatio elaborata monstravi Mauritio; is cum esse sibi vobiscum usum literarum diceret, missurum se vobis pollicetur. Resumo, expolio, atque inde ei mitto; accepit, sed mox extinctae conjugis domestico infortunio afflictus, rem, opinor, ex animo dimisit, certe vobis, ut video, non misit. Cum vero supersit mihi exemplum, ex Nundinis Francofurtensibus, si

---

*) Den Brief Leibnizens an Hobbes sieh. Leibnizens Philosoph. Schriften, Bd. I. S. 82 ff.

**) Erich Mauritius (1631—1691) Rechtsgelehrter, seit 1665 Professor an der Universität in Kiel, später Beisitzer des Reichskammergerichts in Wetzlar.

qua occasio suppetit, ad vos mittam. Summa interim huc redit: Longe alias esse Motus veras Regulas, quam apparent. Nam pleraque moveri insensibiliter, quae quiescere videntur; pleraque quae videntur unum corpus, non esse nisi congeriem plurium; sensus nostros nunquam mendaces, plerumque tamen dissimulatores esse: Corporis vere quiescentis nullam resistentiam ac reactionem esse posse; imo nullam Massam, quantumcunque magnam, plane quiescentem esse re vera unum ens unumve corpus, sed constitutam in statu, ut sic dicam, materiae primae levissimo cuicunque rei impulsu disjici posse. Non esse consentaneum primis motuum regulis, ut absolute anguli incidentiae et reflexionis sint aequales; alias longe ejus rei causas subesse; multa alia id genus Theoremata in Phaenomenorum potius numero habenda, quorum de principiis causisque ita apparendi inquirendum sit; tantum abest ut ipsa sint pro principiis agnoscenda. Sed ut ad rem propius accedam: in ratione eorum, quae apparent ex liquidissimis notionibus corporis, Magnitudine, figura et mobilitate, reddenda, nihil me torsit magis quam partium in toto, aut plurium totorum inter se cohaesio, cujus species sunt durities, mollities, tenacitas, flexitas, fragilitas, fricabilitas, pleraequae aliae tactus qualitates, quas vulgo secundas vocant. Agnoscebam facile, necessariam esse aliquam in rebus cohaesionem ad Oeconomiam rerum; sed unde ea fieret, exputare mecum non poteram. Plerique Philosophi tanti momenti rem ne tetigerunt quidem; ipse Cartesius cum varia corpuscula et ex eorum collisu ramenta facta supponit, non reddit rationem cur ista corpuscula consistant, nec ad quemlibet impulsum divellantur. Breviter, qui fit, quod manus meas ad quemlibet conatum a corpore avelli non potest? cur ventus nobis capita non aufert instar pileorum? cur lapis in terram projectus non eam totam aquae instar ad centrum usque perforat? Ridicula haec quaesitu sunt, sed difficilia explicatu. Plebs nos insanos putaret, si talia quaerentes audiret, et quaerenda sunt tamen. Nec densitas ad rationem resistentiae reddendam sufficit. Cum enim densitas vulgo definiatur, multum materiae in parvo spatio: quiescentis autem nulla sit actio (omnis enim actio corporis est motus) quid poterit summa densitas massae quiescentis ad perforationem impediendam. Gassendus videtur vidisse difficultatem; igitur ut atomos suas connecteret, hamos atque uncos commentus est; sed ubi jam ipsarum atomorum, ipsorum hamorum consistentia et durieties explicanda est, confugiendum est ipsi ad voluntatem Creatoris, perpetuo igitur ad continendas atomos miraculo opus est. Cartesius qui nihil insecabile admittit, sed gradus quosdam duritiei et tenacitatis in rebus statuit, causam tamen, quod ego quidem sciam, reddit nullam. Ipse Hobbius consistentiam seu cohaesionem in rebus velut quiddam ἄῤῥητον

assumpsit; unde pag. 240. edit. Londinensis Elementorum de corpore statuit, fluidum durumque aeque esse homogenea atque ipsum vacuum: Et pag. 271. definit durum, ac recte quidem, quod sit corpus, cujus pars moveri non potest sensibiliter nisi moto toto, et addit, ex molli fieri durum tali partium subtili motu, ut partes simul omnes impingenti resistant, sed qualis sit ille motus, neque ipse, neque quisquam alius hactenus explicuit.

Nihil attinet recensere, quae ego hujus rei explicandae causa sim commentus: ad extremum visus mihi sum in rationem quandam facilem et universalem incidisse. Nimirum rectissime Aristoteles contigua definit, quorum termini sunt simul, et continua quorum termini sunt unum. Quorum igitur termini unum sunt, ea connexa ac sibi cohaerentia sunt, quamdiu perdurat terminorum unitas. Sed quomodo effici potest, ut duorum corporum termini sint unum, et quomodo rursus ex uno eoque indivisibili (termini enim rerum indivisibiles sunt) possunt fieri duo, ad res tum connectendas tum dissolvendas? Haec pendent ex subtilissima contemplatione de natura puncti seu indivisibilium, ex qua pleraque miracula in rebus naturalibus oriuntur. Statuo igitur: quaecunque ita moventur ut unum in alterius locum subire conetur, ea durante conatu inter se cohaerent. Conatus enim, rectissime observante Hobbio, est initium motus, seu id in motu, quod in linea punctum. Si igitur unum conatur intrare in locum alterius, alterumque (ne detur penetratio dimensionum) ex eo expellere, sequitur ut primo momento temporis jam fit in primo puncto loci, quem intrat, extremo puncto suo ingressum; sed eodem primo momento alterum expellendum nondum est egressum; duo igitur puncta seu extremitates corporis, expellentis et impulsi, se penetrant (datur enim punctorum, non corporum, penetratio) et proinde unum sunt. Admirabilis profecto est natura punctorum; quanquam enim punctum non sit divisibile in partes positas extra partes, est tamen divisibile in partes antea non positas extra partes, seu in partes antea se penetrantes. Angulus enim nihil aliud est, quam puncti sectio, et doctrina de Angulis non est alia quam doctrina de quantitatibus puncti: sed, ut in viam redeam, si quod totum ita moveatur, ut pars una alteram expellat loco suo et in eum subeat, eo ipso cohaerebunt eae partes, non absolute quidem, sed dum ingruat fortior motus. Finge columnam moveri linea recta in longitudinem, cohaerebunt sibi partes ejus in longitudinem, sed neque in latitudinem neque in profunditatem. Unde si quid ingruat vel occurrat fortiore motu secundum longitudinem, id secare poterit columnam secundum longitudinem in duas partes, et abripere secum qnam tangit, reliquam praetervehi sinet. At si quid ingruet in latitudinem vel profunditatem,

id si debiliore motu ingruet, simul abripietur, motu tamen totius imminuto; sin aequali, faciet cessare connexionem columnae, et utrnmque quiescet reductum in arenam sine calce (corpora enim quiescentia nihil aliud sunt quam mera puncta sine unione, sine lineis, sine superficiebus nisi spatii cui insunt); sin fortiore, non avellet partem columnae quam quiescenti abstulisset, differentia celeritatum, sed auferet totum, unde reliquum columnae non perget (ut prius, cum in longitudinem divideretur), sed sequetur. Obscuriuscula haec sunt nec nisi figuris illustrabilia; certissima tamen, et si quis rem attente expendat, necessaria. Nec possibilis est alia ratio solida connexionis in rebus, nisi entibus incorporalibus evocatis perpetuoque extra ordinem concursu alligatis. Caeterum ex his, primo aspectu parvis, multa ac magna deduci queunt. Primum enim demonstrare possum, dari aliquod spatium vacuum corporibus; deinde, dari tempus vacuum motibus, seu ut clarius loquar, impossibile esse ut omnia sint plena; impossibile item, ut datus aliquis motus rectus sit semper generatus ab alio motu in omnem retro aeternitatem, nec posse mundum, ut nunc est, entibus incorporalibus carere aut caruisse; quae una propositio, concessa etiam possibilitate processus in infinitum (cujus impugnatione potissimum pugnari vulgo pro DEO solet) a me, ut spero, clare demonstrata nulli Euclideae certitudine cedet, et ubi primum se detexit, majore me gaudio imbuit, quam si quadraturam circuli aut perennem motum invenissem. Conabor aliquando me distincte explicare, ac demonstrationis de tanta re, a qua felicitas generis humani pendet, judicem constituere R. Societatem. Tempus est ad eam rem accedam, quam Tu, Vir Amplissime, potissimum a me postulare videris, id est, expositionem Hypotheseos, cujus in prioribus literis mentionem feceram, quae ex universali quodam motu in Globo nostro supposito, rationem Phaenomenorum in corporibue plerorumque reddat. Hanc ergo breviter ruditerque sic accipe, et si indigna est oculis vestris, quod vereor, tentamentis hominis imbecillitatem suam fatentis et jussu potissimum Tuo ad hanc audaciam excitati ignosce, eandemque iis veniam a tot magnis viris, in R. Societate congregatis, impetra. Ego mihi hoc saltem assecutus in ea videor, ut, paucis mutatis, sectis plerisque omnibus quadrare possit. Theoriam ipsam de Motus rationibus abstractis majoris facio, non sua, non hypotheseos ei superstructae causa, sed quod me in mentium non existentiam tantum, sed et naturam intimiorem, a corporea distinctam (quod cordatissimi quique et severissimi Philosophorum hactenus desperavere) mira quadam claritate duxit: sed de his alio tempore aut loco.

Hypothesis consistit in circulatione aetheris cum luce seu sole

circa terram, circulationi Terrae contraria, ex qua gravitatem et elaterem, et magnetis verticitatem, et ex his omnes rerum antipathias et sympathias, et solutiones, et praecipitationes, et fermentationes, et reactiones derivo, usque adeo ut credam admirandos omnes et extraordinarios naturae effectus huic aetheris motui deberi; nec jam amplius stupendam esse musculorum arcus, pulveris pyrii, venenorum vim, cum non particularis rei, quam nos agentem credimus, virtute, sed ipsius systematis laborantis nisu actiones tam vehementes exerceantur. Quae res mihi spem fecit, posse rem quandam, aëre exhaustam, aethere distentam, ac proinde aëre aequalis spatii leviorem parari, cujus applicatione in ipsum aërem homines attollantur: de quibus aliisque maximi momenti consequentiis hypotheseos meae, fusius in ipsa dixi.

Hoc ipso momento, quo haec scribo, literas ab amico accipio de Wernero Memmingensi. Is suis ipse manibus machinas ejus contrectavit, expertusque est, tantam in iis vim esse, ut, etsi puer, rotam motricem levissimo negotio circumagat, aliae tamen machinae partes (author vocat die stieffelen) ne a fortissimo quidem viro sisti possint: sed rationem inventi ab authore celari; nunc ab Electore Bavariae evocatum in Swacensibus fodinis ab aquarum importunitate liberandis specimen dare, ex cujus exitu poterit de re liquidius judicari. Ubi plura didicero, perscribam.

Dab. Moguntiae d. 28. Sept. 1670.

IV.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Responsum ad locupletissimas tuas literas, 28 Septemb. ad me datas, invitus plane ad hoc usque tempus ob varia impedimenta distuli. Tu facile indolem provinciae meae dispicies, eoque pronius scripti hujus tarditatem excusabis. Dicere vix possum, quam gestiat animus, dum intelligit, Virum inter Leges et Aulam dispunctum, ista tam recenti aetate, magnorum in Philosophia Nominum, Baconi puta, Gassendi, Cartesii similiumque scripta, non dico perreptasse, sed tam subacto Judicio ut a Te factum, excussisse. Quae de Jure constituendo brevi et

dilucido, infinitis tamen casibus, sola paucarum ac paene simplicium Regularum Combinatione suffecturo, moliris, totum ea sola hominem, quin totos homines quam plures deposcunt. Rem arduam fateor, sed integritati, perspicaciae, solertiae industriaeque mea quidem sententia nequaquam impossibilem. Felicem Tibi tuique geminis in conatu, non utili minus quam laudabili, successum ex animo comprecor, meque posse Tibi cordatos in tanto opere Patronos et hyperaspistas conciliare, in votis quam maxime habeo. Re ferente cum nostris hic loci in Jure Civili Doctoribus de Instituto tuo forte disseram, eorumque opinionem exploratam suo tempore rescribam.

Hac vice in reliqua hujus epistolae parte juvat philosophari quaeque literarum tuarum occasione cogitata subnascuntur, enarrare.

Et primo quidem occurrit Hugenianum de Longitudinibus, Penduli ope inveniendis, conamen. Lutetia Parisiorum nuper accepi cordatos quosdam Viros rerumque Mathematicarum peritos sumptibus publicis tum in Indiam Orientalem tum in Americam brevi navigaturos, Automatis aliquot Hugeniano artificio fabrefactis, instructos, eo plane consilio, ut memorati Penduli in agitatis maribus exactitudinem summa cura explorent, fidamque Regi suo de successu narrationem afferant.

Ille qui hic Londini incommodis illis quae hac in re etiamnum superesse censet, mederi satagit, est Doctissimus Mercator: Promisit ille Automatum, Longitudini deprehendendae idoneum quod 1) habet Duos Annulos Cylindricos, qui id perpetuo in situ retineant perpendiculari, eidemque Navis lateri obversum, quocunque demum fluctu ea feratur; unde, cum motus fere tendat a Puppi ad Proram, certiores Penduli vibrationes evadant, quam si in quamvis Navis plagam Machina digrediatur. 2) Quod Aequationem Temporis exhibeat perquam accurate, ipso Automato applicandam. 3) Quod ab irregulari Aëris motu ingreditur incommodi (praecedentia ipsius quidem sententia longe superantis) amoliatur. Tempus docebit eximii hujus iuventi successnm, eosque, qui authoritate et munificentia sua illud juvent, Terrarum Principes excitabit.

Quid Machinae Aquaticae Memmingenses in fodinis Suacensibus ab Aquarum importunitate liberandis praestiterint, scire perquam aveo. Spes est, Serenissimum Bavariae Electorem, quem eo Machinas evocasse scribis, rem pro merito examinaturum, Teque ubi de exitu rei liquido judicatum fuerit, pro humanitate tua perscripturum.

Aegerrime fero, Clarissimum Doct. Mauritium tuas de Primis Abstractisque Motus rationibus Meditationes nobis invidisse. Solatur interim, quod generose adeo candideque aliud nobis Exemplum polliceris. Eousque de Summa illa, mihi jam transmissa, judicium suspendere nobis fas fuerit, cum multo commodius rectiusque de re tota ex integro Scripto,

quam ex compendio pronuntiari possit. Interim quae de natura Punctorum eorumque Penetratione, inque partes ante non positas extra partes, seu in partes ante se penetrantes Divisibilitate subtiliter disseris, majorem lucem firmiusque quo consistant talum postulare videntur.

Jungas, obsecro, Hypothesin integram, quae ex universali quodam Motu, in Globo nostro supposito, plerorumque in corporibus Phaenomenum rationem reddit. Nec ea nos celes, quae ex ipsa de Abstractis Motus Rationibus Theoria duxisse Te in Mentium non Existentiam tantum, sed et intimiorem a corporea distinctam Naturam asseris. Gratissima haec nobis futura sunt, et summo, mihi crede, candore excipienda.

Visa tibi sine dubio fuere Elementa Physica Francisci Wilhelmi Baronis de Nuland, qui Cartesianorum Principiorum falsitatem se ostendisse, ipsiusque errores ac paralogismos (sic vocat Author) ad oculum demonstrasse arbitratur. In hoc libello cum Motus statuatur unicum productorum Corporum Organon, ejusdem Natura et Leges investigantur, quas cum Te vidisse et examinasse credam, hic commemorare supersedeo.

De caetero, Societas Regia consectandis Experimentis pro viribus incumbit. Socii quidam ejus Tractatulos quosdam Physicos nuper edidere. Nobilissimi Domini Boylii Origo Formarum et Qualitatum, juxta Philosophiam Corpuscularem Experimentis et Considerationibus illustrata, Latine nunc exstat, Oxoniae impressa et propediem in Belgiam magno Exemplarium numero transvehenda. Idem Author Anglice non ita dudum emisit Dissertationes quasdam de Qualitatibus Cosmicis, deque Regionum Subterranearum et Submarinarum Temperie, nec non Maris Fundo; ad haec, Diatribas aliquas Experimentales de miranda Aëris etiam citra Calorem Expansione deque Elasticitatis ejusdem Duratione: Quae omnia sine dubio Viris cordatis et sagacibus acceptissima erunt.

Quam cupis Josephi Glanvilli de Scientiarum et Artium incremento Historiam, lubens transmittam; sed Amicum exspectem oportet, qui oras vestras commigret, sibique hujus aliorumque quorundam libellorum fasciculum imponi sinat. — Transactiones, quas vocamus, Philosophicas, hinc a Te postulatas, forte non mittam, cum eas audiam Hamburgi sermone Latino nunc imprimi; unde commodius Tibi comparare poteris. Consilium edendae hoc loco Bibliothecae Philosophicae me latet: Si quid tamen ea de re deinceps rescivero, perscribam; nec qui Catalogi librorum recentiores apud nos exstant, fasciculo dicto adjungere omittam.

Finem hic facerem, nisi ad Epistolae tuae calcem, de Motus perpetui procurandi ratione perquam facili, a Te inventa, nonnulla innueres, quae tantillum me remorantur. Ais, Te rei demonstrationem stupentibus Viris magnis expedivisse, animosque sumpsisse, specimen

in machinula edendi, atque ubi res successerit, vadum publicum tentandi, dummodo intelligas, esse qui rem ex vero aestiment.

Facile, puto, credes me in Anglia peregrinum, sine palpo et assentatione de Anglis pronuntiaturum. Sunt inter eos viri complures, subacto in rebus Mathematicis et Mechanicis judicio praepollentes, quorum de Iuvento isto tuo sententiam ut exquiras, priusquam id evulges ejusve Authorem te scribas, omnino et amice suaserim. Si consilium allubescat meque hac in re parario opus fuerit, provinciam non detrecto, omnemque, quae virum bonum decet, candorem spondeo. Vale, Vir egregie, et me Tibi devinctissimum ama.

Dabam Londini die 8. Dec. 1670.

Si quo responso me digneris, literas tuas, quas tabellario committis, hunc in modum inscribas quaeso:

A Monsieur

Mons. Grubendol

à

Londres.

Nihil praeterea; multo tutius literae sic inscriptae et per tabellarium missae, ad manus meas perveniunt, quam si meum ipsius nomen adhibeatur. Interim si quis amico huc profecturo literas vel fasciculos pro me tradiderit, eo casu proprio meo nomine utendum fuerit.

V.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London (Letter-book, IV, 234—8).

Literas tuas responsorias humanissimas fructuosissimasque accepi dudum; sed cum replicationi meae addere Hypothesin, quam brevissime delineatam, consilium esset, adeoqne typis excudendam dedissem, profectiunculis variis inopinatisque interrumpere operas coactus sum, expertus in absentia mea, praesertim in argumento ejusmodi, ubi vocibus ab usu communi remotis saepe utendum est, omnia innumerabilibus mendis foedari. Quare cum etiamnum interrumperet denuo, nec ante aliquot

septimanarum exitum finem sperarem, malui Tibi interim dimidiam, quam vides, partem mittere, quam totum differre. Illud vero magnopere rogo, ut excuses audaciam meam inscribendi Schediasmation ejusmodi Societati tot magnis ingenio ac dignitate viris Illustri. Solum, fateor, argumentum tantis lectoribus dignum est; caeteris si agnoscitur, satis rem ad votum cessisse putabo. Concise scripsi, quia intelligentibus. Hypothesin ipsam, credo, attendenti claram facilemque visum iri, fortasse et explicandis phaenomenis omnibus tanto magis suffecturam, quanto erit is, qui quandoque utitur, ingeniosior et in experimentis me versatior. Omnia vel naturae vel artis, ut sic dicam, horologia et machinamenta vel a Gravitate vel ab Elatere pendere, re expensa nemo diffitebitur: utramque, unicum quem explicui motum aetheris circularem, modo supponatur, consecuturam non est difficile cogitatu. Atqui hic est cardo totius contemplationis meae; hunc assecutus, quidquid susceperam obtinuero: Hypothesin scilicet breviorem clarioremque quam quae hactenus extat. Spero tamen, applicationi quoque specialiori aspersa nonnulla non omnino repudianda, ut in verticitate magnetis ab aetheris gyratione derivanda, in frigoris natura exemplo angiportuum declaranda, in Acidorum Alcaliumque et omnino principiorum, quae vocant, Chymicorum reactionibus, fermentationibus, solutionibus; in restitutione ballistae aut chordae tensae; in vibrationibus pendulorum, chodarumque, aliisque nonnullis explicandis. De magnete nonnulla adhuc inquirenda puto, antequam omnium rationem reddere sperem, ac potissimum, verumne sit experimentum Grandamici publicatum in libello, quem titulo demonstratae immmobilitatis terrae edidit. Quanquam enim Demonstratio, quam superstruit, infirma admodum videatur, experimentum tamen ipsum non negligendum est. Nimirum ait Grandamicus: si magnes sphaericus (vulgo terrellam vocant) raticulae e subere vel alicui alteri vasculo innatanti imponatur, ea ratione ut polus ejus Borealis, id est, qui polum terrae borealem sibi relictus spectat, in raticula vergat deorsum, nadir versus, adeoque ad centrum terrae, Australis autem respiciat Zenith, atque ita constituto magnete, et librato, designatur in eo circulus, meridiano loci accurate reperto respondens, eum circulum fore meridianum universalem, ac toto orbe, magnete similiter constituto, meridianum loci, ac proinde plagas mundi sine ulla declinatione monstraturum. Scio, de hac narratione dubitari; ac proinde valde desidero severe examinari, cum plurimum referat ejus veritas falsitasve ad accuratam quandam de Phaenomenis Magneticis Hypothesin, cujus umbram animo concepi, construendam. Mihi accurate experimentum facere, hoc quidem statu negotiolorum meorum impossibile est, cum etiam magnetes satis validi, quales requiri ajunt, mihi desint, et terrellam necesse sit satis exquisite tornari. Vos veritatem nullo

negotio scieritis, praesertim si Petito (quem exquisitissimas terrellas, sed alio fine, ut scilicet gyrationem diurnam terrenae similem, quam Gilbertus magneti ascripserat, tentaret, fabricasse, ex ipsius ad vos literis, Transactionibus insertis, didici) negotium quoque rem examinandi demandetur. Successum rei non contemnendae, si per Te intellexero, magno beneficio me accumulatum credam.

Instructionem de usu pendulorum Hugenianorum in particula Transactionum, ab amico mihi commodata, legi, sed constructio abfuit. Ego vero nosse opto, ex quo principio procedant ista pendula novissimae constructionis, usui marino suffectura, an ex principio gravitatis, ut solent horologia majora, an ex principio Elateris, ut solent minora illa portabilia. Utrumque genus habet suum proprium incommodum primarium. Nam quae a naturali ponderum gravitate moventur, non possunt de loco in locum sine Gravitationis mutatione transferri, ac proinde jactationi marinae non sunt accommodata: contra, Elastica etsi transferri huc illuc tuto possint rarissime tamen sunt accurata, ac vix unquam aequabili motu decurrunt, levissimis etiam ex causis, ut aëris, ut tensionis irregularis inaequalisque, maxime vero temporis tractu variantur; nam vis Elastica lassatur, gravitatio naturalis perseverat. Nihilne certi compertum est de ratione aquae dulcis habendae ex marinis, quam medicus quidam ex Britannia minore Regi Christianissimo proposuisse dicebatur. Idem Keifferus quoque, ut audio, sola distillatione pollicetur. Ephemerides Collegii Naturae Curiosorum quod Medici aliquot Germani inierunt, uti nunc mediocri volumine in specimen anni primi prodiere, ad vos pervenisse non dubito, ac proinde de iis plura scribere supersedeo. De Werneri Hydrotechnicis diu est, quod nihil fando inaudivi; expecto tamen successum, quisquis etiam futurus est, ex amico. Sunt quorum praejudicio non fit magni, sed ego has praedamnationes odi. Ingeniosissimi Gerickii Magdeburgenses Meditationes atque experimenta his nundinis in publico expectamus. Becherus promittit demonstrationem Chymicam, qua ferrum in notabili satis quantitate ex terra, nihil ferri actualis continente, produci, ac metallornm genesis non parum illustrari possit. Quidam Helvetius eruditus rationem, ut intelligo, invenit, oppido facilem et regularem, lentes sectionum Conicarum elaborandi, idque et specimine comprobatum ajunt. Expecto literis proximis de ejus instituto distinctiora. Francisci Wilhelmi lib. Baronis de Nuland Elementa nondum mihi visa sunt. Delineationem brevem abstractae meae de Motu Theoriae adjicio postremis pagellis Hypotheseos vobis dedicatae; inde, opinor, apparebit, Paradoxa mea de motu, et Continuo non ita esse a ratione aliena, ut primo aspectu videntur: Punctum non esse aliquid minimum, et omnium partium expers; esse tamen inextensum seu expers partium

distantium; quin etiam punctum esse puncto majus, ut angulum angulo; Punctum non esse, cujns pars nulla est, nec cujus pars consideratur, sed quod quolibet extenso assignabili minus est, quod est fundamentum methodi Cavalerianae. Sed quid praeoccupo illic clarius dicenda? Credo tamen, vix aliter Labyrintho compositionis continui exiri posse. De Deo ac mente peculiares demonstrationes molior, in quibus nonnulla mirabilia, hactenus indicta, lucem tamen fortasse non vulgarem allatura, dicentur. Interim hic breviter innui, omne corpus esse mentem momentaneam, ac proinde sine conscientia, sensu, recordatione. Si vero in uno corpore possent ultra momentum perseverare duo contrarii conatus simul, omne corpus foret mens vera. Ubicunque autem hoc effectum est, productae sunt mentes, eaeque naturaliter indestructibiles, quia, ut suo loco demonstrabo, duo contrarii conatus in eodem corporis puncto semel ultra momentum compatibiles, in aeternum nullo aliorum corporum allapsu, nulla vi adimi possunt. Haec prima specie exigua, vix credi potest quantum aperiant portam cogitationibus non contemnendis: Quas aliquando accuratius elaboratas demonstrationibus de jure naturali (in quo argumento me pretium operae facturum spero, praesertim cum paucos extare arbitror scriptores ingeniosiores in eo versatos, quos non contulerim, ac proinde rogo, ut si qui, quod non dubito, apud vos scientiam hanc tanti ad omnem vitam momenti excolunt, mihi Tuo beneficio innotescant) cujus magna pars demonstrationibus de Deo ac mente innititur, jungere consilium est. Hypotheseos meae non nisi unum Tibi, ut vides, exemplum ob locorum distantiam mittere possum; cum vero Illustri Societati inscripserim, cum egregios viros, qui in ea sunt, censores, sed placidos optem, fortasse nisi Tibi aliter videtur, potest totum Schediasma meum, quippe non nisi quatuor plagellarum, vel totum simul, vel particulatim Transactionibus inseri, eruditorumque judicia candida placidaque explorari: materiam certe multis fortasse novis cogitationibus praebere poterit. Judicia si per Te rescivero, plurimum accedet tot beneficiis, quibus Tibi me obstrictum sentio.

Si excusabis audaciam apud magnos viros, collegas Tuos; si praeparabis animos eorum homini ignoto et obscuro; si censuris eorum doceri me, perfici cogitata mea feceris, faxo ut intelligas, incidisse Te in hominem beneficii agnoscentem. Reliqua Hypotheseos mox sequentur; sed finiendi tempus est. Vale faveque.

Mogunt. 11. Martii.
st. n. 1671.

VI.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Recte accepi, Vir nobilissime, Hypothesim tuam Physicam, typis Moguntinis editam, et mox prima ferente occasione coram Soc. Regia produxi. Praelecta ipsi fuit honorifica Dedicatio, protinusque nonnullis ejus sociis in mandatis datum, ut libellum istum evolverent et expenderent, suamque de eo sententiam, quam primum fieri commode posset, in coetu publico referrent. Id dum agitur, suadere velim, Vir optime, ut partem alteram quantocyus ad me, tuta occasione, expedire ne graveris, cum intelligam Ego, viros illos, quibus examinis hujus provincia est demandata, vix quicquam de re tota pronunciaturos esse, nisi et tuam de Abstracta Motus Theoria doctrinam, saepe a Te citatam et pluribus positionibus substratam, cognoverint. Interim, quantum colligo, non displicet opera tua iis, qui inspexere, certe mihi perplacet, qui ad multa Te respexisse percipio. Cum posteriora videro scripti hujus, mox Hypothesi tota Transactiones Philosophicas exornare satagam.

Quam primum de Machinae Wernerianae successu certi quid acceperis, nobis quoque impertiri ne graveris. Rationem dulcificandi aquam Marinam invenies impressam No. 67. Transactionum philosophicarum, quantum quidem ejus retegere inventori visum fuit.

Famigeratum illud Grandamici de Terrella Magnetica Experimentum successu carere, satis liquet ex iis, quae ex Dn. Petiti epistola in Transact. phil. Nr. 28. inserta habentur.

Operam dabo, ut cura Martini nostri libros a Te hinc desideratos accipias. Vale et porro Tui studiosissimo fore. Raptim Londini d. 14. April. 1671.

P. S. Ne, quaeso, invideas mihi peculiares illas, quas dicis, de Deo ac mente demonstrationes, circa quas nonnulla innuis, quae me perquam attonitum habent, adeoque stimulant, ut tanto importunius eorum communicationem expetam.

VII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Paucis abhinc diebus per Tabellionem ordinarium de plurimis rebus Philosophicis, nec non de Hypothesi tua Physica ad Te scripsi; imprimis vero ursi, ut partem ejus secundam de Abstractis Motus regulis quantocius, ad majorem totius rei lucem, huc transmittas. Spero literas illas rite Tibi fuisse traditas. Iam quod scribam aliud non suppetit, nisi ut significem, me per Bibliopolam nostratem Martinum, et per Schultzium Hamburgensem, ad Zunnerum Francofurtensem libros a Te desideratos, quos quidem eorum concessu potui transmisisse, nempe:

	lib.sterl.	shil.	d.
Phil. Transact. annorum 68, 69, 70	1 —	0 —	0
Lexicon Bluntii	0 —	4 —	6
Boylius de Rarefactione Aëris	0 —	0 —	6
Boilii Tractatus aliquot de qual. Cosm. etc. .	0 —	1 —	8
Glanvils Plus Ultra	0 —	1 —	6
Mercur. librarius	0 —	1 —	6
Summa	1 —	10 —	8

Persuasissimum habeo, Te curaturum, ut Zunnerus Schultzio de pretio satisfaciat, ut Schultzius deinde possit satisfacere Martino; absque quo si fuerit, difficilis erit imposterum Martinus noster in consimili occasione. Vale et a Tui observatissimo plurimum salve.

Dabam Londini d. 24. April. 1671. Deinceps Schultzius Amplitudini Tuae suppeditabit omnes hujusmodi libros, in Anglia impressos: Noster enim Martinus cum eo rem habet.

VIII.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London (Letterbook, IV, 285—9).

Quoniam his nundinis Francofurtensibus nihil a vobis accepi, vereri incipio, ne quas ego literas prolixas satis per Cursorem publicum ad

Te cum parte Schediasmatis mei novi destinaveram, perierint. Schediasma ipsum Illustri Societati Regiae, ut vides inscriptum est, autore, per Te potissimum, veniam a consessu tantorum Virorum sibi pollicente. Adjunxi aliud, quod Academiae Regiae Parisinae inscripsi. Summa utrique huc redit: Theoria motus Abstracti invictas propemodum compositionis continui difficultates explicat, Geometriam indivisibilium et Arithmeticam infinitorum confirmat; ostendit nihil esse sine partibus in rerum natura; infinitas actu cujuscunque continui partes esse; doctrinam de angulis esse de quantitatibus inextensorum; Motum esse Motu fortiorem, ergo et conatum conatu: conatum autem esse motum per punctum in instanti; punctum ergo puncto majus esse. Si corpus premat corpus, conari, ac proinde incipere in ejus loco esse; ergo incipere uniri, seu penetrare; terminos igitur esse eosdem; ergo corpora se prementia cohaerere; conatus diversos, inter se per minima mixtos, producere novi generis motus; nullam esse cohaesionem quiescentis; omnem potentiam esse a celeritate; omne corpus esse mentem instantaneam; mentem servare conatum amisso motu, corpus non servare: sed mentem ab agendo desistere non posse, mentem propagare se ipsam sine nova creatione; multaque Theoremata admiranda a me demonstrabuntur, non minore claritate Geometrica, quam quae de punctis et conatibus ratiocinari licet: nam quod in corporibus praestant spatia et motus, id in mentibus puncta et conatus. Caeterum hoc loco explicui omnis generis figurarum et motuum originem ex meris rectis; ipsa lentium elaborandarum fundamenta; corporum absolute considerandorum inter se concurrentium eventa saepe paradoxa, quia a Phaenomenis dissentanea; nam alia plane est magnitudo, figura, motus corporis apparens, alia vera. Cum igitur eventa motus apparentis differant a regulis veri, sed insensibilis, seu non apparentis, cogitandum fuit ratione conciliandi, seu de quibusdam motibus veris insensibilibus, qui hos sensibiles saepe tam paradoxos producerent. Id quamdiu omnes naturae sinus nondum excussimus, praestari non nisi per Hypothesin potest, quae quanto clarior, simplicior, brevior, concinnior, phaenomenis quae hactenus novimus potissimis difficillimisque solvendis sufficientior, tanto veritati propior habenda est. Hypothesis autem mea in summa huc redit: suppono solem simul gyrare circa suum centrum, et radiare extra se; ita radiatione apprehendet, gyratione circumaget totum quem vocant magnum orbem suum, ex aethere et globis in eo disseminatis, planetis nimirum et tellure, constantem. Cur autem globi illi ab aethere diversi distinctique? quia separato motu circa proprium centrum suum circumferuntur; atque in specie terra nostra, dum gyratione sua particulari opponit se aetheri, circa solis centrum cum ipso gyrato, efficit ut ex duobus his

motibus solis radiantis aetherem moventis recto, et telluris obnitentis circulari velut in officina vitriaria, simplicissimo artificialium genere, bullae quaedam seu vasa subtilia fiant, velut fundamenta specierum et corporum particularium. Reliqua pars aetheris, quae libera mansit, gyrabitur cum luce circa Tellurem motu, ut conjicere licet, fortissimo; tellurem enim secum abripere non potest, quin illa separatum sibi motum retineat. Hic statim tum vim Elasticam, tum Gravitatem efficit: Vim Elasticam, quia si quid crassi consistentisque aetheri occurrat, quod in tantam subtilitatem divisum non est, quanta est aetheris gyrantis, id motui aetheris obsistit, quia ab eo abripi eadem celeritate non potest: necesse est ergo, vel disjiciatur in similem aethereae tenuitatem, motui aptam, vel dejiciatur in locum ubi motus tam fortis ac proinde tanta tenuitate opus non est, id est, prope centrum: a disjectione Vis elastica, a dejectione gravitas: ab his duabus pleraque corporum phaenomena. Nam omnes reactiones, fermentationes solutionesque et praecipitationes ferme reduci possunt ad reactionem, quae est inter acidum et alcali, haec vero pendet a Vi Elastica. Est enim Alcali instar sclopeti ventanei aere onerati; quorum ex vitro constantium acervi, si violenter ad rupturam usque commisceantur, quis ejaculante uno, altero sorbente, exoriturus sit tumultus, facile cogitatu est: idem proportione, tumultu non nisi effectibus suis sensibili, in reactionibus omnibus contingere cogitemus. Hic positis omnia de principiorum chemicorum numero litigia cessandi, etiam methodi medendi stabiliendae iniri aliquando ratio poterit; contraria enim contrariis substantia similibus gradu curanda sunt: Alcalia scilicet per acida, et contra, sed subtilitate proportionata; unde specificae medicamentorum vires. Haec satis, opinor, harmonica aliis non paucis congruentiis confirmantur. Quid enim memorabilius, quam rationem directionis magneticae ad polos manifestissimam hinc reddi posse, quod hactenus, quantum scio, nemo praestitit. Nam librata, et potissimum magnetica, si se quomodocunque vel directe vel oblique in longitudinem seu inter orientem occidentemque collocarent, torrenti aetheris ab Oriente in Occidentem moti se opponerent; quod ne fiat, collocant se tandem post multas Variationes in latitudinem inter meridiem et septentrionem, seu versus polos; quibus positis fortasse ad declinationis magneticae causam aliquando perveniri potest. Ex eodem principio aetheris circulati motus marium et ventorum, leges Refractionis et Reflexionis, pendulorum synchronismos multaque alia naturae phaenomena deduxi, quanta vix ex hypothesi tam simplice quisquam. Quae alia his connexa in re naturali, mechanica et civili molior, alias fusius dicam. Nunc, Vir Amplissime, Te vehementer rogo, ut efficias, hoc quicquid est hominis ignoti et peregrini et multis aliis morosioribus studiis

ultra solitum distracti, a tantis viris quantis inscriptum est, boni saltem consuli.

Non nisi exemplum mitto, quia mittendi ratio alia quam per cursorem ordinarium non fuit. Valde vellem igitur, ut quia tam exiguum est, apud vos pro commodiore distributione recuderetur, aut fortasse Transactionibus, si quidem commode fieri potest, ad aliarum Epistolarum dissertationumque instar connecteretur; quod vero potissimum peto, hoc est, ut judicia, monita, animadversiones, supplementa, emendationes, stricturas egregiorum virorum scripto scilicet, et tanti videtur, ab unoquoque, pro re nata, comprehensas mihi resciscere liceat: Inprimis oro, ut Wardi, Boilaei, Wrenni, Wallisii, Wilkinsii, Willisii, Loweri, Collinsii, Mercatoris, Hookii, aliorum magnorum Virorum sententiae ad me Tuo beneficio perveniant; poterit fortasse rudior adhuc doctrina poliri exactius, et sicubi maxime laborare videbitur, demonstrationum robore firmius emuniri. Caeterum Doctissimi Wilkinsii Characterem Universalem beneficio Amplissimi Viri Guilielmi Curtii nuper legi; Tabulae perplacent: vellem res, quae describi nisi pictura non possunt, ut sunt varia animalium, plantarum, instrumentorum genera, figuris adjectis exhibuisset. Utinam esset qui in Latinum traduceret, quanquam nemo posset rectius Autore; dummodo rerum non aliter declarabilium figurae nonnullarumque vocum ignotiorum explicationes adjicerentur.

Quaesivi literis nuperis, verane sint, quae in itinerario narrat Monconisius de pulvere tam mirandae compositionis, ut integras naves destruere possit, quem habeat Drebelii gener Küflerus; item quid de ejus fornace pisterio; de registro, se sponte sua ad debitum caloris gradum demittente; de aquae marinae distillatione ibidem asseruntur. Quaesivi etiam, quis eventus fuerit praedictionis circa Declinationes Magneticas, autore, ni fallor, Bondio, quam in vestris Transactionibus legi. Quid judicatis de Experimento Magnetico P. Grandamici*) qui ait, Terrellam polo impositam et ita in subere libratam certum quendam Meridianum ubique locorum polo seu Meridiano loci sine declinatione ulla obvertere: Item, an veram putetis inclinationem magneticam Gilberti et Kircheri, qua acus elevationem poli monstret. Haec duo, illud inprimis, valde nosse vellem ad Hypotheses meas Magneticas perficiendas, neminique rectius quam Vobis explorata puto. Nihilne novi circa Tubos Opticos inventum? an cum fructu perfecta Machina Wrenniana pro vitris Sectionum Conicarum? Ottius quidam, natione Hel-

*) Jacques Grandami (Grandamicus) geb. 1588 gest. 1672, Jesuit, Lehrer der Theologie und Philosophie in verschiedenen Ordenscollegien in Frankreich. Die von ihm herausgegebene Schrift, auf welche Leibniz Bezug nimmt, ist: Nova demonstratio immobilitatis terrae petita ex virtute magnetica. La Flèche 1645.

vetius, juvenis doctus, ait machinam facilem sectionibus conicis exhibendis se reperisse, cujus meminit in dissertatione sua de Visu. Scribitur mihi, in Helvetia, Tiguri, ni fallor, Stollium quendam, virum eruditum, sudorem scintillantem nonnunquam (certo anni tempore, de quo specialiora expecto) indubie excutere. Similes extant observationes apud Borellum, et alios. Becherus, Medicus Germanus, asserit, invenisse se rationem ex solo limo communi, adhibito saepeque abstracto et cohibito oleo lini, faciendi ferrum artificiale, per omnia simile naturali, nullo prius ferri in limo vel lino vestigio. De Wernero, inventi Hydraulici Autore, diu est quod nihil audivi; expecto responsum Augusta. Vale faveque etc.

Francofurti 29. Aprilis
st. vet. 1671.

IX.

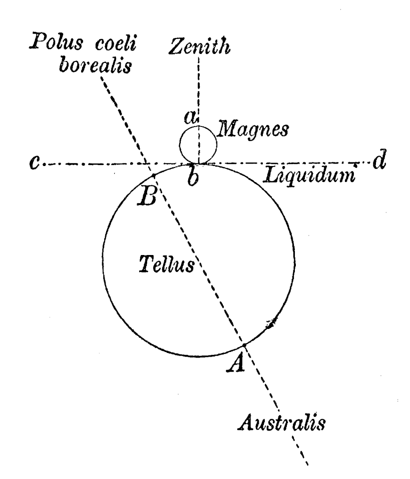
Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London
(Letter-book, IV, 322—6.)

Non dubito quin postremae meae literae, quibus residuum Hypotheseos meae, tum et festinata de abstracta motus theoria cogitata, ad Te recte pervenerint. Ex iis licebit, opinor, perspicere indolem sententiae meae. quanquam poliendae ejus perficiendaeque curam non abjecerim; neque enim adeo difficile erit, ubi otium suppetet, editis ineditisque meis amicorumque cogitatis experimentisque illustrare sententiam, ad explicanda omnia latissime patentem. Certe nihil est Experimentorum publice notorum, quae non ei, notabili harmoniae simplicissimae claritate, conciliare sperem. Omnes omnium gentium temporumque philosophi de spiritu quodam Universali seu Anima mundi disseruere, unde vita rebus ratione carentibus et motus: ne Aristotelis quidem loca desunt; at qui Spiritus ejus motum, causamque motus et effecta mechanice exposuerit, notus est mihi nemo. Magno me beneficio affeceris, Vir Amplissime, si egregiorum apud vos Virorum, quibus abundatis, tum judicia mihi perscripseris, tum favorem notitiamqua conciliaveris; non eorum tantum, qui naturae novam lucem infundunt, sed et qui circa

Theologiam naturalem et moralia aliquid praeclari molinntur. Licetne aliqua Experimentorum Relationumque per communicationem nancisci, quae in Historia Societatis enumerantur, praesertim si quid vicissim aperiri communicarive possit? Si qua judicia de Schediasmate meo insinuata sunt Illustri Societati, ea, rogo, ut mihi qualia sunt etiam cum Autorum nominibus, si licet, integra descripta mittas: reprehensiones enim, modo aculei absint, non aegre fero. De Machinae Wernerianae successu haec comperi, in fodinis Schwazensibus Bavariae ditionis hactemus frustra fuisse, sive ipsius artificii vitio sive ut solet obtrectatorum malitia, aut fortasse sumptuum mora, qui, ut cogitatu facile est, ad talia in magno opere prosequenda non exigui requiruntur: Autorem ergo ad extremum, facta redeundi afferendorumque necessariorum spe, domum abiisse, nondum rediisse. Sed nondum ideo res tota mihi damnanda videtur, qui scio, quot mali genii bonis se conatibus opponant. Ego, ut certiora tandem nanciscar, ad Wernerum ipsum, curante Amico, cui familiaris est, scripsi. Responsum habebitis, ubi ego nactus fuero.

Grandamici experimentum Magneticum, de quo antehac loquebar, hoc est: Magnes Sphaericus raticulae subereae vel alteri vasculo aquis innatanti imponatur, ea ratione, ut polus ejus *b* Borealis, hoc est, ille qui sibi relictus borealem coeli plagam, sive verius, telluris polum, Australis autem *a* respiciat zenith. Hoc enim modo constitutus magnes, post aliquot hinc inde reciprocationes, in liquido *cd* horizonti parallelo, disponet quasdam suas partes constanter in Austrum, et oppositas in Boream sine ulla declinatione. Quare, si in terrella, sic consistente ope lineae meridianae accurate repertae per aliquod e problematibus Astronomicis, designetur in superficie Terrellae Meridianus circulus, erit is universalis pro omnibus terrae locis, citra usitatam illam declinationem Magneticam, tantopere variam et inconstantem. Haec ille. Valde desidero, nosse rei veritatem ad Theorias meas magneticas perficiendas, et experimentum ipsum tale est, ut mereatur a diligentissimis observatoribus excuti. Quo facto, si quid mihi certi perscripseris, magno me beneficio affeceris. Kircherus, Zucchius Scottus approbant; sed scis, alios testes domesticis accedere debere: si verum est, sequetur, causam declinationis agere in solum Magnetis polum, cui si sic vacillandi libertas adimatur, declinationem



cessaturam; de quo fateor esse cur dubitem. Licetne nosse, quid rei sit mirabilis ille pulvis Kiefleri, Drebelii generis, cujus meminit Monconisius in itinerario, qui totas naves destruere possit; meminere ejus etiam Ephemerides Gallicae in judicio de Monconisio. Verumne quod ibi narratur, experimentum sumptum esse coram Cromwello? Continuaturne Atlas Anglicanus? Ignosce Te quaestionibus obtundenti. Unum est praeterea, quo post tot beneficia fortiore etiam, si id fieri potest, modo, Vir Amplissime, me Tibi obstringes. Comperi, apud vos olim prodiisse librum quendam Anglicum Gabrielis Plate de rebns subterraneis, inque eo narrari processum quendam eliciendi Salem ex Antimonio, qui sit quidem infructuosus ob paucitatem et sumptuum magnitudinem, evincat tamen veritatem transmutationis. Hunc processum ex illo libro, quem audio apud vos esse sic satis vulgarem, mihi verbotenus describi valde desidero, eaque in re curanda benevolentiam tuam invoco. Experimentum a Bechero, Medico Germano, descriptum, faciendi ferrum ex rebus non-metallicis, imo nec mineralibus, nescio an ad vos pervenerit: memini ejus, ni fallor, nuper; id ita habet, si limus, unde lateres coquuntur et furni parantur, ad aërem siccatus ut cribrari possit, oleo lini ita perfundatur, ut globuli inde formari possint, pro colli retortae capacitate, idque eum in finem, ne facta distillatione ob exemptionem capitis mortui retorta frangi debeat, deinde ut ignis parvos globulos vehementius quam totam massam penetret: Repleatur globulis retorta, et per gradus ex aperto igne distilletur augendo sub finem ignem fortiter. Prodibit oleum simile illi, quod vulgo vocant Philosophorum. Finita distillatione globuli nigrescentes contundantur et cribrentur, in patinam ponantur, et superfusa aqua communi moveantur; turbidum per inclinationem gradatim effundatur; limpida nova addatur, idque tam diu donec effusa aqua clare decurrat, et in fundo patinae grave nigrum sedimentum maneat. Hoc siccatum chartae imponatur; adhibitus magnes pulvisculum ferreum extrahet, qui repetita extractione copiosus colligetur, ex quo ferrum fiet in omnibus probis optimum. Haec Becherus, qui putat ex reactione quadam inter linum et oleum lini fieri ferrum. Quod concedendum erit, si verum est, sine oleo ferrum extrahi non posse: imo, alio olei linive genere adhibito, alia metalla oriri; sed sunt qui putant, esse tantum latentis in limo ferri extractionem, cum etiam Sendivogius alicubi asserat, in omni terra plurimum Martis latere. Sed Vos rectius arbitrabimini. Experimentum ipsum verum est, et coram eminentissimo Electore Moguntino nuperrime sumtum, qui incomparabili judicio et maxima harum rerum experientia, decora in Reip. administratione elucentia velut distinguit. Unum restat quod non possum quin ubi significem: Est mihi amicus, in re metallurgica egregie versatus; is rationem invenit

et in praxin deduxit chalybem ex ferro in quantitate cum magno fructu parandi. Sed cum talia ita comparata sint, ut fructus eorum ab iis demum, quibus fundus est rem tentandi in magno, autoritasque et notitia securitasque consumptionis, sentiatur, statuit vendere inventum suum iis qui rectius queant uti, quales vos judicat: nec si contrahetur quicquam petet antequam sumptibus suis assertionem suam apud vos verificaverit. Res est consideratu digna: nec hic vulgare aliquid ac tritum suspicere.

Si quid nonnonquam apud vos notabile incidit, quod scire liceat, Transactionibusque non inseratur, ejus me significatione subinde mire beatis. Quod restat, vale; quam primum literis me tuis recrea, Illustri Societati commenda, faveque etc.

Moguntiae $\frac{8}{18}$ Junii
1671.

X.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Exhibita, prout jusseras, Regiae Societati Hypothesi tua Physica, nec non Motus Abstracti Theoria, mox Illa, more suo, utrumque libellum, diversis vicibus, nonnullis e coetu suo Mathematicis et Physicis evolvendum atque examinandum commendavit. Factum hic, quod fieri assolet in ferenda de rebus extra Mathematicam evidentiam positis sententia: In diversas quippe opiniones Philosophi illi abiere. Interim, qui favere sensis tuis omnium maxime videbatur, erat Clarissimus Wallisius, Geometriae Professor Savilianus Oxonii, cujus mentem, si placet, paucis et quidem primo de Hypothesi ipsa sic accipe:

> Legi semel atque iterum Dn. Leibnitii Hypothesin novam, de qua opinionem meam petitis. Authorem quod spectat, utut de nomine (quod memini) mihi ignotum prius, aestimare tamen debeo, ut qui, in loco magno inter magna negotia positus, vacare tamen potest liberae Philosophiae, et rerum causis investigandis, quique ad multa respexisse videtur. Opus quod attinet, multa inibi reperio summa cum ratione dicta et quibus Ego plane assentior, ut quae

sint sensis meis consona. Talia sunt, debere Physicum ad mechanicas rationes, quam fieri potest, omnia accommodare § 15. Nihil se ipsum, ex abstractis Motus rationibus, in lineam priorem restituere, etiam sublato impedimento, nisi accedat nova vis § 23. Omnia corpora sensibilia, saltem dura, esse Elastica; Atque ab Elatere oriri Reflexionem § 22. (Quae meis de Motu Hypothesibus, Transactionibus Philosophicis*) jam antehac insertis omnino congruunt, quaeque in Mechanicis seu de Motu Tractatu fusius prosequor capp. 11 et 12). Item, Attoli gravia non metu vacui, sed propter Atmosphaerae aequilibrium § 25. Levitatem vero per accidens tantum sequi ex Gravitate (gravioribus minus gravia sursum pellentibus) § 24. Irruptionem Aëris (sed et Aquae etc.) in vas exhaustum ob Aëris gravitatem et Elaterem fieri § 26. Item, Exhausti atque Distenti (ut loquitur) Effectus; unde Fermentationes, Deflagrationes et Displosionum omne genus, nempe displodente altero, quod alterum absorbet (seu admittit potius) § 27, 39, 40. Nam et haec etiam ab Elatere fiunt, vel in Contento vel in Continente, vel utroque; illic, explicante se quod nimis fuerat impressum; hic, contrahente se quod nimis fuerat distentum: quippe utrovis modo, nedum utroque fiet eruptio vel explosio, dummodo locus sit, quo sine impedimento recipi possit quod ejiciendum erit. Suntque haec plane consona traditis nostris Mechan. c. 14. Sed et illud, Gravitatem in inferioribus oriri ex Motu (vel pressu) superioris aetheris § 13, 16, magna saltem verisimilitudine dicitur; quamquam enim Gravitatis causa (ut et Elateris) tam sit in abscondito, ut mihi nondum usque quaque satisfactum sit, quid in ea re statuam, Naturae tamen phaenomena Pulsione quam Tractatione felicius ut plurimum explicantur. Aliaque multa sunt, quae repetitu non est opus, quae magna verisimilitudine, si non et certitudine, dicta judico, quaeque per se satis consistunt independenter ab aliis; neque enim ita inter se connexa omnia, ut uno vacillante cetera simul ruant. De tota vero Hypothesi ne quid statim pronuntiem, id saltem facit, quod non sim pronus Ego (in rebus saltem pure Physicis, non Mathematicis) assensum novis Traditis adhibere, donec vel Eruditorum sententiis in utramque partem ventilatis, quid statuendum sit rectius constet, vel ipsa sui evidentia (quod in veris Hypothesibus

*) Am Rande bemerkt: N. Num. 43.

non raro fit) veritas eluceat. Fundamentum Hypotheseos novae petit ex *Abstracta sua motus* Theoria (quam necdum vidi, ut nec hujus Tractatus posteriora, quae passim citantur) nempe, *Quod nulla sit cohaesio quiescentis, sed omnis consistentia seu cohaesio oriatur a motu* § 7, 12, 34 (quod cum Guilielmi Neilii nostri placitis coincidit). Contra vero Honoratissimus Boylius *Consistentiam in particularum quiete*, et *Fluiditatem in earundem continuo motu*, collocat. Alii, ad *varias Atomorum figuras, hamatas et varie implicitas*, rem referunt. Neque Ego is sum, qui in tanta sententiarum varietate me velim arbitrum interponere. Sed tempori res permittenda est et Doctorum in utramque partem rationibus. Quippe, idem fere obtinet in novis Hypothesibus atque in Pendulorum Oscillationibus, ubi post crebras hinc inde factas reciprocationes, tandem in perpendiculo fit quies. Id vidimus in *Hypothesi Copernicana*, quae utut fuerit Veteribus cognita, tamdiu tamen jacuit sepulta ut pro nova haberetur: Et quamvis optima esset suffulta ratione, non tamen statim obtinuit, sed a variis fuit variis modis impedita, et acriter disputata, donec tandem rationibus authoritati praevalentibus ita jam universim admittitur, ut vix quipiam harum rerum gnarus de ea dubitet, nisi quibus Cardinalium decretum praejudicio est: Et quamquam Tycho novam illius loco substituerit, quae illi aequipolleret, ea tamen tot onerata est incommodis, ut existimandus videatur potius ad frangendam invidiam id fecisse (quoniam Telluris motus ita Vulgi opinionibus horribilis videbatur) quam quod Copernici Hypothesin ex animo repudiaverit. Idem dicendum de *Circulatione Sanguinis Harveana*; quae utut optime stabilita fuerit et oculorum αὐτοψίᾳ comprobata, disceptata tamen fuit inter Londinenses Medicos viginti plus minus annis, antequam in publicum prodiret, et ab aliis postea. Quae tamen deinceps post maturam rei pensitationem (quod tempori dandum erat) ab omnibus ut indubitata recipitur. Sic Galilaei Hypothesis (ob Antlias, aquam non ultra certam altitudinem attrahentes, primum excogitata) quam Torricellius in graviori liquido adeoque magis tractabili promovit, *Aequilibrium Atmosphaerae* pro Veterum *Fuga Vacui* substituens, non nisi post diutinas hinc inde disputationes eum apud Viros Doctos locum obtinuit, quem jam habet. Idem de *Jolivii nostri vasis Lymphaticis*, ante multos annos Londinensibus Medicis ab illo indicatis atque ab iisdem admissis et approbatis dicendum erit; Quae tamen ita rationi consona reperta sunt et oculari inspectioni manifesta, ut tandem longo post

tempore inter alios aliquot acriter disputatum sit, quis eorum primus Inventor fuerit. Idemque in hoc negotio, aliisque novis Hypothesibus exspectandum quae nec oculi inspectione nec certa demonstratione probari possunt, at, si veris rationibus fundatae sint, tandem, quamvis non nisi post velitationes utrimque factas, in libere philosophantium animis locum obtinebunt, interea pendulae mansurae".

Secundo, idem Wallisius de Theoria Motus Abstracti haec alio tempore multo parcius respondet:

Accepi transmissam Dn. Leibnitii Theoriam Motus Abstracti, de qua etiam judicium meum expectatis: Duo autem sunt, quae suadeant, ne illud praestem. Alterum, quod res invidiosa videatur de aliorum scriptis censuram agere: Alterum, quod occupatissimo tempore huc advenerit, quo aegre tempus obtinuerim semel atque iterum attentius legendi, nedum omnia pensiculatius expendendi. Quoniam vero id petitis, haec pauca dicam: Multa scilicet inibi contenta Ego plane approbo ut subtiliter et solide dicta, quaeque virum curiosum et cogitabundum indicant.

Si pauca sint, quibus non statim assentiar, ignoscet, spero, Vir humanissimus. Et speciatim fateor, mihi nondum satisfactum esse, ut, primis saltem cogitationibus, statim assentiar, Cohaesionem ex continuo celerique sed inobservabili particularum motu fieri (quod ille Theoriae Motus Concreti fundamentum ponit); uti nec pridem mihi fiebat satis, cum ante aliquot annos, similem quietis et Cohaesionis causam assignaverit Neilius noster.*) Quid olim aliquando fiet, post rem accuratius perpensam, nec dicere possum, nec praevidere. Interim Ego ἀπέχω nec quicquam in aliorum praejudicium pronuntio; quin liberum cuique sit, eam quam rationi magis consentaneam judicaverit sententiam amplecti.

Hucusque Wallisius noster, qui forte rem totam a Te propositam, concesso ampliori otio, penitius excutiet. Neilius ille, quem indigitat, vir adhuc juvenis, e Societate Regia, aetate juxta ac ingenio florenti satis nuper concessit. Is anno 1667 sua de Principiis et Natura Motus Cogitata primum Doctissimo Wallisio et mihi, deinceps vero ipsi Societati Regiae exhibuerat, prout in ejusdem Archivis consignata reperiuntur. Supponebat ille, Nullum quiescens habere resistentiam ad Motum; et duo corpora sibi invicem occurentia, ambo in concursus instanti a Motu desinere. Nullam ipse in Mundo admittebat Reflexionem, statuens,

*) Leibniz hat am Rande bemerkt: Nota, si quies est causa cohaesionis, omnis cohaesio est aequalis.

nullam materiae particulam posse retroagi quin prius moveri desineret; si vero denuo moveatur, a novo id impulsu oriri, etc.

Caeterum, Vir amplissime, morem gessi desiderio tuo, et pro commodiori distributione Scriptum tuum hic recudendum tradidi. Hoc sane pacto, Doctorum quorumvis nostratium sententias longe lateque explorabit, ab iisque forsan, ubi Tu necdum clare cernis, ampliorem aliquam lucem foenerabitur. Tu interim valeas feliciter et scientias Philosophicas pro virili augere pergas.

Dabam Londini d. 12. Juni 1671.

P. S. Jam ante aliquot septimanas transmittendos ad Te curavi libros, quos petieras. Martinus noster, Bibliopola Londinensis, commendavit eos Schultzio Hamburgensi; hic Zunnero Francofurtano. Tu operam dabis, si placet, ut quantocius resciscam, postquam tum illi libri, tum haec literae ad manus tuas pervenerint; meminerisque inscriptionis solitae, nempe etc.

Nil praeterea, nisi ut literae tuae rite curentur vel Amstelodamum vel Antverpiam; inde enim tuto ad nos transferentur.

Si quid Parisienses de Tua Hypothesi et Motus Theoria censuerint, id nobis a Te communicatum iri omnino confidimus.

XI.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Ante paucos dies Studioso cuidam Frankofurtensi, Hamburgum hinc velificaturo, literas ad Te datas commisi satis, ut puto, prolixas, quas Tibi rite traditas jam esse dubitare nolim. Continent illae quid philosophorum nostratium nonnulli de Hypothesi tua sentiant, quidque Ego de eadem in Transactionibus philosophicis commemorandum duxerim. Supersunt nonnulla in literis tuis novissime ad me datis, quibus responsum debeo, quod tamen cum paratum necdum habeam, in aliud tempus differre cogor. Interim dimittere harum gerulum nobilissimum haud potui, quin Te salutarem, simul et fidem facerem, me reliqua, quae de me exspectas, quam primum fieri id potuit, confecturum. Caeterum cum

eximius Helmontius, affectu mihi conjunctissimus, propediem ad nos sit reversurus, poteris, si placet, ipsi tuto committere, quaecunque forsan mihi scribenda vel communicanda occurrerint. In novissimo Nundinarum Francofurtensium Catalogo unus alterve liber juridicus occurrit, quorum tituli singulare quid spondere videntur. Sunt ille quidem, Strykii Tractatus de Jure Sensuum, et Gutherii Tractatus de Jure Manium. Si quidem libros hos lectu dignos judicaveris, ut mihi hac occasione transmittas, rogo, operam daturo, ut quibusdam authoribus hinc tibi mittendi beneficium rependam. — Vale, et raptim ex nimia festinatione scribenti ignosce etc.

Londini d. 5. Aug. 1671.

XII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Tardius aliquanto binis tuis novissimis, 10. Junii et 20. ejusdem*) ad me datis, respondeo, quod rusticari ad tempus, deinde complura negotia, nullam ferentia moram expedire debuerim.

Gaudeo interim, quae antehac ad Schultzium Hamburgensem in usum tuum transmisi, rite Tibi dudum fuisse reddita. Ex eo tempore, Numero 74. Ephemeridum mearum Philosophicarum, Doctoris Wallisii de Hypothesi tua judicium inserui, quem libellum ab eodem bibliopola Hamburgensi ad Te curatum quoque fuisse plane confido.

Ceterum quod artem illam attinet, quam Amicum Tuum callere scribis, Chalybem scil. ex ferro in quantitate cum magno emolumento parandi, scire Te velim, Serenissimum Principem Rupertum Palatinum hic Londini artificium illud perquam facili negotio in praxin deduxisse, et quoties lubet deducere. Quaevis enim Instrumenta ferrea, penitus jam confecta, integra etiam tormenta bellica grandia aeque ac parva etc. novit Ille in Chalybem perfectum, multo minori quam secus fit sumptu facili negotio convertere, ad eamque quam libuerit temperiem, citra ullum instrumenti damnum, reducere.

*) Der Brief vom 20. Juni fehlt.

Grandamici experimentum a Te recitatum fidei adeo sublectae habetur a Nostratibus, ut neminem hactenus reperim, qui dignum judicet, cui peragendo tempus impendatur.

Certum est, quod Monconisius de pulvere Küfleriano ingentes naves duorum triumve minutorum spatio in fundum agente commemorat; revera enim id praestitum fuit, imperante Cromvello, qui et in eo erat, ut cum Inventore de certo pretio contraheret, morte tamen rei executionem praeoccupante.

Compos fieri non possum libri a te desiderati, cui titulus: Gabriel Plat de Thesauris subterraneis. Interim edocuit me vir Philosophus et in Chymicis versatissimus, qui eum totum evolvit, expenditque, nullam ea in re quam Tu indigitas transmutationem intercedere, sed totum negotium in eo consistere, quod Aurum ex Antimonio parva quantitate, perinde atque ex Ferro, elici sive extrahi possit.

Experimentum Becheri impressum, de methodo scil. Ferrum ex limo latericio et lini oleo parandi, in oras nostras pervenit, et jam modo sub examine versatur, cujus eventum suo tempore perscribam.

Vidisti sine dubio, quae Cassinus nuper de Maculis in Sole, Augusto novissimo observatis commentatus est, quaeque de eodem argumento Ephemeridibus meis Philosophicis No. 74. eodem mense evulgatis annotavimus. Non dubium, quin et Tu eas inspexeris; uti eaedem et Amstelodami, Hamburgi et Londini observatae fuerunt.

Clarissimus Wallisius tertium et ultimum volumen edidit operis sui de Motu et Mechanice, ubi, inter complura alia, tractat de quinque Potentiis Mechanicis, ad motum facilitandum comparatis, de Vecte scilicet, Axi in Peritrochio, Trochlea, Cochlea, et Cuneo, deque aliis, quae ad has reduci possunt. Inserit nonnulla de Hydrostaticis, de Gravitate et Elatere Aëris, deque Atmosphaerae contrapondio; unde ea derivat effecta, quae Naturae a vacuo abhorrenti philosophorum vulgus attribuit, addita complurium Experimenti Torricelliani phaenomenûm Explicatione; multarumque Quaestionum Mechanicarum solutione etc. Exemplaria ejus quam plurima sine dubio Hamburgum transvehentur; unde brevi poterunt Moguntiam curari.

Telescopia et Microscopia Anglica quod attinet, scire Te velim, Artificem hic esse unum alterumve, qui talia elaborent, quae hactenus Nostratium non modo, sed et Advenarum atque Extraneorum applausum meruerint. Arduum nonnihil est quid ea praestent, examussim designare. Dn. Hevelius non ita dudum Telescopium 50 pedum triginta libris sterling, nec non Microscopium eximiae magnitudinis et praestantiae, decem libris sterl. a nobis procuravit; mihique nuper scripsit, utroque sibi abunde satisfactum. Ni fallor, Telescopium 60 pedes longum probe

elaboratum, statuit objectum 1000000 es: Et Microscopium, quale supra dixi, tantundem. Specula concava Ustoria quod spectat, Artificum nostrorum unus offert, velle se, precio 10 librarum Anglicarum, tale speculum conficere, cujus diameter sit 16 pollicum quodque ad duorum pedum distantiam urat efficaciter. Nosti, in Gallia jam quid amplius fuisse praestitum. Forte et nostri homines majora praestarent, si consimili praemio stimularentur. Hisce vale, meque virtutis ac doctrinae Tuae Cultoribus accense.

Dab. Londini d. 28. Septbr. 1671.

XIII.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London (Letter-book, V, 15—21).

Literas Tuas, quibus mihi Dn. Wallisii, acerrimi ingenii et profundissimae doctrinae viri, judicium transcribis, dudum accepi. Responsum distuli, dum hoc quod vides Schediasma Opticum*) addere possem, quod Illustri Societati Regiae communicari peto.

Memini in Transactionibus Philosop. mentionem fieri Propositae ab Auzuto rationis opticae metiendi ex una statione; sed qualis illa sit, mihi incompertum. Lentes sive Vitra Pandocha nemo quod sciam, unquam consideravit, multo minus Tubos Catadioptricos, quales mihi in mentem venerunt. Illis confusio radiorum tollitur; his unio augetur.

Amicus mihi est Johannes Ottius, juvenis egregie doctus, vobis non ignotus, qui praeclaras habet meditationes Opticas, quamquam mihi Ellipsibus et Hyperbolis plus aequo tribuere videatur. Idem proponit rationem quandam a se inventam, solis circulis id efficiendi quod Cartesius Ellipsibus et Hyperbolis; imo plus etiam, ut scilicet omnes radii singulorum in totidem distincta puncta ordinate recolligantur, sed hoc in certa tantum distantia figuraque tum objecti tum fundi excipientis. Caeterum meae Lentes Pandochae illud, fateor,

*) Notitia opticae promotae. Francofurt. 1671.

praestare non possunt, ut vel unius puncti omnes radios in unum punctum recolligant, nedum ut singulorum; sed interim hoc praestant, ut quantum Lentes vulgares efficiunt in puncto objecti unico, in axe optico sito, tantum Pandochae praestent in punctis omnibus etiam ab axe optico remotis, quantacunque sit apertura Lentis, aut Magnitudo, figura, distantia objecti. Idem Ottius mihi nuper misit dissertationem suam eruditam de morbis visus; quemadmodum et Henr. Screta, studiorum Ottio socius (qui eodem quo Ottius tempore de visu, ipse de Auditu cogitationes Physico-mechanicas publicavit) suam de morbis Auditus.

Quod celeberrimi Wallisii, acerrimi ingenii et profundissimae doctrinae Viri, judicium de Hypothesi mea qualicunque transcribis, accepi Tibique maximas gratias debeo. Si quid vicissim imperabis, nihil promptitudinis a me desiderari patiar. Si quae aliorum censurae ad vos pervenerunt (eorum inprimis quibus id negotii dedit Illustris Societas), beneficio tuo rescire spero. Clarissimus Wallisius mentem meam egregie cepit. Video, eum potissimum subsistere in hac propositione: nulla est cohaesio quiescentis. Fateor, Cartesium alia omnia sentire, cui videtur corporibus ad cohaesionis firmitatem nullo alio glutine opus esse praeter quietem. Ego contra, hoc Gluten esse motum.

Sententia Illustrissimi Boylii de fluiditate et firmitate non difficulter, opinor, conciliabitur meae. Fateor ego, motu res fieri fluidas, quiete firmas; sed motu irregulari vario, crasso externo, perturbante proprium intestinum, quo cessante restituitur intestinus, id est quies sensibilis, seu potius motus insensibilis conspirans. Recte dubitat ipsemet Boylius, an detur absoluta quies in corporibus, consistentiam ergo a quiete oriri, certum ei esse non potest. Imo, ne quid dissimulem, quanto rem considero profundius, tanto persuadeor magis, nullam esse quietem absolutam in corporibus, et quod a nobis appellatur corpus quiescens, id in rei veritate esse spatium vacuum, quicquid dissentiant Cartesiani. Hinc infero, ad essentiam corporis requiri aliud aliquid quam extensionem (id est magnitudinem et figuram), alioquin a spatio non differet. Ostendam autem, illud nihil aliud esse posse quam motum. Possum ergo demonstrare has propositiones alicujus in Philosophia momenti: (1) datur vacuum; (2) quod quiescit, est spatium vacuum; (3) quicquid movetur, cohaeret in linea motus; (4) Tellus movetur. Quae propositiones a se invicem pendent, aut consequuntur. Ausim me primum asserere qui demonstravit Motum Terrae. Si demonstrationes harum propositionum Illustri Societati Regiae non ingratas esse intellexero, transmittam aliquando.

A Cartesii regulis motus, fateor, me non posse non magnopere dissentire; quanquam de caetero maximi faciam illum virum, cui inter Heröes statuam dedicandam censeo. Ante omnia ei non concedo, corporis essentiam consistere in extensione (sed in motu); nec proinde spatium et corpus esse idem, neque ergo vacuum esse impossibile: Nec proinde materia illa subtili, in indefinitum se actu comminuente, solius spatii implendi causa conficta, opus arbitror. Nec illud admitto, quod ait, motum tantum consistere in mutatione vicinitatis, ac non magis dicendum, moveri terram immoto coelo, quam coelum immota terra, mutari enim situm amborum inter se, ergo moveri utrumque. Unde sequeretur, spatium quoque vacuum moveri, quoties a corpore deseratur; ac proinde esse corpus, contra priora. Nego etiam, tantundem requiri actionis ad quietem, quantum ad motum: Omnis enim actio mutatio est, mutatio nulla quiescentis. Nec a Cartesio demonstratum est, eandem semper quantitatem motus in universo a Deo conservari; ratiocinatio enim ab immutabilitate Dei valde infirma est. Accedo jam ad Leges naturae a Cartesio allatas. Prima vera est. princip. part. 2. n. 37. sed a Cartesio non demonstrata. Demonstravit eam primus Hobbius, quod semel moveatur, semper, quantum in se est, moveri. Secunda n. 39. vera est, sed a nemine demonstrata. Demonstrabitur autem a me; motui curvo inesse conatum in rectum; Cartesius iterum recurrit ad immutabilitatem et regularitatem Dei. Tertia lex n. 40 falsa est, et partim experimentis male intellectis, partim rationibus debilibus asserta; nec admitto, quae asserit (part. 2. princip. n. 43.) quod quiescit, quod alteri conjunctum est, habere in se vim ad resistendum moventi, disjungenti; et n. 44. motum non esse motui contrarium, sed quieti. Porro ex 7. regulis, quas habet n. 46. et sequentibus, ne unam quidem per omnia approbo; neque magnitudinem unius corporis continui ad rem pertinere censeo. Quieti vim resistendi abnuo. Nec quietem pro glutine agnoso. Baroni Nulandio, tum ei qui contra Cartesii 7 regulas scripsit, in eo non assentior, quod partim quietem considerant velut aliquid activum, partim putant in abstracta motus ratione corporis majoris esse vim majorem eadem manente celeritate motus, cum tamen majorum vis major sensibilis longe aliud principium habeat, scil. turbatam magis aetheris circulationem. Sed hic tam multiplex dissensus nihil apud me detrahit opinioni de tam insignibus viris. Scio enim, si tantum dissentiamus in principiis paucis, necesse esse ut dissentiamus in conclusionibus multis.

Quid de me vestris Transactionibus insertum sit, nosse opto. Hypothesin meam magis magisque polio et emendo: faxo aliquando, Deo volente, ut in paulo meliore habitu prostet. Gerickius noster scribit mihi, opus suum jam prope praelo exiturum, misitque mihi Indicem

capitum: Ex quo disco, sequi eum systema Copernicanum, sed quodammodo emendatum, recensere varia experimenta comparandi vacuum, et unum ex iis, comparandi vacuum quod putat summum. Ego, ut dicam quod res est, cum totum mundum globulis, bullis, gyris, orbibus constare credam, pro certo habeo, vacuum intercipi; sed vacuum aliquod sensibile procurari posse ullo experimento, non puto. Habet experimentum, quo nubes, ac ventus, coloresque Iridis possunt in vitro excitari; item experimentum de consumptione Aëris per ignem; experimentum ingens pondus elevandi: item Experimentum novi et antea nunquam usitati sclopeti: Thermometrum novum, Magdeburgicum dictum: Globum quem vocat Sulphureum (Schwefel-Kugell) qui miras illas operationes in distans exercet, plumam ad certam distantiam in aëre libero sustinet, et secum gyrat.

Non dubito quin ad Te pervenerint binae quaedam literae meae, eodem circiter tempore missae a me, quo datae sunt tuae. Memini, me in iis multa scribere, ad quae responsum desidero. Inprimis quis sit status rei opticae apud vos; quantam faciat Lunam optimum apud vos Telescopium, salva claritate; quae sit maxima magnitudo pediculi per optimum Microscopium; quae ut inquirerem imperaverat mihi Eminentissimus Elector Moguntinus, rei opticae curiosissimus, qui de Instituto vestro praeclarissime sentit, ut est Princeps talium valde intelligens; item in quanta distantia legi possint literae maximae impressae, ut in libris Ecclesiasticis. Vellem etiam nosse, quis eventus fuerit destinationum Wrenni et Dusonii, celeberrimorum Virorum, in poliendis sectionibus conicis. Ego quae de his politionibus sentiam, in schedula adjecta breviter expressi.

Sed nihil est nunc quidem quod magis a Te, Vir Amplissime, optem scire quam successum experimenti Magnetici Grandamici. Exposui Tibi, ni fallor, literis praecedentibus, et repetam brevissime. Ait nimirum Grandamicus (libro, demonstratio immobilitatis Terrae), si Terrella Magnetica ipso puncto suo polari collocetur in subere, ita ut alter polus Magnetis respiciat Nadir, seu centrum Terrae, alter Zenith, suber autem in aqua libretur, certas Terrellae partes in Septentrionem, certas in meridiem sine ulla declinatione dispositum iri, ac proinde designari posse in Terrella Meridianum quendam, qui ubique monstret Meridianum loci sine ulla, ut dixi, declinatione: Quasi scilicet declinatio Magnetica in solo polo ejus hospitetur, quo nunc fixo reddito, ut unum perpetuo mundi punctum, nimirum centrum Terrae praecise respicere cogatur, caeteras etiam magnetis partes praecise respicere certas mundi plagas. Meminit etiam hujus experimenti, sed, ut solet, sine nomine Inventoris, Cartesius in Princip. Philos. part.

4. Artic. 145 inter caetera magnetica phaenomena ibi recensita n. 21; dubitat tamen, an omnis omnino absit declinatio, et rationem reddere conatur artic. 271. Non dubito, quin Mercator, Powerus, Henricus Philippi, aliique apud vos insignes Magnetici hoc experimentum sumpserint, quorum judicia si ad me pervenire feceris, magnum in me beneficium contuleris.

Unum superest, quod bona tua venia quaero: Scis, Illustrem Boylium multa experimenta sumpsisse in Recipiente exhausto; sed in iis quae edita sunt, non potui observare, tentatum ab eo unquam discrimen inter Refractionem Aëris communis et exhausti. Si vel ipse vel celeberrimus Hookius, vel alius eruditorum vestrorum aliquid certi de eo argumento comperit, fac quaeso ut id ad me perveniat. Quod restat, vale faveque; si qua in re servire possum, audacter impone ac rescribe etc.

Francofurti
$\frac{15}{25}$ Octobris 1671.

XIV.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Me*) voicy en vostre logis, pour livrer à S. Exc. Mons. de Schoenborn une lettre, et à vous une autre, qui me sont venues en main aujourdhuy sous mon couvert. Je plains mon malheur de n'avoir pas trouvé S. Excellence au logis, pour luy faire la reverence et pour rendre sa lettre en main propre. Vous me ferez la grace de le faire à ma place avec mes très-humbles baisemains.

Monsieur le Chevalier Moreland dont vous parla hier Mons. le Chevalier Moray, et qui est l'inventeur d'une machine Arithmetique, m'ayant parlé de la vostre aujourdhuy, a dit qu'il est prest de vous monstrer la sienne demain sur les onze heures du matin, désirant aussi de voir la vostre enfin de les conferer ensemble. C'est donc, Mons.,

---

*) Dieses und das folgende Schreiben sind zwei Billets, die Oldenburg an Leibniz während seines Aufenthaltes in London richtete.

pour vous offrir mon service de vous accompagner sur cete heure là dans le jardin de Whitehal, où il a quelques chambres, et où son dit Instrument est logé, s'il vous plait de prendre la peine m'appeller chez moy, et faire porter vostre machine avec vous. Si non, vous m'obligerez de me le faire savoir demain matin à bonne heure, à fin que je regle mes affaires là dessus et face scavoir à Mons. Moreland, qu'il ne nous s'attende pas etc.

le 30. Janvier 1673
au soir.

XV.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Je vous supplie de vouloir faire mes trèshumbles baisemains à S. Exc. Monsieur de Schoenborn, et de m'excuser aupres de luy, de ne pouvoir pas jouir de l'honneur qu'il m'a destiné cejourdhuy, ayant receu ce matin à la Cour des affaires, qui demandent une despesche sans aucun delay, de sorte que ie n'auray presque pas une minute de temps pour disner chez moy. Je me donneray pourtant l'honneur d'assurer son Exc. devant son depart de mes treshumbles obeissances, et de vous tesmoigner aussi, que ie suis sincerement etc.

le 9. Fevr. 1673.

XVI.

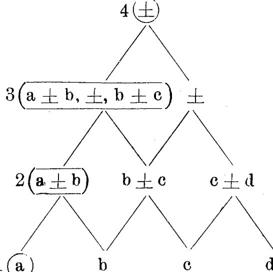
Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's auf der Königlichen Bibliothek in Berlin.

Cum heri apud illustrissimum Boylium incidissem in clarissimum Pellium, Mathematicum insignem, ac de numeris incidisset mentio, com-

memoravi ego, ductus occasione sermonum, esse mihi methodum, ex quodam differentiarum genere, quas voco Generatrices, colligendi terminos serici cujuscunque continue crescentis vel decrescentis. Differentias autem Generatrices voco: si datae serici inveniantur differentiae, et differentiae differentiarum, et ipsarum ex differentiis differentiarum differentiae etc., et series constituatur ex termino primo, et prima differentia, et prima differentia differentiarum, et prima differentia ex differentiis differentiarum etc., ea series erit differentiarum generatricium, ut si series continue crescens vel decrescens sit a. b. c. d, differentiae generatrices erunt a. $a \pm b$. $a \pm b, \pm, b \pm c$.

$$\underset{1}{a}.\ \underset{2}{a \pm b}.\ \underset{3}{a \pm b, \pm, b \pm c}.\ \underset{4}{a \pm b, \pm, b \pm c \;\text{„}\; \pm \;\text{„}\; b \pm c, \pm, c \pm d}.$$



Aut in numeris: si series sit numerorum cubicorum deinceps ab unitate crescentium, differentiae generatrices erunt numeri 1. 6. 6. Voco autem generatrices, quia ex iis certo modo multiplicatis producuntur Termini Serici, cujus usus tum maxime apparet, cum differentiae generatrices sunt finitae, termini autem serici infiniti, ut in proposito exemplo numerorum cubicorum.

```
            0    0    0
         6    6    6    6
      6   12   18   24   30
   1    7   19   37   61   91
0    1    8   27   64  125  216
```

Hoc cum audisset Clariss. Pellius, respondit, id jam fuisse in literas relatum a Domino Mouton, Canonico Lugdunensi, ex observatione Nobilissimi Viri Francisci Regnaldi Lugdunensis, dudum in literario orbe celebris, in libro laudati Domini Mouton de Diametris apparentibus Solis et Lunae. Ego, qui ex epistola quadam a Regnaldo ad Monconisium scripta et Diario itinerum Monconisiano inserta, nomen Domini Moutoni et designata ejus duo didiceram, Diametros luminarium apparentes et consilium de mensuris rerum ad posteros transmittendis, ignorabam tamen librum ipsum prodiisse; quare apud Dominum Oldenburgium Soc. Reg. Secretarium sumtum mutuo tumultuarie percurri, et inveni verissima dixisse Pellium: sed et mihi tamen dandam operam credidi, ne qua in animis relinqueretur suspicio, quasi tacito inventoris nomine, alienis meditationibus honorem mihi quaerere voluissem. Et spero appariturum esse, non adeo egenum me meditationum propriarum, ut cogar alienas emendicare. Duobus autem argumentis ingenuitatem meam vindicabo, primo si ipsas Schedas meas confusas, in quibus non tantum inventio mea, sed et inveniendi modus occasioque apparet, monstrem; deinde si quaedam

momenti maximi Regnaldo Moutonioque indicta addam, quae ab hesterno vespere confinxisse me non sit verisimile, quaeque non possunt facile expectari a Transcriptore.

Ex Schedis meis occasio inventi haec opparet: quaerebam modum inveniendi differentias omnis generis potestatum, quemadmodum constat differentias quadratorum esse numeros impares, inveneramque regulam generalem ejusmodi: Data potentia gradus dati praecedente invenire sequentem (vel contra) distantiae datae vel radicum datarum, seu invenire potentiarum gradus dati utcunque distantium differentias. Multiplicetur potentia gradus proxime praecedentis radicis majoris per differentiam radicum, et differentia potentiarum gradus proxime praecedentis multiplicetur per radicem minorem, productorum summa erit quaesita differentia potentiarum quarum radices sunt datae. Eandem regulam ita inflexeram, ut sufficeret praeter radices cujuslibet gradus etiamsi non proxime praecedentis potentias datarum radicum dari ad differentias potentiarum alterius cujuscunque licet altioris gradus inveniendas. Et ostendi quod in quadratis observatur, numeros impares esse eorum differentias, id non nisi regulae propositae subsumtionem esse.

His meditationibus defixus, quemadmodum in quadratis differentiae sunt numeri impares, ita quoque quaesivi, quales essent differentiae cuborum, quae cum irregulares viderentur, quaesivi differentias differentiarum, donec inveni differentias tertias esse numeros senarios. Haec observatio mihi aliam peperit; videbam enim ex differentiis praecedentibus generari terminos differentiasque sequentes, ac proinde ex primis, quas ideo voco generatrices, ut hoc loco 0. 1. 6. 6. sequentes omnes. Hoc concluso, restabat invenire, quo additionis multiplicationisve aut horum complicationis genere termini sequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atque ita resolvendo exprimendoque deprehendi, primum terminum 0 componi ex prima differentia generatrice 0 sumta semel seu vice $(1)^{\text{ma}}$, secundum 1 ex prima 0 semel (1) secunda 1 semel (1), tertium 8 ex prima 0 semel (1) secunda 1 bis (2) tertia 6 semel (1), nam $\widehat{0}(1) + \widehat{1}(2) + \widehat{6}(1) = 8$, quartum 27 ex prima 0 semel (1) secunda 1 ter (3) tertia 6 ter (3) quarta 6 semel (1), nam $\widehat{0}(1) + \widehat{1}(3) + \widehat{6}(3) + \widehat{6}(1) = 27$ etc. idque Analysis mihi universale esse comprobavit.

Haec fuit occasio observationis meae longe alia a Moutoniana, qui cum in tabulis condendis laboraret, in hoc calculandi compendium cum Regnaldo incidit; nec vel illi vel Regnaldo adimenda laus, quod et Briggius in Logarithmicis suis jam olim talia quaedam, observante Pellio, ex parte advertit. Mihi hoc superest, ut addam nonnulla illis indicta ad amoliendum transcriptoris nomen; neque enim interest Rei-

publicae, quis observaverit, interest quid observetur. Primum ergo illud adjicio, quod apud Moutonium non extat, et caput tamen rei est: quinam sint illi numeri, quorum tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter se junctis, termini serierum generentur. Vides enim ex ipso modo quo tabula ab eo pag. 385 exhibetur, non fuisse id ei satis exploratum; alioqui enim verisimile est, ita tabulam fuisse dispositurum, ut ea numerorum connexio atque harmonia appareret, nisi quis de industria texisse dicat; ita enim habet pars Tabulae:

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
(4)	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Apparet ex hujus tabulae constructione, solam haberi rationem corresponsus numerorum generantium cum numero termini generati, ut cum terminus est quartus (4) producitur ex prima differentia semel 1, secunda ter 3, tertia ter 3, quarta semel 1; ideo in eadem cum (4) linea transversa locantur 1. 3. 3. 1.

Sed vel non observavit vel dissimulavit autor corresponsum numerorum, si a summo deorsum eundo per columnas disponantur hoc modo:

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Ita enim statim vera genuinaque eorum natura ac generatio apparet, esse scilicet eos numeros quos combinatorios appellare soleo, de quibus multa dixi in dissertatiuncula de Arte Combinatoria, quosqne alii appellant ordines numericos, alii in specie primam columnam Unitatum, secundam Numerorum naturalium, tertiam Triangularium, quartam Pyramidalium, quintam Trianguloe-Triangularium etc. de quibus integer extat tractatus Pascalii sub titulo Trianguli Arithmetici, in quo tamen proprietatem numerorum ejusmodi tam illustrem, tamque naturalem non observatam sum miratus. Sed est profecto casus quidam in inveniendo, qui non semper maximis ingeniis maxima, sed saepe etiam mediocribus nonnulla offert.

Hinc jam vera numerorum istorum natura et tabulae constructio sive a Regnaldo sive a Moutonio dissimulata intelligitur. Semper enim terminus datus columnae datae componitur ex termino praecedente columnae tam praecedentis quam datae: atque illud quoque apparet

non opus esse molesto calculo ad Tabulam a Moutonio propositam continuandam, ut ipse postulat, cum hae numerorum series passim jam tradantur calculenturque.

Caeterum Moutonius observatione ista ad interponendas medias proportionales inter duos extremos numeros datos, ego ad inveniendos ipsos numeros extremos in infinitum cum eorum differentiis utendum censebam. Hinc ille nonnisi cum differentiae ultimae evanescunt (aut pene evanescunt) usum regulae invenit, ego detexi innumerabiles casus, regula quadam inobservata comprehendendos, ubi possum ex datis numeris finitis certo modo multiplicatis producere numeros plurimarum serierum in infinitum euntium, etsi differentiae earum non evanescant. Ex iisdem fundamentis possum efficere in progressionibus problemata plurima, ut in numeris singularibus, aut ut in rationibus vel fractionibus, possum enim progressiones addere subtrahereque, imo multiplicare quoque et dividere idque compendiose.

Multa alia circa hos numeros observata sunt a me, ex quibus illud eminet, quod modum habeo summam inveniendi seriei fractionum in infinitum decrescentium, quarum numerator unitas, nominatores vero numeri isti Triangulares aut Pyramidales aut Triangulo-Triangulares etc.

$$\begin{array}{cccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \\
\frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} & \\
\frac{1}{15} & \frac{1}{35} & \frac{1}{70} & \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

Londini d. 3. Febr. $16\frac{72}{73}$.

Beilage.

In Betreff der Summirung der Reihen, die am Schluß des vorstehenden Briefes erwähnt werden, wird Folgendes bemerkt: In der Abhandlung: Historia et origo calculi differentialis berichtet Leibniz, Huygens habe ihm im Jahre 1672 (noch vor seiner ersten Reise nach London) in einem Gespräch über die Eigenschaften der Zahlen die Aufgabe vorgelegt, die Summe einer abnehmenden Reihe von Brüchen, deren Zähler 1, die Nenner die Triangularzahlen wären, zu finden. Er habe die Summe der Reihe = 2 richtig gefunden. Unter den Leibnizischen Papieren siud die Manuscripte vorhanden, welche die Untersuchung über die erwähnte Aufgabe enthalten, mit der Aufschrift: De summis serierum fractionum, quarum numeratores unitas, nominatores sunt numeri figurati; Leibniz hat die Bemerkung hinzugefügt: Hic primum cepi invenire. Das

Manuscript beginnt: Hugenius summam exhibere promisit Fractionum in infinitum decrescentium, quarum numeratores unitas, nominatores sunt numeri Triangulares. Leibniz sucht die Summe der Reihe zu finden mittelst der Differenzen; er bemerkt, daß, wenn die Anzahl der Glieder unendlich ist, maxima est difficultas, et fortasse major, quam ut cognitis hactenus artibus superari possit. Er versucht die Lösung des Problems auf andere Weise, nämlich: Data aliqua serie Fractionum invenire aliam seriem, ad cujus differentias series data aliquam habeat rationem constantem, si id possibile est, aut ostendere impossibilitatem. Von diesen Untersuchungen, die für die Veröffentlichung nicht geeignet sind, ist das Folgende sorgfältig ausgearbeitet.

Theorema Arithmeticae infinitorum.

Binarius est summa seriei infinitae Fractionum, quarum Numerator Unitas, Denominatores vero Numeri Triangulares inde ab Unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.

series ⊙ $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$ etc. in infinitum $\sqcap$ 2.

Demonstratio.

Esto series infinita Fractionum quarum Numerator Unitas, Nominatores vero sint Numeri Naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum

series ☽ $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$ etc. in infinitum.

Exponatur et series ⊙ dimidiata:

series ☿ $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ etc. in infinitum

Quam ajo esse $\sqcap$ 1.

Nam auferatur series ☿ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit $\frac{1}{2} + \frac{4}{12} + \frac{9}{36} + \frac{16}{80} + \frac{25}{150} + \frac{36}{252}$ etc. sive depressis fractionum Terminis

series ♀ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}$ etc. in infinitum.

Ab eadem serie ☽ auferatur 1, residua erit eadem series ♀. Ergo 1 et series ☿ sunt inter se aequales.

Quia ab eadem serie ☽ ablatae relinquunt idem, Ergo dupla series ☿ sive series ⊙ erit aequalis binario.

Quod demonstrandum sumseramus.

Aus Vorstehendem ergiebt sich, daß Leibniz in diesen Untersuchungen das arithmetische Dreieck nicht zur Anwendung gebracht hat. Als er später mit Pascal's arithmetischem Dreieck bekannt wurde, für welches die arithmetische Progression 1, 2, 3, 4 .... die Fundamentalreihe ist, bildete er nach diesem das harmonische Dreieck, dessen Fundamentalreihe die harmonische Progression

$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots$ ist, und fand mit Hülfe desselben die Summen der Reihen $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20} \ldots\ldots, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{15}, \frac{1}{35} \ldots$ wie er es in der Abhandlung: Historia et origo calculi differentialis dargestellt hat.

XVII.

Illustrissimi Clarissimique Domini.

Zuschrift an die Königliche Societät in London. Nach einer Abschrift in der Sammlung von v. Murr's.

Institutum vestrum, quod semper veneratus sum e longinquo, nunc propius admissus coepi etiam admirari, ubi intueri coram licuit viros, quorum judicio ac doctrinae tantum Europa defert.

Jecistis certe fundamenta rerum magnarum, quibus inaedificare genus humanum potest. In ista aedificatione alii Architecti sunt, alii materiam subigunt, alii formant; nec illi rejiciuntur, qui obvia sed apta saxa arrepta aggerunt ad augendam struem.

Ea enim est bonitas vestra prudentiaque, ut mediocribus etiam ingeniis uti sciatis velitisque. Id vero eam mihi quam hic videtis audaciam fecit, offerendi operam meam destinatis tam praeclaris, quando ingenium industria bonaque voluntate suppleri potest. Si fas est recipi inter vestros hominem peregrinum, juvenem, nullis operibus vestro nomine dignis clarum, nec nisi conatu se commendantem, jam nunc (quanquam absenti in necessaria itineris festinatione, signandi potestas futura non sit) nomen dabo.

Homini philosopho veritatisque amanti, nulla propemodum nova obligatione opus est, ut vester sit: ita enim arbitror, id quod generis humani et quod Societatis Regiae pro generis humani augenda potentia laborantis interest, idem esse nec aliquid in Vos conferri quod in publicum non redundet.

Hoc animo, hoc consilio, ego me Vobis totum offero. Vos, ut visum erit, utemini

Illustrissimi Clarissimique Domini

Londini 10/20. Februarii 1673.

devoto vobis
Gottfred. Guilielmo Leibnitio
Consiliario Moguntino.

XVIII.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift Guhrauer's, die derselbe vom Original (Miscell. Papers Mus. Brit. Bibl. Birch. 4294) genommen.

Paris 8. Mart. sty. nov. 1673.

Ubi primum Parisios feliciter appuli, illud inter primas meas curas fuit, ut ad TE literas grati animi indices et commercii excultrices darem. Ante omnia non dubito, libros quos a TE mutuos habebam, recte ad TE perlatos, eos enim mane discessurus, quando perferendi spatium non supererat, Nobilissimo Schrodero commendavi, adjectis ad TE literis meis, quibus alias ad Illustrem Societatem Regiam incluseram, voti mei, coram TE expositi et a TE approbati indicatrices. Illud certe tuto meo nomine spondere potes, daturum me operam, ne tantos viros poeniteat, hominem quantuluncunque, optime tamen animatum, benigne suscepisse.

Illustriss. Boylio cum salute a me obsequia et venerationem denunties oro. Ita enim illi pariter Tibique, imo amicis meis omnibus persuasum esse volo, testorque quoties occasio est, Virum esse maximis ab omni memoria hominibus connumerandum, et cui statuas aliquando debere se agniturum sit humanum genus. Quaero quae ille promisit mihi, Catalogum commutandorum fac mature teneam favore Tuo, ac reciproca ei a me promitte.

Sane afflixit nos non mediocriter infelix nuntius de Eminentissimi Electoris Moguntini morte, quem Caleti offendimus, in quo Principe certum est non Rempublicam tantum, sed et Philosophiam plurimum perdidisse. Solamur nos tum successore Episcopo Spirensi, principe non sapiente tantum, sed et ad mechanica usque curioso, eidemque familiae illigato, nam frater ejus Schoenbornii, qui apud Vos nunc fuit, sororem in matrimonio habet; tum quod literae chartaeque omnes, inprimis quae ad rem Philosophicam spectare possint, in manu nostra erunt; sed hoc non nisi ad TE scriptum volutatumque*) illustr. Boylium.

De caetero ill. Boylium quaeso roga, ut si placet, menstruum Stanni, ut spem fecit, mecum communicet. A Te quoque, Domine, prout promisisti, exspecto illam (mixtura ex duabus partibus Aquae fortis et una parte spiritus salis communis) formae in metallum impressionem, cujus mentio fit in historia Societatis. Quicquid vicissim imperabis, exequar sedulo.

In Instrumento meo Arithmetico laboratur strenue. Reperi certissimam rationem in exiguum spatium, ac, si placet, baculum inclu-

*) Die Abschrift hat volvatumque.

dendi, idque sive Elateria sive tantum Rotas adhibeas: neque id ex iis quae jam habebam difficile erat praestare. Quare pro certo habeo, Clarissimum Hoockium se non mixturum inventioni alterius; ejus enim generositatis ac prudentiae esse arbitror, ut propria potius inventa, quibus non caret, poliat, quam ab alio jam publice proposita involet. Sane ex relatione ejus quam mihi praesente Clarissimo Hakio fecit, constabat fundamentum constructionis idem esse cum meo; tantum ab eo compendium promitti. Nec dicere poterit, ipsum fundamentum ei sine me in mentem venisse, cum duo constet (1) nemini eum unquam de tali re locutum, antequam ego in Angliam cum machina mea veni, (2) machinam meam ab eo diligenter et curiose ex proximo fuisse inspectam. Cum enim eam in R. Societate exponerem, ipse sane proximus fuit, asserculum posticum, quo tegebatur, amovit, omnia, quae dicebam, excepit: ac proinde qua est sagacitate et rerum mechanicarum peritia, dicere non potest, mea a se non percepta. Equidem omnes rotas meas non assecutum distincte, facile concessero: at sufficit in talibus homini ingenioso et mechanico ideam instituti rudem, imo exteriorem operandi modum semel vidisse ad aliquid de suo postea comminiscendum, quod in Rotarum tantum complicatione consistit, quae a variis varie fieri potest. Scimus viros candidos et generosos, si quid deprehenderant, quod ad aliena inventa augenda pertineret, maluisse additamenta sua atque accessiones autoribus concedere, quam in suspicionem incurrere parum jejunae mentis et egeni verae gloriae animi, si falsum quadam inhonesta rapacitate aucuparentur. Ita post inventa a Galilaeo sidera Medicaea Peirescius in periodos eorum observandas summo studio incubuit; at ubi autorem intellexit ad eandem curam animum appulisse longitudinum causa, sua ei omnia ultro lubens concessit, idque justitiae esse ratus est. Ita Gassendus in Selenographiam quondam diligenter incubuerat, multasque jam figuras Telescopio adhibito delineatas in aere sculpi curaverat; at ubi intellexit praeoccupatam esse ab Hevelio provinciam, propiusque eum a meta abesse, non destitit tantum, sed et suarum inventionum participem fecit. Contra inventoris est, ei quoque se obligatum publice confiteri, cujus monitis cogitata sua crevere. Quare breviter: cum substantia inventi mea sit aut hausta ex meo; cum quicquid Hoockius tantundem ego praestiturus sim, clarissimum virum, qua est virtute, rei meae cultum ac polituram mihi relicturum, imo et quas habet admonitiones, earum mihi copiam liberaliter facturum, interventu praesertim Tuo, spero; quod si fecerit, publice candorem laudabo, sin minus, rem faciet nec concepta de se opinione, neque natione sua, neque R. Societate dignam. Caeterum, cum optima quaeque sperem, hoc non nisi TIBI, ac si placet, Ill. Boylio scriptum volui, ut si occasio ferat, a coepto

eum deducat, imo communicationem ei persuadeatis. Quare hactenus nemini nisi Boylio TIBIque verbum de re dixi scripsive.

Locutus est mihi Dominus Boylius de quodam praedictore ventorum, qui et menstruas suas praedictiones mittere solebat, sic satis veraces. Interroga, quaeso, an novissime miserit et satisne veras.

A Domino Hoockio sciscitare quaeso, quid de Blondelliana circa Trabium aequiresistentium figuram demonstratione sentiat, quando ipsum quoque de ea re meditatum ais. Diarium homunculi Gerickiani continuatur cum successu. Oblitus sum a Domino Boylio quaerere, quid sentiat de experimento Hugeniano in Diario eruditorum aliquando relato de duabus laminis sive Tabulis politis, in vacuo aeque ac in pleno non divulsis, cum tamen meminerim contrarium experimentum a Boylio in novissimis de vi Elastica narratum esse. De Algebra pervelim nosse, an aliquid circa depressiones aequationum insignes viri apud vos, Illustriss. Brunkerus, tum viri, tuus Wallisius, Pellius, Mercator, Gregorius aliique praestiterint. Parisiis est Dominus Osanna, juvenis in Algebra versatissimus, qui nobis aliquid in eo genere, idem Diophantum promotum dabit, reperta ratione solvendi problemata, quae neque ex Diophanto, neque ex cognita hactenus Algebra poterant solvi. Ecce TIBI.

Quatuor problemata, quae (inquit) palam proposuit et quorum hactenus nemo dedit solutionem:

(1) Invenire infinita Triangula rectangula diversae speciei, in quorum singulis area detracta lateri minori circa rectum et hypotenusae singillatim relinquat quadratos.

(2) Invenire infinita Triangula rectangula diversae speciei, in quorum etc. ut paulo ante, substituto latere majore.

(3) Invenire Triangulum rectangulum, in quo differentia quadratorum laterum circa rectum detracta alterutri eorum summae, et differentiae, singillatim relinquat quadratos.

(4) Invenire tres numeros, ut summa eorum quorumlibet sit quadratus et differentia duorum quorumlibet etiam quadratus.

Haec problemata quae difficillima ac taediosissima, nec nisi post diuturni temporis impensas solubilia videri possent, ab illo tamen, nova quadam methodo, paucis lineis, ut vidi, soluta sunt: ipse aliis solvenda considerandaque proponit, optatque de iis sententias intelligere egregiorum apud vos Algebristarum, ut appareat nova an trita sit methodus ejus; solvit autem per speciosas nulla numerorum consideratione.

Caeterum, fac quaeso sciam, quid Clarissimus Pellius a Mengolo jam praestitum dixerit, cum schedulam ei meam monstravisses. R. P. Pardies dabit dissertationem de linea Logarithmica, ejusque usu in solvendis problematis graduum omnis generis: eam lineam attigit in

suis Elementis Geometriae, sed ea linea describi non nisi per puncta, ni fallor, potest, id est Geometrica non est. R. P. Berthet circa motum a Pardiesii libello dissentit, et ut puto, aliquid de ea re edet. Prostat hic scientia Chinensium P. Iriteriertae, sed non videtur magna adeo mysteria continere.

Nosse distinctius velim, quae circa Varinkonenj acum magneticam in Hudsonsbay, item Dantisci, mihi narrabas; Hoockiani item Catadioptrici statum et successum, inprimis an circa materiam speculi singulare aliquid praestetur, tum ut politura sit pura qualis vitri, tum ut materia ab aëris injuriis praeservetur. Plura scribam, ubi in civitatem me immersero, hactenus iu componendis reculis versor. Potero tunc fortasse scribere nonnihil de iis, quae Dn. Mariottus de Iride contra Cartesium, et de coloribus contra Newtonium, item de aquarum proprio pondere pressarum jaculationibus, quarum leges ab iis quae autores de aequilibrio liquorum scripsere plurimum differunt, molitur. Construxit fonticulum, qui ubi salire desiit, emortuus quidem subito rursus incipit simplicissimo artificio, et his ipsis quas affert legibus innixo.

De Newtonii sententia scribe, quaeso quid vestri sentiant; aegre certe adducentur eruditi, ut ejus sententiam de differente radiorum refrangibilitate admittant. Si Oxonii responsum accepisti circa Vectium Valentem, cujus copiam sibi fieri Nobiliss. Huetius desiderat, fac ut sciam. Sumtus describendi lubens exsolvet, modo favore tuo sit, qui rem in se suscipiat. Sed video me excedere Epistolae modum, imo et moderationis, cum tot ac tanta Tibi imponere, a Te postulare audeo; quam vero rectius poenam luam, quam Tibi. Quare vicissim non patiar tantum, sed et rogo ut quaeras, jubeas, postules quidvis, quod in mea potestate est. Quod si vero proximis literis nihil aliud quam hoc unum mihi responderis, Illustrissimam Societatem precibus meis detulisse, abunde mihi satisfactum putabo. Responsoriis mihi inscriptis operculum tale quaeso circumda ita inscriptum: à Monsieur, Monsieur le Baron de Boinebourg, Paris chez Monsieur Heis, rue Thibaut aux dez. Quod restat vale faveque etc.

Auf dem Original hat Oldenburg eigenhändig bemerkt: Resp. d. 6. Martii $16\frac{72}{73}$, misi impressionem formae in metallo, et responsa de Vectio Valente; promisi me curaturum ipsius admissionem, et significaturum, quod spectat Boylium, Algebram, Osannae problemata, Pellium, spec. Catadioptricum.

Resp iterum d. 10. April. et nuntiavi, ipsum 9. April. electum fuisse socium Societ. Regiae, inclusi prolixam epistolam de rebus Algebraicis quam plurimis, ex Collinii scripto in Latinum sermonem versis,

ut et scriptum continens summam rerum quae destinantur secundo volumine Algebraico quod Anglice meditatus Kersaeus.*)

XIX.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Londini die 6. April. 1673.

Promiseram, Vir Amplissime, in literis meis, 6to Martii novissimi ad Te datis, me ampliorem ad Tuas responsionem adornaturum, quam primum edoctus forem de iis, quae porro ex me scire desideraveras. Datam itaque fidem liberaturus, hanc priori epistolam succenturiare volui, ut intelligas eo luculentius, nolle me tibi in ulla re deesse, quae quidem a mea proficisci tenuitate poterit. Scias itaque primo, me scriptum illud tuum de Interpolationum doctrina, deque tuo cum clariss. Pellio circa id argumentum et Moutonum colloquio impertiisse Doctiss° nostro Collinio, similiter ex Societate Regia, qui in hac est sententia, dictam Interpolationum doctrinam multo posse latius extendi, longeque reddi faciliorem, idque binae methodi adminiculo, Aequationem seriei propositae accommodando, quam numerorum figuratorum Tabulas adhibendo. Ut exemplis rem ostendat, duas omnium difficillimas in Moutoni libro series sub incudem vocat, dicitque si respectu alterutrius earum sumas numerum terminorum esse radicem sive t atque ex Aequatione eruas Homogeneum, inventum iri quemlibet numerum vel numerum intermedium in alterutra harum serierum.

Prior series

3, 5, 8, 18, 45, 105

Hujus prioris haec est Aequatio ipsi accommoda

$$\frac{1}{60}t^5 - \frac{1}{12}t^4 + \frac{3}{4}t^3 - 3\frac{5}{12}t^2 + 7\frac{11}{15}t - 2 = N$$

Altera series

N, 3, 18, 222, 1317, 4977

Aequatio haec est:

$$4\frac{1}{20}t^5 - 20\frac{1}{4}t^4 + 56\frac{1}{4}t^3 - 101\frac{1}{4}t^2 + 103\frac{2}{10}t - 39 = N$$

---

*) Offenbar ist das Letztere ein Auszug aus dem folgenden Briefe, der vom 6. April datirt ist.

Ex. gr. sumo terminum quartum

$$
\begin{array}{rlrr}
+\ 4 \times 103\frac{2}{10} & = & +\ 412{,}8 & \\
-16 \times 101\frac{1}{4} & = & & -\ 1620 \\
+64 \times\ 56\frac{1}{4} & = & +\ 3600 & \\
-256 \times 20\frac{1}{4} & = & & -\ 5184 \\
+1024 \times 4\frac{1}{20} & = & +\ 4147{,}2 & -\ 39 \\
\hline
 & & +\ 8160 & -\ 6843 \\
 & & -\ 6843 & \\
\hline
 & & +\ 1317 &
\end{array}
$$

Adjicit in quavis Aequatione quinti gradus (quod et extendit ad alios gradus) facile esse, per 4 Multiplitiones e Radicibus excitare Homogenea, ita ut non sit opus radicis excitare Potestates.

Deinde quod commemorabas Methodum tibi suppetere, qua addere possis eas Series Fractionum, quarum Denominatores numeris constant Figuratis, putat idem Collinius Mengolum in libro suo de Additione

$$\left.\begin{array}{cccc} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} & \frac{1}{70} \end{array}\right\}$$

Fractionum sive Quadraturae Arithmeticae, Bononiae impresso A. 1658, docuisse nos modum summae harum serierum inveniendae. At quando idem Mengolus pergit ad progressionem Musicam in Fractionibus, vel quod idem est, ad Reciproca Progressionis Arithmeticae, cum Quadratis et Cubis eorum, puta, fatetur ille, non potuisse se harum se-

$$\left.\begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} \end{array}\right\}$$

rierum summam invenire, ditiorisque ingenii adminiculum in eo postulat. Methodus nostra, ait Collinius, ad harum quoque summam inveniendam se porrigit, atque si illa methodus idem praestat, eas coincidere arbitratur. Ad quod experiundum, utilem hanc quaestionem proponit:

Quidam habet domum fundumve sibi locatum pro censu annuo 100 librarum, spatio 100 annorum: scire cupit praesentem ejus valorem, accisis 6 libris in 100 pro simplici faenore annuo, solutione annuatim facienda.

Valor ille est summa 100 terminorum, hac serie $\frac{10000}{106}\ \frac{10000}{112}\ \frac{10000}{118}\ \frac{10000}{124}$ etc. quod juxta computum nostrum facit 3200 Pfd. quam proxime. Quaeritur, quae sit summa cujusvis alterius vel majoris numeri Terminorum in dicta serie?

Si procurare nobis potes eum Mengoli librum, cui titulus: Via Regia ad Scientias Mathematicas, ejusdemque Musicam novissime editam; ad haec Griembergerum de Speculo Ustorio Elliptico,

una cum ejusdem Nova Caeli Perspectiva, nec non Praxi Sectionum Conicarum, et Consectariis, Circulorum Contactus et Sectiones angulares concernentibus, rem omnino gratam nobis es praestiturus, quam, re ferente, demereri annitemur.

Reverendi Patris Pardies institutum quod attinet de Inveniendis Aequationum radicibus, Curvae Logarithmicae beneficio, laudatus Collinius ait, methodum ejusmodi probe inter nos esse cognitam, eamque accommodam non esse nisi Aequationibus duarum potestatum, aequalium Numero Resolvendo sive Homogeneo aequationis, quales sunt illae cubicae, quibus suas Cardanus regulas applicat, quae sunt vel saltem reddi possunt generales, obstante nequicquam difficultate ex negativae quantitatis radice orta, id quod omnibus hucusque Authoribus crucem fixit. Atque in hoc genus Aequationibus conficiendis, Tabulae equidem radicum quadraticarum, cubicarum etc. operationes sane tales apprime faciliores redderent.

Dn. Laurentius Gallus, in praefatione ad Specimina sua, methodum pollicebatur, omnes Potestates medias in quibusvis Aequationibus auferendi, proindeque relinquendi nullas nisi Potestatem supremam infimamque Homogeneo aequalem (qua de re doctissimus Freniclius haud dubie edocere harum rerum curiosos poterit.)

Hoc si fieri semper posset, fateremur profecto, Curvam Logarithmicam inservire omnium Aequationum constructioni posse. Atque si hanc obtinere poteris Notionem ullasve alias a Dno. Osanna, in nuperrimis literis tuis a Te celebrato, circa aequationum in sua componentia divisionem etc., supplemento erit institutis nostris tempestivo, quae in lucem edita doctissimum Authorem debita laude cumulabunt.

Vidimus*) non ita dudum Perspectivam Heureti, in qua perstringuntur rejiciunturque Dni. Des Argues Conica, Leçons de Tenebres nuncupata, quorum non nisi 50 Exemplaria fuisse impressa dicuntur, adeo ut perdifficile sit, vel unum ex tam paucis procurare. Sentit Dn. Collinius, si quidem mens et scopus Authoris probe attendatur, doctrinam illam applausum potius et augmentum mereri, quam vituperium; Consilium quippe ipsius fuisse, Agere de Sectionibus Conicis ceu projectis e circulis minoribus, in Sphaerae superficie sitis. In cujus rei Explicationem:

Suppone (cum dicto Collinio) Oculum in centro Sphaerae, quam tangit Planum zenithi, eumque spectare Planum Segmenti Sphaerae; dictum Planum est basis Coni, cujus vertex est in Oculo; si quidem supra

---

*) Hierbei ist zu vergleichen meine Abhandlung: Desargues und Pascal über die Kegelschnitte, in den Sitzungsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1892.

Horizontem fuerit eique Parallelus dictus Circulus, Sectio in Plano tangente erit circulus; si vero non fuerit Horizonti parallelus, erit Ellipsis; si Horizontem tangat, omnesque ejus partes reliquae fuerint supra Horizontem, erit Parabola; cumque complures ejusmodi circuli elevati tangere in eodem puncto Horizontem possint, Projectiones eorum omnes erunt congruentes Parabolae: At si unus pluresve circuli partim supra Horizontem fuerint, partim infra eum, Projectiones eorum Hyperbolae erunt; atque si eandem habuerint chordam communem in Horizonte, Projectiones eorum erunt congruentes Hyperbolae: si plane fuerint infra Horizontem, projici nullatenus possunt. Supposito, ex diversis Circulis Sectiones Conicas istum in modum projici, si supponatur consimiliter oculum transferri ad Nadir, eosdemque circulos denuo projici, sequetur quod prius fuit per Conicarum harum Sectionum intersectiones determinatum, id inveniri jam posse et determinari per Circulos projectos positosve subcontrarie ad istos in Sphaera circulos qui Conorum visualium Bases constituunt. Adeo ut exinde in eam deducamur considerationem, in quibusnam scilicet casibus Problemata per Sectiones Conicas determinata solvi Geometriae planae beneficio queant?

Sed pergo ad alia. Commemorat alicubi Mersennus de Paschali filio, Eum unica Propositione universalissima, 400 Corollariis armata, totum Apollonium fuisse amplexum. Inaudivimus, hunc Tractatum hactenus esse ineditum; insistere autem methodo Des-Argueanae (quam forte ceu viri illius discipulus imbiberat) edoctique fuimus a Bibliopola Parisiensi de Prex, manuscriptum id esse penes fratrem quendam suum (Prexii) in Auvernia. Utinam id protrahi in lucem posset!

Videre est in Scripto hic sociato*) promissa nobis fuisse residua Fermati. Credimus interim, haec ipsa vel saltem nonnulla eorum, nec non Tractatum Dni. Des Argues, ut et Ms. Clarissi. Robervallii de Locis planis, Solidis, Linearibus et ad Superficiem jam esse diuque fuisse in Anglia penes virum quendam doctum, qui scripta illa hactenus premit, quique Tractatum molitur de Canone Mathematico, sive Tabulam sinuum qua ostendatur, quam difficilia Problemata et Aequationes solvi illius beneficio possint. Quoad Cartesianam problematis Pappi solutionem, ait idem, multum operae fuisse impensum, ubi parum suffecisset. Atque ut verum fateamur, inquit Collinius, si 5 puncta in sectione conica, aut 4 in Parabola dentur, alia puncta innumerabilia describi possunt angulorum mobilium ope, absque ulla cognitione vel figurae vel ipsius Axium, Focorum, Asymptotων, Ordinatarum, unde supputationes Trigonometricae similiter consequuntur.

---

*) Enthält die Inhaltsanzeige des 2. Bandes von Kersey Algebra.

Interim si non fiat nobis horum copia aliunde, sperandumne saltem, ea nos inventuros esse in Claudii Milleti de Chales Cursu Mathematico, Lugduni Galliarum sub praelo nunc sudante?

Denique, accepit ab Erasmio Bartolino Picardus Dni. de Beaune tractatum de Angulo solido, ea scilicet lege ut Parisiis imprimendum curaret. Lubenter sciremus, num praelo jam commissum sit opus, et quanto temporis spatio proditurum in lucem credatur.

Ob varia complurium Societatis Regiae membrorum negotia publica raro adeo fuerunt a discessu tuo conventus, ut Electio nulla fieri hactenus potuerit. Nec ipse professor Astronomiae Oxoniensis, Dn. Bernhardus, eandem ob causam cooptari potuit. Quam primum numerus debitus convenerit, vos ambo simul, ni fallor admodum, cooptabimini.

Polliceor mihi properam ad binas meas responsionem. Lubeat tuas ad me litteras sic inscribi, si quidem per tabellarium expediantur:

A Monsieur
Mons. Grubendol
à
Londres

Nil praeterea.
Vale. Sum Tui studiosissimus

H. Oldenburg.

XX.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Voti tui quod relictis mecum litteris exposueras, compos jam es factus, dum Regia Societas hesterno die conspirantibus omnium suffragiis, in sodalium suorum Album Te cooptavit, idque eodem tempore, quo doctissimum Astronomiae in Oxoniensi Universitate Professorem Savilianum, Dn. Edwardum Bernhardum unanimi similiter consensu elegit. Negotia publica, negotiosa hac rerum facie accumulata, aliquam Electioni huic moram injecere, eo quod complures Societatis nostrae consortes gravibus occupationibus tum in Aula tum in Regni comitiis

involuti, Conventus nostros philosophicos infrequentiores reliquerunt: unde factum, ut requisitus Electioni numerus ad usque diem hesternum nobis defecerit. Exinde vero rebus tuis ex animi sententia transactis, tuum jam erit, genuinum Te Societatis hujus Philosophicae alumnum praestare, inque medium ea conferre, quae vel Tutemet in Physicis Mechanicisve meditando et experiundo fueris consecutus, vel alii per Germaniam in eadem re philosophica excogitaverint. Germana id fide Te praestiturum nulli dubitamus, ad similia vicissim officia Tibi exhibenda ex animo parati. —

Lubens haec addere iis volui, quae jam uberiori epistola die 6. Aprilis ad te data conscripseram. Vale, deque litteris hisce bene traditis quantocius Tui studiosissimum Oldenburgium certiorem redde.

Dabam Lond. die 10. April. 1673.

XXI.

Leibniz an Oldenburg.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Obligatissimus favori tuo rescripsissem dudum, sed promissas a cl. Huetio literas in dies exspectanti, quas fluxio quaedam oculi ejus incommoda distulerat, tempus elapsum est; Eas nunc ubi primum accepi, statim mitto. Sententiam ejus facile intelliges. Ea viri eruditio est, ut publici; ea humanitas, ut obligantis intersit, eum beneficio ejusmodi obligari. Ea vero promptitudo officiositatis tuae, ut ab ea quidvis sibi polliceantur eruditi. Huetium fortassis non ignoras Delphini studiis admotum; scis gubernatorem esse Montauserium Ducem, in quo cum aulica prudentia doctrinae profunditas certat, studiorum ejus rector primarius Episcopus Condomensis, proximus ab hoc Huetius. Jussu Montauserii, rectore Huetio, coepta res est ad amoeniores literas fugientemque antiquitatis eruditionem velut revocandum perutilis. Certis enim hominibus doctis id negotii datum est, ut scriptores veteres latinos, quos classicos vocant, alio quam hactenus more tractent, adjecta quadam velut paraphrasi, ubi opus est lucida, ac brevi, ut facilis juventuti reddatur veterum lectio: Rejectis in notas, quae ad autoris intelligentiam ex historia scientiisve repeti debent. Inter caeteros, Vitruvius

quoque et Celsus ea lege tractabuntur. Sed Huetius ipse alia agitat, utilia sane etiam ad scientias severiores, nec vobis ingratas Nam praeter Vectium Valentem, hactenus ineditum, habet Heronis Spiritalia acceptiora multo quam exstant, Naumachiam item, non Leonis tantum, sed et Basilii cujusdam patricii: εἰκονας item Philostrati cum scholiis hactenus ineditis, ut alia non memorem.

Celeberrimum Wallisium, cui ego jam bis obligatus sum, rogo ut a me officiosissime salutes, eique promptitudinem meam denunties, si quid ille exquiri in Gallia Germaniaque aut alibi etiam cupit aut si qua alia occasio offertur utendi opera mea. Id fortasse libenter intelliges, mox proditurum esse tractatum Cl. Mariotti du Choc des Corps, in quo sententia, quam ille fovit dudum et quam Wallisius in tractatu de motu pulchre expressit, quamque ego, nulla horum conscientia, in Hypothesi illa mea attigeram breviter (Reflexionem ab Elaterio esse) multis experimentis elegantibus praeclare admodum confirmatur: unde satis apparituram arbitror, phaenomena Hugenio-Wrenniana ex abstractis motus principiis explicari non posse. Ego supposito itidem Elaterio, modum reperi explicandi mechanica claritate cur lumen in densioribus refringatur ad perpendicularem, in rarioribus a perpendiculari, cum contrarium evenire debere videbatur. Scis explicationem ejus rei visam difficillimam et Cartesianam hypothesin pororum assumtione innixam vix ullis nisi qui in verba magistri jurarunt, satis fecisse Cum ego praesertim tum rationibus tum experimentis evinci posse putem, perspicuitatem a porositate non pendere. Solutio phaenomeni manifesta est in Hypothesi mea; si tanti putas, ego mittam. Caeterum rem tibi haud dubie ingratam invitus nuntio, P. Pardies aliquot abhinc diebus obiisse; doleo jacturam viri docti et diligentis, et a quo non pauca utilia poterant exspectari. Tria ab eo opuscula sub praelo sunt, sed quae sint, nondum explicatum habeo: ubi intellexero, faxo ut scias. Credo, opticam ejus inter caetera fore, quod vellem sane. Scio enim id argumentum ab eo tractatum diligenter.

Memini te quaerere, cum apud nos essem, nossemne, quid Dn. de St. Hilaire circa magnetem novi haberet. Ego nunc ita accepi: Repertam ab eo rationem ope magnetis, a dato baculo ferreo, utrimque inaequali, abscindendi partem ponderis datam, ut sextam, quartam, tertiam, Magnete scilicet determinante punctum sectionis. Magnam id lucem utique philosophiae magneticae afferet.

Cl. Mariotus rem quandam perutilem agitat, sine ulla Aereometria aut virgula Stereometrica determinare, quantum liquoris vas aliquod datum figurae cujuscumque contineat. Ubi experimentis satis multis, ut solet, stabiliverit artem suam, non dubito, quin sit juris publici facturus.

Clarissimi Cassini observationes circa systema Saturnicum et maculas solares haud dubie jam sunt in manibus vestris. Extimus Satelles jam inde ab anno 1671 ab eo observatus, octoginta diebus periodum absolvit, intimus hoc demum anno detectus 5 et dimidio, medius, Hugenianus, diebus sedecim. Accessere observationes macularum solarium, quibus illud concluditur, revolutionem solis circa proprium axem absolvi circiter 26 diebus cum dimidio. Sed haec te dudum habere puto.

Hoc interea tuo favore nosse desidero: scis aestate praeterita publicatum illustris Hugenii experimentum de duabus tabulis vel laminis politis, in vacuo sive recipiente exhausto suspensis, ac ne pondere quidem inferiori appenso dissolutis; At ego me legere memini, in experimentorum elasticorum Boylianorum editione novissima, ubi sub finem, nisi fallor, in tabulis politis institutum experimentum recensetur, referri contrarium: Tabulas nimirum exhausto recipiente fuisse dilapsas. Librum hic non reperio ut eam dubitationem mihi adimere possim: quare rogo, ut librum, imo ipsum Ill. Boylium data occasione consulas; id enim nosse interest philosophiae.

An ut audio Cl. vir Isaac Vossius musicos veteres aut musicam veterem aut aliquid simile editurus sit, Tu optime noveris. Audio Oxonii nescio quem Geometras veteres publicaturum. Optem Wilkinsii Characterem latinum prodire quam primum; visum enim est mihi opus utilissimum. Ill. Boylium quaeso data occassione meis verbis saluta, eique cultum a me perennem denuntia: nihil est quod malim, quam continuatam ejus erga me benevolentiam, cujus indicium habebo, si, quod coram pollicitus est, Catalogum commutandorum mihi miserit. Ego eo non aliter utar, nec apud alios, quam ipse volet, satis enim in istis mihi cautelae est ac circumspectionis.

Desiderium meum, quod illustri Societati Regiae per literas exposueram, ubi occasio se obtulerit, exitum expectat.

Machina mea Arithmetica, officium suum plane factura uti absente me coepta erat, nunc ad finem decurrit, et magno ut video applausu generatim excipitur. Spero alia momenti non minoris mox secutura.

Attuli mecum Barrovii Lectiones Opticas; sub libri calcem doctissimus autor phaenomenon exhibet, cujus rationem reddere posse negat, aliosque ut inquirant hortatur aut ut si possint causam sibi communicent, rogat; dubitat vero ut id facile praestari possit. Hugenius tamen et Mariottus ejus solutionem se habere dixere.

Cum hoc scripsissem, exspectatissimas a te literas accepi, quibus Illustrem Societatem Regiam desiderio meo locum dedisse nuntias. Regiae Societati gratias rebus ipsis habebo, eique studia mea probare conabor.

Ad caetera literarum tuarum, profunda rei Algebraicae eruditione refertarum, justis literis respondere, et quae jubes, quae postulas, inquirere ac praestare conabor. Subtilissimo Collinio, tam praelara communicanti, obligatum me profiteor. Caeterum quod Mengolum ajunt praestitisse, quod ego promiseram, summam fractionum quarum nominatores sunt numeri Triangulares et Pyramidales etc., id fortasse ex promisso meo non satis recte percepto profectum est: quanquam enim nondum mihi inquirendi in Mengolum otium fuerit, conjicio tamen ex illis ipsis, quae in literis tuis repraesentas, Mengolum summas quidem iniisse serierum ejusmodi, $\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{15} \,\|\, \frac{1}{4}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{20} \,\|\, \frac{1}{5}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{70}$, sed finitarum, seu ad aliquem Terminum usque, qualiscunque tamen ille sit, continuatarum. At ego totius seriei in infinitum continuatae summam invenio Methodo mea $\frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{21}\ \frac{1}{28}$ etc. in infinitum, quod jam publice propositum esse, vel ideo non credidi, quia Nobilissimo Hugenio mihi primum propositum est hoc problema in numeris Triangularibus; ego vero id non in Triangularibus tantum, sed in Pyramidalibus etc. et in universum in omnibus ejus generis numeris solvi, ipso Hugenio mirante. Dominum Collinium autem de his infinitarum Serierum summis non loqui vel inde conjicio, quia exemplum hujus seriei affert $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$, quae si in infinitum continuetur, summari non potest, cum summa ista, non ut numerorum Triangularium sit finita, sed infinita. Sed nunc literarum spatio excludor.

Dominus Agar hic de frigore experimenta memorabilia fecit figurasque in variis congelascentibus summa diligentia observavit miras et curiosas; si quid distinctius ab ipso, ut spero, impetravero, te participem reddam. Interea vale et ac homini tui studiosissimo fave.

Paris $\frac{16}{26}$ April. 1673.

XXII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Jeudy dernier ie vous envoyay un pacquet assez large, l'addressant selon vostre ordre à vous sous le couvert de Mons. Boinebourg chez Mons. Heis. Ayant desia vous adressé une autre lettre de la mesme

maniere, sans avoir receu aucune responce là dessus, i'ay voulu prendre cete voye pour vous dire derechef, que vous fustez eleu le 9. de ce mois dans la Soc. royale nemine contradicente; et que ie vous ay respondu sur toutes les particularitez, si ie ne me trompe, que vous m'aviez proposées dans vostre lettre escrite de Paris, y ayant adjousté d'autres choses, que vous ne serez pas mury d'entendre. Je seray bien aise de recevoir promptement vostre responce etc.

le 14. Avril 1673.

XXIII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Hac ipsa hora gratissimas tuas d. 16. April. datas accepi, plurimorum argumentorum mihi pergratorum copia refertas. Noli ad singula hac vice responsum exspectare. Plane enim hoc tempore, ut fuse scribam, non vacat, remitto hoc ad alium diem, quo de omnibus rationem Tibi reddere, quantum pote conabor, simul et Amplissimo Huetio ea qua par est observantia, respondere. Duo duntaxat nunc seligo, de quibus amice te moneam. Prius est, ut Epistola ad ipsam R. Societatem data gratias ipsi agas de Electione. Alterum, ut promissi tui, publice in Coetu R. Societatis dati, memor, organum tuum Arithmeticum, quam primum fieri id commode et tuto poterit, ad nos transmittas: qua ratione honori tuo imprimis consules, et majorem invento tuo plausum apud nos conciliabis. Paucula haec in rem tuam, Te raptim volui; de caeteris brevi tempore fusius agam. Vale, et has lineolas Tibi redditas esse quantocius rescribe.

Dabam Londini d. 8. Maji 1673.

Jacturam feci notae, quae indicabat locum hospitii tui Parisiis; iterato mihi significare eundem ne graveris, rogo.

XXIV.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Non satis mirari possum literas, quas nuper ad Te dedi satis grandes, semiplagulam qualis haec est presse scriptam implentes, tibi non fuisse redditas. Scripseram earum partem, ut de Societatis Regiae voluntate denuo sciscitarer; interea Tuae advenere prolixae et multis rebus memorabilibus, ad Algebram imprimis et Geometriam pertinentibus, graves quibus nonnihil statim respondi, relinquamque partem earum, quas jam ante coeperam, literarum absolvi, easque altero ex quo Tuas acceperam die Tabellario publico commisi.

Quod summas attinet fractionum, quarum nominatores sunt numeri triangulares, pyramidales, aliterve figurati, quas a Mengolo initas indicas, ita respondi: Cum Mengoli liber non sit ad manus, videri ex relatione vestra, Mengolum summam tantum iniisse seriei talium fractionum finitae v. g. $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$, me vero summam invenire totius seriei infinitae $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$ etc. Quod praestitum esse vel ideo non puto, quia Illustris Hugenius eam Quaestionem mihi proposuit in nominatoribus tantum triangularibus, a se occasione eorum quae de alea inquisiverat, determinatam. Ego vero solutionem reperi universalem, qua summam non tantum infinitarum fractionum Triangularium, sed et infinitarum Pyramidalium et Triangulo-Triangularium etc. ineo, ipso Hugenio mirante. Si tamen idem et Mengolus praestitit, non miror; saepe enim concurrere solent diversi.

Quod vero subtilissimus Collinius (cui salutem a me officiosam nunties rogo) non de summa serierum infinitarum, sed certo terminorum numero constantium loquatur, vel id me credere fecit, quod de summa fractionum hujusmodi $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ (cujus termini sunt progressionis harmonicae) loquitur. Certum enim est, seriem istam in infinitum productam non esse (ut aliae plurimae fractionum infinitarum series) finitam nec summabilem. At vero hujus seriei in infinitum productae $\frac{1}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}$ etc. summam nondum fateor reperi, sed et necdum inquirendi satis diligenter otium habui. Theorema aliquod reperi nuper alia quaerendo, satis memorabile, ni fallor: si sint series, quas vides, infinities infinitae fractionum omnium quadratarum, cubicarum, quadrato-quadraticarum, simul summa omnium aequabitur unitati. Seu si a quantitate data auferas

primum quartam partem, deinde nonam, postea decimam sextam, item octavam, 27 am, 64 am, rursus decimam sextam, 81 am, 256 am etc. et ita porro in infinitum, quantitas data praecise exhaurietur.

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \text{etc.} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & \text{etc.} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{256} & \text{etc} \\ \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \end{matrix}\right\} = 1$$

Obtulere se nuper mihi Geometrica nonnulla, quae ubi nonnihil expolivero perscribam. At prolixiores tuas sumto tempore ample respondebo, et quae jussisti praestare conabor. Scripseram tibi jam in praecedentibus literis, R. P. Pardies obiisse, magno dolore meo. En tibi quae ab eo expectabamus: La Statique (dont il nous a donné une petite partie seulement), L'Optique, l'Algebre, l'Arithmetique, le comput Ecclesiastique, l'horologe Thaumantique, des Eclypses, la Cosmographie, la Geographie, l'Hydrographie, Recueil de quelques experiences modernes remarquables du mouvement des corps pesants, des Liqueurs, de l'ondulation et libration, de arte militari militiaque Graecorum, Romanorum et hodierna. Claudius Millet de Chales, ejus cursus mathematicus et tuae quoque literae meminere, Lugduni prodit, est ex societate Jesu. Accepi eum post introductionem generalem purae matheseos, elementa mathematice tractata, Terram, Aquam, Aërem, Ignem, nobis exhibiturum, quae sane methodus non videtur contemnenda, cum plerasque artes mechanicas comprehendat.

Est hic vir eruditus, et in experimentis egregie versatus Mons. Agar, qui circa gemmas, rem vitrariam, colores, frigus, putredinem multa magno studio annotavit; habet imprimis experimenta notabilia de Sympathia et Antipathia colorum qui scilicet in eadem tabula picta mixti se mutuo destruunt, deprimunt, attollunt: quod magni in artem pictoriam est momenti. Sed quae de variis figuris liquorum, frigore concrescentium, annotavit, plane insignia sunt. Sed vir est paulo morosior, ac lentior in producendis suis. Si placet, fac quaeso honorificam ejus mentionem in iis, quas mihi rescribes, literis; id eum excitabit fortasse ad colendum vobiscum commercium.

In machina mea arithmetica multa mutare coactus sum, ut (quod antea non poterat) additionem, multiplicationem eundo, subtractionem, divisionem redeundo exhibere possit. Alioquin enim hoc inest incommodi, ut in catena operationum super eundem numerum aut productum ex eo, subinde mutanda sit machina quod plurimum temporis perdit; idque mutari hic quoque non a viris tantum doctis, sed et aliis spectatoribus illustribus ad perfectionem machinae valde est desideratum. Nunc

tandem superata est ea difficultas, et machinam mox dabimus absolutam. Alias fusius, nunc ideo tantum scribo, ne aut de diligentia mea aut de literarum tuarum curatione sinistre suspiceris; interea vale faveque etc.

Paris. $\frac{14}{24}$ Maji 1673.

XXV.

Oldenburg an Leibniz.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London (Letter-book, VI, 121—123).

Jam antea paucis significavi, traditas mihi fuisse tuas d. 26. April. ad me datas. Exinde alteras accepi $\frac{14}{24}$ Maji exaratas. Gaudeo imprimis feliciter adeo superasse Te difficultatem in machina tua Arithmetica objectam, ut eam brevi numeris omnibus absolutam sis daturus. Suaserim omnino, ut datam Societati nostrae in consessu publico fidem quam primum liberare satagas. Interest existimationis tuae, ut id facias; interest mea, ut ad id praestandum te stimulem.

Respondi Huetio de Vectii Valentis codice Oxoniano, et opellam meam Praestanti Viro paratissimam obtuli: velim ipsum urgeas, ut Heronis Spiritalia (quae multo auctiora ipsum habere quam quae exstant, asseris) nec non Leonis et Basilii Patritii Naumachiam juris publici faciat; ad haec Vitruvii Celsique novam editionem maturet. Spero, ex ejusmodi lucubrationibus quales sunt Wallisii, Hugenii, Leibnitii, Mariotti, Wrenni et similium, doctrinam de Motu tandem perspectam fore. Rem omnino gratam feceris, si quae Tu de porositate, a Cartesiana hypothesi abludentia, me dicatus (?) es, mihi transmiseris.

Quod tu ex Dni. St. Hilarii sententia circa Magnetem annotas, eget explicatione, quam proinde proximis tuis literis a te exspecto. Modum determinandi capacitatem vasis cujuscunque figurae sine ulla stereometria aut virg. stereometrica non capio; ut eam Clar. Mariottus, quem ex me plurimum salvere velim, stabiliat et in lucem emittat, impense opto.

Necdum vidimus Celeberr. Hugenii de Pendulorum motu Tractatum. Interim nobilis quidam Anglus ex occasione demonstrationis, a Rev. Dno. Pardies ad libelli sui statici calcem exhibitae, suam de vibrationum in

cycloide peractarum synchronismo demonstrationem Transactionibus Philosophicis, jam sub praelo sudantibus, et per tabellarium proximum Parisios mittendis commisit.

Experimentum illud Boylianum de duabus Laminis politis, in recipiente exhausto ab invicem dilapsis, bona fide a se enarratum ait Boylius; de aliorum Experimentis respondere non potest.

Lubentissime accipiam Barroviani in Lectionibus Opticis phaenomeni solutionem, ab Hugenio et Mariotto, ut ais, inventam. Quod ad series illas fractionum attinet, quarum denominatores sunt numeri figurati, sive finiti illi sint sive infiniti, Dn. Collinius ait, Mengolum in libro suo de Addit. fractionum, sive quadraturis Arithmeticis, ostendere modum eos addendi omnes; at quando ad illam accedit Fractionum seriem, quarum denominatores sunt in progressione Arithmetica, demonstrare Mengolum, quamlibet ejusmodi seriem infinitam majorem esse quovis numero assignabili; atque idem eum facere de cujusvis ejusmodi seriei quadratis et cubis, affirmantem, tentatum a se fuisse finiti terminorum numeri in seriebus modo dictis additionem, at imparem se operi comperisse, idque ditioris ingenii adminiculum postulare. Quaerit itaque Collinius, an Methodus tua ad id praestandum se extendat; nostram, inquiens, id praestare infinitamque approximationem praebere. Addit idem Collinius, cum assignaverit tibi summam 100 terminorum in serie fractionum musicalium, atque ut significes petierit, methodusne tua potis sit majorem minoremve numerum simul addere, manifestum satis fuisse, ipsum (Collinium puto) non potuisse de infinitae seriei summa intelligi.

Quod Theorema tuum attinet, in posteriori tua epistola commemoratum, Collinius ait, non sibi novum videri fractiones illas, a Te positas, addere deorsum, cum denominatores earum in continua tunc proportione se habeant; at si seperatim et lateraliter eas sumas, $\frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}$ etc. quaerit idem, an eo casu addere eas possis. Spero, quae elaboravit nuper denatus Dn. Pardies, lucem suo tempore visura, et Societatem illam in eo futuram, ne viri docti lucubrationes pereant. Videre aveo, quae D. de Chales circa elementa mathematica methodo tractavit: Inprimis vero eruditissimum Dn. Agar sollicitari et urgeri velim, ut eximia, quae ipsum habere intelligo, de Frigore, pntretudine, gemmis, re vitriaria, Coloribus, iisque quae ad ornandam augendamque pictoriam artem faciunt, meditata et experimenta in lucem emittat; maxime hoc pacto sibi devinciet universum doctorum orbem, et nostrates praesertim Anglos, et prae aliis omnibus, Nobilissimum Boylium et Oldenburgium tuum. Hoc ipsi ex me, addita salute officiosissima significare ne graveris oro. Vale.

Dabam Londini d. 26 Maji 1673.

XXVI.

Illustri Societati Regiae Britanniae Gotofredus Guilielmus Leibnizius.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Quas sub discessum ex Anglia meum ad vos dederam literas, eo favore in consessu vestro exceptas, quem homo mei similis non ausit sibi sine temeritate polliceri, ex clarissimo viro Henrico Oldenburgio, Secretario vestro, intellexi, a quo nuntiatum mihi est, conspirantibus suffragiis in sociorum numero me quoque fuisse cooptatum. Grave fateor munus mihi impositum est, accedere tot lectis viris, in quos omnium oculi conversi sunt, quibus nemo gregarius misceri potest, quin nimia dissimilitudine prodatur: quando tamen ex vestra quoque sententia non ingenio tantum, sed ex labore litari potest philosophiae, nec tantum cogitationum subtilitas, sed et industriae specimina quaeruntur, resumo animum neque despero, posse me apud vos gratitudinem quoque meam ultra verba testari: illud certe spondeo, memoriam beneficii me (non?) depositurum, neque commissurum, ut opera, quam philosophiae frugiferae, aut cultus, quem vobis ejus propagatoribus debemus, ab homine vobis deditissimo desideretur.

Dabam Parisiis 1 Junii 1673.

Leibniz erwähnt in seinem ersten Briefe an Oldenburg das große Problem, das er seit seinen frühesten Studien das ganze Leben hindurch verfolgt hat, eine allgemeine Charakteristik (lingua universalis) zu finden. In den folgenden Briefen kommt er darauf zurück, und zeigt sein Interesse für die Schriften, die in England über denselben Gegenstand erschienen waren, namentlich für die von John Wilkins. Wie zu erwarten war, brachte Leibniz auch während seines Aufenthaltes in London in seinen Unterredungen mit Boyle und Oldenburg die allgemeine Charakteristik zur Sprache. Er hat darüber in der Schrift von Georg Dalgarno: Ars signorum, vulgo character universalis et lingua philosophica, London 1661, die er nach Paris mitnahm, Folgendes an-

gemerkt: Hoc inventum prosecutus est et ad finem perduxit Johannes Wilkinsius, Episcopus Chrestrensis, philosophus mathematicus et theologus insignis, qui inter societatis Regiae Anglicanae fundatores censeri potest. Videatur opus praeclarum Characteris philosophici quod in fol. Londini prodiit.

Verum quemadmodum ego coram indicavi Roberto Boylio et Henrico Oldenburgio, videntur egregii viri magnitudinem rei verumque usum non satis animo complexi. Nam illorum sive Lingua sive scriptura hoc tantum efficit, ut inter lingua dissitos commoda institui possit communicatio; sed vera Characteristica Realis, qualis a me concipitur, inter optissima humanae Mentis instrumenta censeri deberet, invincibilem scilicet vim habitura et ad inveniendum et ad retinendum et ad dijudicandum. Illud enim efficit in omni materia, quod characteres Arithmetici et Algebraici in Mathematica: quorum quanta sit vis quamque admirabilis usus sciunt periti.

Sed de his rogatu clarissimorum e societate Regia Virorum peculiarem molior dissertationem

Diese in Aussicht gestellte „dissertatio peculiaris" ist nicht vorhanden. Das folgende Schreiben, in welchem Leibniz seine Ideen in Betreff der allgemeinen Charakteristik eingehend erörtert und das ohne Zweifel nach seiner Rückkehr von London während seines Pariser Aufenthaltes abgefaßt ist, findet sich unter seinen Papieren.

XXVII.

Leibniz an Oldenburg.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Petis a me, Vir Cl^{me}, ut paulo fusius agam de Characteristica illa reali, cujus jam aliquoties inter nos mentio incidit. Scripseram tibi jam tum, si bene memini, quam de ea habeo notionem ab eorum institutis plane diversam esse, qui scripturam quandam universalem Chinensium exemplo condere voluere, quam in sua quisque lingua intelligeret, aut qui linguam etiam philosophicam sunt moliti quae ambiguitatibus et anomaliis careret. Quanquam eadem praestari debeant illa quoque quae ego desidero, majus tamen aliquid et continere debet et simplices linguae sive scripturae usus infinitis modis supergreditur; ita enim sentio, si quando hac quam optamus frui fas erit, omnium consensu inter potissima bona habitum iri, quae humano generi contingere possunt.

Nihil enim hominibus evenire majus potest quam perfectio functionum mentis; scripturam autem rationalem ajo potissimum rationis instrumentum fore, minimumque ejus usum censeri debere commercium inter gentes lingua dissitas, tametsi ille fortasse ad ejus introductionem plurimum valiturus sit apud homines populariter doctos qui non nisi illis tanguntur, quae in sensus incurrunt. Quaeres, quid monstri sit characteristica illa, de qua tam magnifice sentio? sed brevibus de re tam late fusa pro dignitate dicere difficile est. Unum hoc suffecerit inter hanc aliasque tantum interesse, quantum (exempli causa) inter notas mathematicas Vietae et Herigoni, aut quantum inter z et a^2, aut quantum inter $\frac{y^2+y}{2}$ et △, quorum utrumque numerum triangularem repraesentare potest, vel denique quantum inter characteres Arithmeticorum et Astrologorum. Alii enim characteres compendii tantum aut commercii vel etiam arcani causa reperti sunt, alii inventionem augent ac judicium dirigunt. Hieroglyphicae Aegyptiorum aut Chinensium et apud nos notae Chymicorum characteristicae realis exempla sunt, fateor, sed quale hactenus autores designavere, non qualis nostra est. At Arithmeticam et Algebram inter mei instituti specimina recenseo, ut videas ejus quoque jam tum exempla haberi. Alia autem eaque plane nova atque inexpectata non deerunt, ubi tute tempestivam in eo genere judicabis diligentiam meam, id est ubi videbis esse qui rei magnitudine animo concepta quo par est ardore ad juvandam rempublicam ferentur collatisque plurium studiis reapse suscipiendum opus arbitrabuntur. Tum vero candide omnia exponam quae in eum usum meditata habeo, quae sane multa esse non nego. Rem enim jam a decimo octavo aetatis anno agitavi et quotidianis experimentis in instituto sum confirmatus, tametsi rudia satis prima cogitata essent.*) Caeterum nihil refert, an scripturam tantum universalem, an vero et linguam condere velimus; facile enim est utrumque eadem opera efficere. Lingua haec sive scriptura difficillime condetur, facillime discetur. Qui linguam hanc discet, simul et discet Encyclopaediam, quae vera erit janua rerum; quemadmodum apud Chinenses, ita hic quoque non erit necesse omnes totam linguam nosse, quemadmodum nec omnes in omnibus scientiis versatos esse necesse est. Erunt tamen quaedam omnibus communia, quemadmodum ex scientiis quaeque Meta-

---

*) In dem ersten Entwurf dieses Schreibens steht hier folgende bemerkenswerthe Stelle: Unum tantum novi scriptorem, summum virum qui in suspicionem aliquam ejusdem consilii venit, cujus insignem sane locum mihi indicarunt amici, non ante ab ipsis intellectum, quam ubi de meo disserebam. Ex quo illud quidem agnovi rei magnitudinem ab eo perceptam, sed vias quibus ad eam perveniri possit, nondum illi fuisse exploratas, satis ex ejus reliquis scriptis deprehendo. Leibniz hat später diese Stelle durchstrichen. Es ist kein Zweifel, daß er hier auf Wilkens hinweist.

physica et Ethica vera omnibus explorata esse deberent Qui linguam hanc semel didicerit, non poterit ejus oblivisci, aut si obliviscatur, facile omnia necessaria vocabula ipse sibi reparabit. Quicunque de aliquo argumento loqui aut scribere volet, huic ipse linguae genius non tantum verba, sed et res suppeditabit. Ipsi cujusque rei nomen clavis erit omnium quae de ea dici, cogitari, fieri cum ratione debeant. Equidem fateor et res ipsa clamat non posse nunc quidem ex nomine quod auro (exempli causa) imponemus, duci phaenomena quaedam chymica quae dies et casus detegent, donec sufficientia phaenomena ad reliqua determinanda nacti simus. Solius Dei est, primo intuitu hujusmodi nomina imponere rebus. Nomen tamen quod in hac lingua imponetur, clavis erit eorum omnium quae de auro humanitus, id est ratione atque ordine sciri possunt, cum ex eo etiam illud appariturum sit, quaenam experimenta de eo cum ratione institui debeant. Eadem tamen res varia nomina habebit. Et quemadmodum olim quae in terris Roma, in coelo Amaryllis appellabatur, si Etruscis flaminibus credimus, ita salvo ipsius linguae universalis genio, imo ita ferente ejus natura, alio vulgus, alio sapientes nomine easdem saepe res censebunt. Et is plura in promtu habebit qui plura ejus nomina memoria tenebit. Quare hujus quidem linguae usu non exaequabuntur ingenia (tametsi diligentia et labore unusquisque quidvis possit) sed velut lapide Lydio discernentur, nam proportione dotium suarum unusquisque ejus usu fruetur. Et qui memoriae vi atque imaginationis facultate pollebant, habebunt hic quoque, unde admirationem de se excitare possint. Verum ut inventione distinguentur, ita judicio omnes aequabuntur, et qui eo parum instructus est a natura, supplebit arte defectum, si modo grammatica praecepta et inprimis syntaxin hujus linguae probe didicerit et a soloecismis diligenter caverit, qui sese detegent ipsi, cum ad constructionem attendemus. Miram tibi Grammaticam narrare videbor, sed tum vere philosophicam esse scito, nec a Logica divellendam. Illud autem quantivis pretii erit, quod in hac lingua nemo de argumento scribere poterit quod non intelligat. Si facere conabitur, aut ipse se nugari agnoscet et lector quoque, aut discet inter scribendum, scriptura enim et meditatio pari passu ibunt, vel rectius dicam, scriptura erit meditandi filum. Post tot de inventione, de Methodo, de Logica scriptores etiam optimos desideratur semperque desiderabitur filum meditandi, donec Lingua realis constituetur. Filum autem Meditandi voco quandam sensibilem et velut mechanicam mentis directionem quam stupidissimus quisque agnoscat. Pontem noctu transituro regulam hanc praescribere possum ut recta procedat nec in dextram sinistramve evagetur, si salutem suam amat; huic praecepto poterit ille satisfacere

magna cura et industria adhibita, sed si munita utrinque pontis latera erunt, aberit periculum et sollicitudo. Omnia ordine instituenda esse, nihil nisi clarum distinctumque certum admittendum esse, difficultatem in partes distribuendam, medium tenendum, finem respici debere, rectam rationem semper exaudiendam: haec sunt praecepta philosophorum, egregia quidem illa, sed quibus fere non nisi a magnis viris quadam potius naturae et institutionis bonitate, quam vi methodi paretur. Filum autem meditandi semel datum efficiet ut determinata ratione in plerisque progredi possimus, adeoque homines a magna anxietatis parte liberabit et dabit homini quibus ingenia torqueri solent. Quantae autem in sapientiae studio hinc secuturae sint mutationes, prudentibus judicandum relinquo. Tum demum enim vere evigilabunt homines, cum non difficilius videbitur ratiocinari quam loqui, cum recta ratione uti ludus, cum ordine procedere consuetudo ac velut formula erit, cum inter loquendum ipsa phrasium vi, lingua mentem praecurrente praeclaras sententias effutient imprudentes et suam ipsi scientiam mirantes, cum ineptiae sese ipsae prodent, nudo vultu ab ignarissimo quoque deprehendentur. Quantam nunc fore putas felicitatem, si centum abhinc annis talis lingua coepisset. Mira enim celeritate succrevissent artes et aucta in immensum humani ingenii facultate anni pro seculis fuissent. Non tubi, non microscopia tantum oculis adjecere, quantum istud cogitandi instrumentum capacitatis dedisset. Dedisset vero, dabit si volumus; nam neque tu neque ego adeo aetate provecti sumus, ut nequeamus ipsi forte primitiis tantae artis frui, si velint egregii viri collatis studiis in rem incumbere, quae una omnium maxime seculum nobilitabit. Nam post inventa pro visu, pro auditu organa, menti ipsi age novum Telescopium construamus, quod non sideribus tantum, sed et ipsis intelligentiis nos propiores reddet, nec tantum corporum superficies repraesentabit, sed et interiores rerum formas deteget. Quam multa ignoramus ac adhuc diu ignorabimus quae jam tum in potestate essent, si possent electorum causa dies abbreviari, id est si tantum ratiocinandi compendium innotesceret, quod nobis omnem nostro ingenio suppellectilem cum acquisitione in conspectu locaret, ut frui jam tum liceat opibus nostris et velocissimo scientiae foenore mox in immensum ditescere, cum alioqui tantum posteritati materiam praeparaturi simus, qua frui nobis non licebit.

Habes hic, Vir Cl^me^, qualecunque meum sive consilium sive si mavis votum, quod finiam, ubi hoc unum denique monuero. Quidquid etiam agent, ferent, molientur eruditi, id alio seculo, aliis hominibus profore, posteritati nos tantum materiam praeparaturos, nisi casu prodituram, qua frui ipsimet non possimus, donec aut hoc de quo dixi, aut simile aliquod institutum facile recipietur. Sed non est cur des-

peremus; non regalibus thesauris, non maximis sumtibus, non gentium consensu opus est ad eruendam veritatem: sunt pauci satis, et paucis licet esse beatis. Ita enim judico decem homines lectos et consentientes et necessariis scientiis instructos plus aliquot lustris facturos, quam totum genus humanum sparsis et tumultuariis multorum seculorum molitionibus possit. Haec Tibi liberius scripsi, Vir Cl^me^, quae nolim nisi illis innotescere quos talium capaces putas. Vale.*)

XXVIII.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Diu est quod nullas a me habuisti literas, sed ejus rei causam aliquando coram rectius dicam Nunc vero non potui quin amicum ad vos euntem, cum aliter nequeam, saltem Epistola comitarer. Ingenium ejus et eruditionem variam, nec vulgarem, primo congressu tute observabis, nisi forte eum nosti dudum; nam si bene memini, nunc tertia vice Angliam videt.

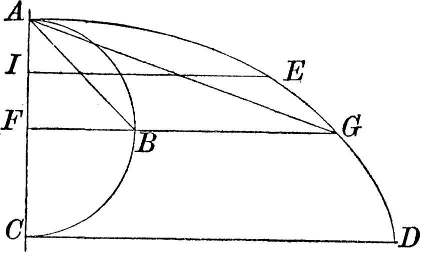
De me illud habeto. Instrumentum Arithmeticum tandem aliquando post maximas difficultates sumptusque non parvos feliciter absolutum esse. Effectum qui videre admirati sunt omnes. Dato enim v. g. numero multiplicando Decem Notarum sive Ciphrarum, et alio Multiplicante Notarum (si ita vis) quatuor, Productum Multiplicationis Rotae cujusdam Conversionibus quatuor nullo animi labore, nulla additione interveniente haberi posse. Breviter, Numerum Multiplicandum quantumcunque aeque cito et facile multiplicari posse per Multiplicantem datum, ac Multiplicandum alium quantulumcunque, nemo facile credidisset. Id vero machina jam perfecta, in exiguo quidem, cum quatuor notas nondum exeat, ostendit tamen. Exemplum ejus non nisi unicum nunc quidem habeo, idque vix nuper absolutum. Antea enim, quanquam effectum dudum, nonnihil tamen claudicabat. Lassari aliquot opificum patientiam, atque aegre tandem hominem inveni, qui honorem lucro praeferret.

---

*) Ohne Ort und Datum.

Respirat ille nunc nonnihil aliisque laboribus vacat, ne exteris notitiis excidat. Sed promisit opus mox iterum aggredi, pluresque eadem opera elaborare, ex quibus unam ego Illustri Societati Regiae servabo, ejusque ad vos ipse lator ero, ubi primum alia permittent, quae me multis modis distrahunt. Incumbunt enim mihi labores quidem inter se plane diversi, quos partim Principes a me exigunt, partim Amici. Unde parum temporis restat, quod inquisitioni naturae et contemplationibus Mathematicis impendere possim. Suffuror tamen, quantum licet, et saepe animum ad ista propendentem explere, quam commodis meis velificare malo.

In Geometria quaedam detexi, felicitate singulari potius quam studio multo. Ex multis tibi unum memorabo Theorema perelegans nec quantum scio antea notum, saltem non illis quibus locutus sum Geometris sane maximis.



Semicirculo ABC in plano CD provoluto, Semicycloeides linea AED descripta intelligatur. Ex F centro Semicirculi volvi incipientis, recta FBG, basi CD parallela, educatur, Semicycloeidi occurrens in G. Jungantur Rectae AB, AG. Ajo AGEA segmentum Semicycloeidis aequari Triangulo AFB, seu semiquadrato a Radio Circuli generatoris.

Hoc primum est segmentum Obliquum, cujus habetur Quadratura; Secundum autem Segmentorum ejus in universum, cognitae mensurae, ne Circuli quidem dimensione supposita. Primum enim quadravit Illust. Hugenius diversae plane ab hoc naturae spatium scilicet AJEA, quarta Radii*) parte AJ, recta basi parallela JE et portione Cycloeidis EA comprehensum.

Alia mihi Theoremata sunt momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile est, cujus ope Area Circuli vel sectoris ejus dati exacte exprimi potest per Seriem quandam Numerorum rationalium continue productam in infinitum. Sed et Methodos quasdam Analyticas habeo, generales admodum et latefusas, quas majoris facio quam Theoremata particularia et exquisita.

Illustri Boylio rogo me data occasione commendes. Nolim virum eximium scriptis eorum quos nuperrime ejus Pneumatica Experimenta ac Ratiocinationes aggressos audio, diverti ab illis, quibus multo melius mereri de publico potest, Chymicis experimentis: quae utinam ne diu-

*) Lege Axis vel Diametri. Bemerkung von Wallis.

tius publicis precibus neget. Intactum est hoc doctrinae genus saltem Philosophis. Primus est Boylius qui non dicam nugari desiit, sed demonstrare coepit. A quo si corpus quoddam Chymicum impetrare poteris, obligabis profecto genus humanum Dici enim non potest, quanti ad omnem vitam momenti sit Chymia. Ego certe pro valetudine Viri vota facio, nam vereor ne aliquando jacturam irreparabilem faciamus, culpa quorundam obtrectatorum, qui saepe viros, publico bono natos, a suis publicandis absterrent. Vale, ac nominis tui virtutumque Cultori fave.

Dabam Lutetiae Parisiorum, XV. Jul. 1674.

XXIX.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Non dubito quin literas a me Dno. Waltero ad vos eunti datas acceperis, quamquam Dn. Vernon negaverit, ex relatu tuo, literas a me tibi redditas. Sed hoc ita interpretor, Vernonem ante adventum Walteri a vobis discessisse.

Utor commoditate euntis ad vos amici, potius ne non scribam, quam ut scriptu digna habeam. Adjicio Tubae Stentoreae Explicationem, a Gallo quodam factam, sed quae vix quicquam satisfacit.

Edetur hic Algebra quaedam, cujus Autor Regulam Cartesii de Aequationibus Quadrato-quadraticis ad Cubicas revocandis negat esse Universalem: sed quantum ex sermonibus, quos ea de re mecum habuit judicare possum, labitur ipse. Cartesii enim Regula, e Vieta transumta, a Beaunio et Huddenio etiam demonstratione confirmata est, et mihi ipsi aliquando alia quaerenti, ea ipsa Regula exiit.

Jacobus Osanna, de quo tibi aliquando locutus sum, et cujus P. Billy in scriptis suis cum elogio meminit, monstravit mihi nuper Diophantum suum, mox prelo committendum, ad Symbola revocatum. Adjicit passim Quaestiones a Diophanto et Bacheto praetermissas. Sed et librum septimum addet, refertum quaestionibus Paralipomenum. Is Problema publice proposuerat, jam anno abhinc et ultra: Invenire tres numeros, ita ut differentiae duorum quorumlibet qua-

dratorum sint quadrati, et differentiae duorum quorumlibet quadratorum ab ipsis sint etiam quadrati. Ejus Problematis solutionem curaverat edi Petrus Mengolus, credens demonstratam a se ejus impossibilitatem. In quo eum lapsum esse ostendit Osanna, editis mox ipsis numeris.

Ab eo tempore idem Osanna aliud proposuit Problema, schedula impressa et distributa, quod ita habebat: Mathematicis Problema unicum: Invenire tres numeros, quorum summa, Quadratus, et summa Quadratorum ab ipsis sit Quadrato-quadratus.

Forte cum colloqueremur, dixi ei, non videri haec Problemata tanti, et esse quodammodo in nostra potestate, si quis laborem subire velit. Hoc ille accipiens, provocavit me ad solutionem per amicos, quibus dixerat, me talium facilitatem jactare, nullo specimine edito. Ego ita coactus sum aggredi solutionem, quae successit mirifice. Nam cum ipsius Osannae ingentes sint numeri, ego exiguos inveni, admodum proposito satisfacientes. Et quod est amplius, solutionem reperi indefinitam, quam fassus est se non habere. Possum enim efficere, ut summa numerorum sit Quadratus datus, sed et possum efficere, ut summa quadratorum sit Quadrato-quadratus datus. Haec tanti non putarem ut Vobis scriberem, nisi apud Mathematicos nostros strepitum fecissent.

Certe alii quidam his oris insignes, ut ipsi se appellari amant, Analytici, etiam nunc solutionem ejus Problematis frustra quaerunt.

Diophantum ipsius Osannae puto fore lectu dignum. Dat enim operam ut Lemmata omnia ex numerorum natura petita expurget, et ut semper ostendat ipsum inveniendi modum Analyticum. Sed haec quidem vel ideo scriptu digna putavi, quia Diophantum Symbolicum apud vos quoque edi editumve esse intelligo. Majoris ad usum vitae momenti est profectus Geometriae, et inprimis Dimensio Curvilineorum, unde saepe praeclara Problemata Mechanica pendent.

Porro, in ea Geometriae parte rem memorabilem mihi evenisse nuntio. Scis Dnum. Vicecomitem Brounkerum et Cl. virum Nic. Mercatorem exhibuisse Infinitam Seriem numerorum rationalium, spatio Hyperbolico aequalem. Sed hoc in Circulo efficere hactenus potuit nemo. Etsi enim Ill. Brounkerus et Wallisius dederint numeros rationales magis magisque appropinquantes, nemo tamen dedit progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatae summa sit exacte aequalis Circulo. Id vero mihi tandem feliciter successit: inveni enim seriem numerorum valde simplicem, cujus summa exacte aequatur Circumferentiae Circuli, posito Diametrum esse Unitatem. Et habet ea series id quoque praeclari, quod miras quasdam Circuli et Hyperbolae

exhibet harmonias. Itaque Tetragonismi Circularis Problema jam a Geometria traductum est ad Arithmeticam Infinitorum, quod hactenus frustra quaerebatur. Restat ergo tantum ut Doctrina de Serierum seu Progressionum numericarum summis perficiatur. Quicunque hactenus Quadraturam Circuli exactam quaesivere, ne viam quidem aperuere, per quam eo pervenire posse spes sit, quod nunc primum a me factum dicere ausim. Ratio Diametri ad Circumferentiam exacte a me exhiberi potest per rationem non quidem Numeri ad Numerum (id enim foret, absolute invenisse) sed per rationem Numeri ad totam quandam Serîem numerorum rationalium valde simplicem et regularem. Eadem methodo etiam Arcus cujuslibet, cujus Sinus datur Geometrice, exhiberi per ejusmodi seriem valor potest, nullo ad integrae Circumferentiae dimensionem recursu: ut adeo necesse non sit, arcus rationem ad circumferentiam nosse.

Quid apud vos agatur, vicissim ubi vacaverit indicabis, inprimis de re Medica et Chymica. Illustrem Boylium et Clarissimos Viros Wallisium et Hookium a me quaeso saluta. Et hunc stimula, ut promissam nobis Microscopiorum et Telescopiorum perficiendorum rationem urgeat, quo nihil utilius praestare potest.

Vale faveque etc.

Paris. 16. Octob. 1674.

XXX.

Oldenburg an Leibniz.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Idem qui tuas antehac rite mihi tradidit, hasce meas Tibi quoque citra omne dubium fideliter reddet. Machinulam tuam Arithmeticam, quam perfecisse Te antehac jam significasti, lubentes equidem lustraremus, si promissi tui Soc. Regiae in publico congressu facti memor, occasione commoda transmittere eam velles.

Gratias interim ago pro Diatriba, Tubae Stentorophonicae explicationem moliente, quae tamen vix magis nostratibus quam Gallis satisfecit.

Ad ea quae de Jacobi Osannae consilio memoras, Diophantum suum Symbolicum praelo committendi, scire te velim Kerseyum nostrum, quidquid difficile in Authore illo occurrit, permultaque alia Problemata gemina, Analytice resoluta, sermone Anglico jam evulgasse, partemque Systematis sui Algebraici tertiam soli isti argumento pertractando impendisse. Quod vero spectat duplicatam Diophanti aequalitatem (quae novum illud inventum Fermati constituit) eam a Jacobo Gregorio Scoto, e Soc. Regia, magnopere provectam esse intelligo. Quod de profectu in Curvilineorum dimensione memoras, bene se habet; sed ignorare te nolim, Curvarum dimetiendarum rationem et methodum a laudato Gregorio, nec non ab Jsaaco Newtono, ad curvas quaslibet tum Mechanicas tum Geometricas, quin et circulum ipsum se extendere, ita scilicet ut si in aliqua curva ordinatam dederis, istius methodi beneficio possis lineae curvae longitudinem, aream figurae, ejusdem centrum gravitatis, solidum rotundum, ejusque superficiem, sive erectam, sive inclinatam, solidique rotundi segmenta secunda, horumque omnium conversa invenire; quin et, dato quolibet arcu in quadrato, Logarithmicum sinum, tangentem vel secantem, non cognito naturali, et conversim computare. Quod vero ais, neminem hactenus dedisse progressionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatae summa sit exacte aequalis circulo, id vero Tibi tandem feliciter successisse, de eo quidem Tibi gratulor, sed adjungam, quod nuper a viro de rebus hisce sollicito accepi: Supra dictum nempe Gregorium in eo jam esse, ut scripto probet exactitudinem illam obtineri non posse. Quod tamen minime a me dictum velim, ut ingenium studiumque tuum sufflaminem, sed pro meo in Te affectu cautum reddam, ut talia scil. probe tecum volvas revolvasque priusquam praelo divulges.

De caetero, cum scire aveas, quae apud nos agantur, paucis dicam. Doctor quidem Medicus, Danielis Coxi nomine, e Soc. Regia, modum edidit perfacilem, e quibusvis Vegetabilibus spiritus volatiles eliciendi, probavitque porro, nullum sal Alcali seu Fixum in ullo prae-existere subjecto, priusquam actioni ignis expositum id fuerit: Ad haec, evicisse se putat, omnes spiritus volatiles et vinosos probe depuratos ab oleisque suis penitus immunes redditos, plane homogeneos esse. Extant haec omnia in nuperis quibusdam Transactionibus philosophicis, quas una cum caeteris omnibus in amici gratiam, Dn. Walterus Parisios se transportare mihi affirmavit. Illustris Boylius nova quaedam, ni fallor, mox praelo exitura composuit, de Latentibus scil. nonnullis Qualitatibus Aëris, nec non de Corporum in Vacuo Boyliano conservatione, deque Metallorum Accretione: Cui diatribam annectit geminam, quarum una suctionis indolem enucleatius explicat, altera Dni. Hobbii proble-

mata de Vacuo sub examen vocat.*) Quae Dn. Hookius molitur circa novum quendam Quadrantem Astronomicum insignissimi, ut ipse vult, usus, harum lator, vel etiam ipsum scriptum Authoris, sub praelo nunc sudans, fusius exponet. Omnia haec sermone Anglico quae tamen brevi, putem, in Latinum vertentur. Vale, et si vacat ocius rescribe.

Dabam Londini d. 8. Decebr. 1674.

XXXI.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London (Letter-book, VII, 213—5).

Scribere distuli de die in diem, quod maturius absolutum iri crederem, quae nunc mitto. Sed neque vobis mittere, neque hic publicare volui, antequam reapse executus essem; saepe enim plurimum cogitationes ab eventu distant, et praxis a Theoria tumultuaria nec satis digesta valde discrepat.

Inventi ratio in eo breviter posita est: Ajo machinam a me exhiberi motus cujusdam aequabilis, ac tempus in intervalla pauca, inter se aequalia atque continuata, dividentis. Aequabilitatem autem ex ipsa machinae constructione (quamdiu scilicet materia non alteratur aut corrumpitur) necessario demonstravi, nec ullis observationibus physicis niti, sed ex ipsa constructione constare ac proinde aliorum motuum explorandorum certam infallibilemque mensuram dare posse. Principium autem machinae ita facillime percipies. Finge disposita esse in orbem exigua quaedam elateria tensa. A primo manu liberato atque ita disploso liberari secundum, ab hoc disploso tertium, ab hoc quartum etc.: donec ultimum rursus veniat ad liberandum primum, quod plane, quemadmodum ante, tensum jam dudumque iterum paratum invenit, vi scilicet ordinaria primi mobilis horologii continue agente, et quaecumque displosa invenit elateria, in priorem statum re-tendente, antequam absoluta periodo ordo rursus unumquodque attingat. Quo posito, facile intelligitur, periodos has sive circulationes continuo ac sine interruptione duraturas, quamdiu

*) Die Worte Quae Dn. Hookius bis fusius exponet fehlen in der Abschrift.

durabit primi mobilis horologii motus, et periodos omnes inter se fore aequales. etsi exiguorum elateriorum vires sint inaequales, et inaequalitatem, quae in ipso horologii corpore et motu primi mobilis contingere potest, periodos non variare. Porro in executione quam publicavi atque impressam mitto, duobus tantum exiguis elateriis usus sum. Et habeo aliam adhuc constructionem, longe simpliciorem et exiguis horologiolis aptissimam. Sed nondum sum executus, quod mature tamen facturus sum, Deo volente. Interea machinam jam absolutam, etsi rudiorem et majusculam, effectui tamen demonstrando sufficientem, plusculis diebus cum pendulo aliquo comparabo. Quanquam facile ostendi possit in pendulo, qualia hactenus habuimus, non veram et ex constructione machinae exactam, sed vero sic satis pro communi usu propinquam motus aequabilitatem haberi: mea autem machina tantae sit capax certitudinis, quanta ab hominibus expectari potest, ut facile ex responsione ad objectiones judicabis, ubi legeris.

Venio ad epistolam tuam: Scribis Jacobum Gregorium vestrum nescio quid demonstraturum se minari, quod Tu meae de quadratura circuli Arithmetica demonstrationi adversum putas. Sed Gregorius hoc tantum demonstrare pollicitus est, rationem Diametri ad circumferentiam nulla aequatione sive relatione analytica exacte exprimi posse, quod mihi non est adversum, qui seriem infinitam, sed numerorum rationalium, eamque valde simplicem affero, cujus summa exacte aequalis circulo, posito diametrum esse unitatem. Sentiunt insignes quidam mathematici, vix quicquam in eo genere mirabilius visum; eaque et Hugenii sententia est, inventum hoc valde memorabile esse. Si seriem finitam numerorum, cujus summa circulo aequalis, me habere dicerem, Gregorius mihi obstaret.

Scribis, Cl. Newtonum vestrum habere methodum exhibendi quadraturas omnes, omniumque curvarum superficierum et solidorum ex revolutione genitorum dimensiones, et centrorum gravitatis inventiones, per appropinquationes scilicet, ita enim interpretor. Quae methodus si est universalis et commoda, meretur aestimari, nec dubito fore ingeniosissimo Autore dignam. Addis, tale quid et Gregorio innotuisse. Sed quoniam Gregorius in suo libro Geometriae Universalis fatetur, nondum sibi rationem innotuisse dimetiendi curvas Hyperbolae et Ellipseos, indicabis mihi, si placet, an vel ipse vel Neutonius ab eo tempore invenerint, et si habent, an absolute habeant, quod vix putem, an ex supposita Circuli aut hyperbolae quadratura.

Memini, Te aliquando mihi scribere, Collinium vestrum, ingeniosissimum virum, habere rationem ineundi summas serierum finitarum numericarum, quarum termini sint primanis, secundanis, tertianis etc.

reciproci; invitasti me, ut in eam rem inquirerem: visa est mihi satis difficilis et pulchra; sed quod intelligerem a Collinio jam publicatam esse libello de ejus quod interest calculo, aliaque prae manibus haberem, eam inquisitionem omisi; quod si mihi eam consensu Autoris miseris, vicissim vobis simplicissimam illam numerorum rationalium seriem, cujus summa (si in infinitum continuetur series) circulo aequalis est, mittam cum demonstratione, quemadmodum et a Collinio demonstrationem suae regulae expecto. Quadratura autem illa Circuli Arithmetica latissime porrigitur, et ad alia multa et nova viam operit, quod et vos facile judicabitis; itaque non dubito quin in methodis Neutonionis et Gregorianis mihi communicandis vos non difficiles sitis praestituri; ego certe occasiones omittere non soleo, egregiorum inventorum Autores cum multa honoris praefatione nominandi.

Vidi Hookianam Diatribam de apparatu Heveliano; non sum satis in observando exercitatus, ut judicium meum interponere audeam. Dnus. Bullialdus pro Hevelio stare mihi videtur; Cassinus et Picardus Telescopia non negligenda censent. Vale.

Parisiis 30. Mart. 1675.

Beilage.

In einem ersten Entwurf des vorstehenden Schreibens macht Leibniz folgende Mittheilung über das projectierte Uhrwerk: Distuli scribere de die in diem, quod rem novam et mox hic quoque publicandam TIBI mittere vellem: idque nunc quoque facio, postquam de successu satis securus sum. Mitto igitur TIBI quam vides descriptionem principii aequalitatis in Horologio a me invento futurae, nihil cum isochronismo vibrantium pendulorum aut elateriorum commune habentis, quo tamen uno hactenus omnes usi sunt. Ipse Hugenius. qui nuper ut nosti elegantem illam oscillantis elaterii ad horologia applicationem publicavit, plurimum approbavit meam ut novam, et pure mechanicam et a nullo experimento physico aut demonstratione Geometrica pendentem, ut mirum sit artifices in eam non incidisse dudum Mihi certe jam a quadriennio nota fuit, cujus testes in Germania Galliaque habeo: sed in controversiam vocat nemo. Plerumque ita evenit, ut uno egregio invento publicato, quale Horologii oscillatorii fuit, aliorum meditationes velut sideratae et in hanc unam defixae habeant aliquid imitationis non facile exuendae: raro animus hac velut praeoccupatione deposita ad diversum quoddam inveniendi principium attolitur. Inventum ipsum quale sit, ex descriptione et figura judicabis, et si mereri videbitur Transactionibus tuis inseres. Alii atque aili hic in dies nascuntur, qui Horologia

novis illis Hugenianis similia, certe ex eodem principio pendentia, proferunt.

Sed cum ipsa Hugenii methodus sit omnium quas viderim facile simplicissima, credo non magnam rationem habitum iri tot variationum non difficilium Sed ex alio rem principio confici Reipublicae interest et Scientiarum, ut alterum alteri testimonium praebeat et aerarium inventionum locupletetur. Cum sit praeterea aliquid in meo peculiare, ut scilicet Elateria spissa et solida (massifs) et quantum libet fortia adhibere liceat, qua ratione fieri potest ut ratio errorum atque impedimentorum ex medii et materiae imperfectione orientium ad vires quantumlibet exigua reddi possit: ut taceam esse qui in dubium revocent Isochronismum vibrationum Elasticarum, mihi tamen persuasum est, Hugenium hoc suae constructionis principium experimentis sufficientibus stabiliisse, antequam publicaret et Isochronismum si non perfectum saltem usui suffecturum deprehendisse.

In einer Zuschrift an den Herausgeber des Journal des Sçavans unter dem 1. März 1675 hat Leibniz eine Beschreibung seines Uhrwerkes gegeben. Sie ist in dem Journal veröffentlicht unter dem Titel: Lettre touchant le principe de justesse des Horloges portatives de son invention.

XXXII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

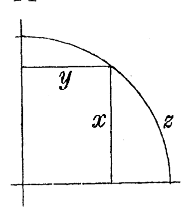
Accepi litteras tuas, quae Machinam tuam novam describunt et Algebraica quaedam rariora indigitant. Prius quod attinet, Nostratium nonnulli, augendis rebus Mechanicis addictiores, in ea videntur esse sententia, objectionibus a temet ipso formatis, generali ista responsione remedioque a te assignato minus esse satisfactum. Optant interim, Experimento rem totam committi, idque navigatione quadam ad Tropicos et Aequinoctialem instituenda, eamque rationem dubiis quae supersunt omnibus exuendis quam maxime accommodatam esse censent. Ingenium interim tuum in excogitanda machina tam artificiosa abunde elucere fassi, pro ejus communicatione debitas tibi gratias referunt.

Posterius quod attinet, Dn. Collinius praemissa salute, quae sequuntur remittit. Primo, Cl. Gregorium in postrema sua ad Illustrem Hugenium responsione seriem suppeditasse ad semicircumferentiam circuli inveniendam, quae talis est: Pone radium = r, dimidium latus quadrati inscripti circulo = d, et differentiam inter radium et illud latus quadrati = e, Semicircumferentia aequalis est =

$$\frac{4\,r\,r}{2\,d - \frac{e}{3} - \frac{e^2}{90\,d} - \frac{e^3}{756 d^2} - \frac{23 e^4}{113400 d^3} - \frac{263 e^5}{7484400 d^4} - \text{etc. in infin.}}$$

Quae series adeo produci potest, ut a semicircumferentia minus differat, quam ulla quantitas assignabilis.

Editum hoc fuit a Dn. Gregorio, postquam Dni. Mercatoris Logarithmotechnia jam extabat; quae quamprimum viderat lucem, ad Dnum. Barrovium a me fuit transmissa, qui observato in ea infinitae seriei usu ad Logarithmos construendos rescribebat, methodum illam jam aliquamdiu ante excogitatam fuisse a successore suo Newtono, omnibusque curvis earumque portionibus Geometricis aeque ac Mechanicis universim applicatam. Cujus rei specimina quaedam subjecit viz.

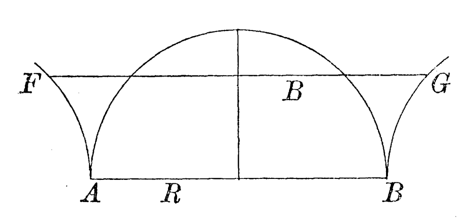


Posita pro radio unitate, datoque x pro sinu, ad inveniendum z Arcum series haec est:

$$z = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40} x^5 + \frac{5}{112} x^7 + \frac{35}{1152} x^9 \text{ etc. in infinit.}$$

Et extracta hujus aequationis radice, methodo symbolica, si dederis z pro arcu, ad inveniendum x sinum series haec est:

$$x = z - \frac{1}{6} z^3 + \frac{1}{120} z^5 - \frac{1}{5040} z^7 + \frac{1}{362880} z^9 \text{ etc.}$$ Atque hae series facile continuantur in infinitum. Prioris beneficio ex sinu 30 graduum, Ceulenii numeri facile struuntur.

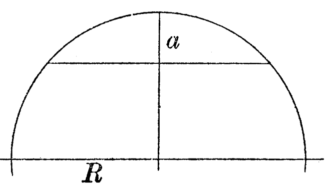


Consimiliter si ponas radium R, et B sinum arcus, Zona inter diametrum et chordam illi parallelam est,

$$= 2\,R B - \frac{B^3}{3\,R} - \frac{B^5}{20\,R^3} - \frac{B^7}{56\,R^5} - \frac{5\,B^9}{576\,R^7} - \frac{7\,B^{11}}{1408\,R^9} \text{ etc.}$$ Atque eadem series, mutatis signis termini secundi, 4ti et 6ti etc. inservit assignandae areae Zonae Aequilateralis Hyperbolae,

$$AFGB = 2\,RB + \frac{B^3}{3R} - \frac{B^5}{20R^3} + \frac{B^7}{56R^5} - \frac{5B^9}{576R^7} + \frac{7B^{11}}{1408R^9} \text{ etc.}$$

Rursum, dato radio R et sinu verso sive sagitta a, ad inveniendam aream segmenti resecti a chorda, pone b^2 pro 2 Ra, et segmentum



$$= \frac{4ba}{3} - \frac{2a^3}{5b} - \frac{a^5}{14b^3} - \frac{a^7}{36b^5} - \frac{5\,a^9}{352b^7} - \frac{7\,a^{11}}{832b^9} \text{ etc.}$$

Et arcus integer

$$= 2\,b + \frac{a^2}{4b} + \frac{3a^4}{20b^3} + \frac{5a^6}{56b^5} + \frac{35a^8}{576b^7} + \frac{63a^{10}}{1408b^9} \text{ etc.}$$

Duae hae series Dno. Gregorio debentur, quas exhibuit ex eo tempore quo usus est hac methodo: quod ab ipso aliquot post annos factum, postquam scil. intellexerat, Dn. Newtonum generatim eam applicasse. Exinde quoque ad nos misit series similes ad Tangentes naturales ex earundem Arcu inveniendum et conversim. E. g. pone radium = r, arcum = a et Tangentem t, erit

$$t = a + \frac{a^3}{3r^2} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62a^9}{2835r^8} \text{ etc.}$$

Et conversim, ex Tangente invenire Arcum ejus,

$$a = t - \frac{t^3}{3r^2} + \frac{t^5}{5r^4} - \frac{t^7}{7r^6} + \frac{t^9}{9r^8} \text{ etc.}$$

Atque hoc factum cum vides, facile credideris, posse eadem methodo aeque facile ex Arcu inveniri Sinum vel Tangentem Logarithmicum, absque inventione Naturalis, et conversim. Pronum quoque tibi fuerit credere, methodum hanc applicari posse ad rectificationem quarumlibet Curvarum, particulatim vero ad lineam Quadratricem, adque inveniendam Aream illius figurae: id quod antehac, nulla demum cumque methodo, fuerat praestitum. Atque ulteriori calculationis labore extendi potest ad inveniendas Areas superficierum in rotundis solidis inclinantibus, nec non ad inveniendas soliditates Segmentorum secundorum in solidis rotundis. E. g. si Conoides aliqua secetur a plano transeunte per basin ejus, poterit id vocari Segmentum primum; et si haec portio iterum secetur a plano erecto ad prius planum secans, Portio eum in modum secta hoc ipso intenditur ut sit Segmentum.

Porro, applicatur ea methodus inveniendis radicibus purarum potestatum Aequationumque valde affectarum, ita ut ex quolibet numero, absque Logarithmorum ope, quamlibet excitare possis potestatem per

saltum, et ex quavis potestate, utut affecta, invenire radicem ejus, vel quodvis Medium, illud inter et unitatem assignatum.

Dn. Gregorius magno labore paravit seriem infinitam, generatim respectivis Potestatibus affectis cujuslibet aequationis propositae adaptandam, ita ut quivis Algebrae cultor, ipsius penu instructus, mox aptare valeat seriem aliquam ad inveniendam quamlibet radicem cujusvis aequationis propositae, postquam ipsi innotuit, ad quod latus noti limitis Radix ceciderit. Verum id hactenus nobis non communicavit, uti nec nos eum ad id faciendum sollicitavimus, imprimis cum ipse lubens permittat Dn. Newtono, ut ille primus novae hujus methodi de infinita serie inventionem orbi Mathematico patefaciat.

Et cum uterque animum hujusmodi doctrinae applicuerint hactenus, nunc eum applicant communi aequationum doctrinae perficiendae. Interim quibus augmentis alii quoque Algebram locupletaverint, nunc commemorabo.

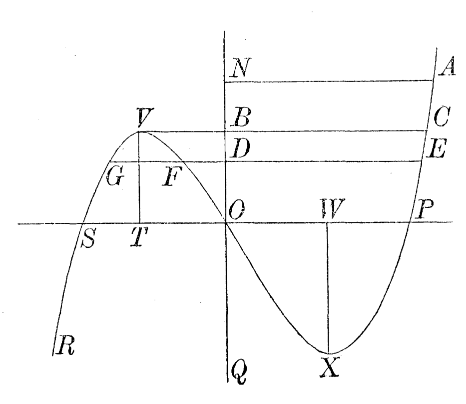
In ea sumus sententia, postquam Cl. Pellius consecutus est limites alicujus aequationis, in proclivi ipsi esse, Logarithmorum adminiculo directe assequendi Logarithmum cujuslibet radicis oblati cujusvis resolvendi sive Homogenei; uti etiam, facile tunc eum posse, dictorum limitum ope, Aequationem frangere quam propinquissime, quando Aequatio est reapse solida, et Cartesii sensu infrangibilis. Verum possumus polliceri, nos id praestare posse magna facilitate in Cubicis et Biquadraticis, idque tum citra opem limitum, tum Cartesii malleum Cubicum.

Praeterea in aequatione completa, puta 6ti gradus, ubi intra certos limites aequatio habet radices possibiles, nil novi est, si referam ex Laurentio, quemvis terminum (affectum) generatim posse tolli: sed intra certos limites aequatio illa habere potest quatuor tantum radices possibiles, quo casu duo termini medii tolli possunt. Interdum habere ea potest duas tantum radices possibiles: quo casu quatuor termini medii possunt revelli. Scio, Huddenium multa loqui de frangendis, non vero tollendis terminis mediis, et Laurentium aliquanto nimium esse hac de re promissorem. Spes nos favet, Cl. Malbranchium in libro suo Algebraico, quem sub praelo versari intelleximus, praestitisse quicquid in eo genere praestari potest, dum Pellius rem illam nimium procrastinat, qui et multa pollicetur circa aequationes in genere, amplissimi Canonis sinuum beneficio.

Dictus Dn. Malbranchius non ita dudum Nobilissimo Dno. Vaughano scripsit, quodsi superare obstaculum unum posset in regulis Cardani, ubi trium radicum capax est aequatio Cubica, multo ulterius doc-

trinam a se propositam exporrectum iri. De hoc obstaculo conjecturam meam in medium nunc afferam.

In qualibet aequatione assumere potes Radicem vel Radices, adque eas Resolvenda sive Homogenea comparationis excitare.



Duc basin OP, ad eamque erige QON. Pone Homogenea comparationis affirmativa sursum, ab O ad DBN, et negativa deorsum, super haec Homogenea excita radices DE, BC, NA tanquam ordinatas; et mutatis omnium potestatum imparium signis similiter operare circa partem alteram pro radicibus negativis: et supposito, Curvam transire per extremitates radicum sic inventarum, erit ille locus inventionis Aequationis ejusmodi, cujus Homogeneum Comparationis est variabile, sed omnes termini ejus reliqui sunt constantes. Curva hic ducta exhibet locum Aequationis, quae interdum nonnisi unicam habet radicem possibilem, puta quando Homogeneum Compar. majus est quam OB; tres vero, quando minus est: uti vera radix DE, et radices negativae DF, DG. Hujus Curvae limites Dioristici sunt VT, WX, et Basis limites OP, OS. Quando nonnisi unicam radicem habet Aequatio, puta NA, Cardani regulae eam invenient vel exacte, si Binomia habuerint exactas radices cubicas, vel si secus, quam propinquissime. At si tres habuerit radices aequatio, ut ante dictum, tum Cardani regulae nullam earum invenient. In hoc statu negotium hoc reliquere Authores.

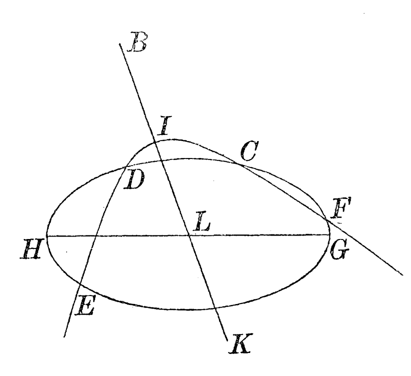
Cl. Wallisius illas regulas insigniter correxit hoc modo: Si ad quamlibet radicem veram, puta DE, erigas Homogeneum comparationis OD, et id ipsum proponas ad radicem pro eo inveniendam, hoc casu ita auxit Cardani regulas Wallisius, ut radicem certo consequaris: At nequit regulas illas applicare Homogeneo Comparationis casu oblato, quamquam illae possint ad Homogeneum quoddam paulo majus vel paulo minus certo applicari.

Hic vero locus est de obstaculo illo verba faciendi. Dico itaque, in Cubicis illis quae destituuntur termino secundo, Radicum Coefficientem reduci posse ad Unitatem, et Homogeneum Comparationis ad Fractionem communem vel decimalem in casu de quo quaeritur, divisionem scil. instituendo ope seriei continue proportionalium, cujus cum unitas sit terminus primus, radicum Coefficiens est tertius: At casu altero,

ubi Cardani regulae obtinent, novum Heterogeneum Comparationis semper erit unitate majus, resque eo reducetur, ut consultis Guldini Tabulis Cuborum et Radicum, mox experiri possis, quaenam radix suo Cubo addita, vel ab eo subtracta, pro signorum aequationis ratione, redditura sit novum Heterogeneum Comparationis; atque Radice hunc in modum acquisita, eam multiplica tantum, quantum eam prius diviseras, habebisque Aequationis primo propositae radicem.

Jam vero manticae illud quod in tergo, hoc est: Quando Homogeneum comparationis novum majus est unitate, cubus radicis major est radice ipsa: At si Homogeneum illud fuerit fractio propria vel decimalis, radix excedit cubum. Utcunque sit, in utroque casu inveniri Radix potest dictarum Tabularum beneficio. Atque hoc probe expenso argui inde posse videtur, Cardani regulas reddi posse Universales: Et quando nobis suppetent Tabulae impressae radicum Quadraticarum Cubicarumque, quemadmodum nunc instructi sumus Tabulis Quadratorum Cubicorumque in numeris ab 1 ad 10000, illae Cardani regulae terriculamentum ejusmodi futurae non sunt, quale hactenus habitae fuerunt. Speramusque istius modi Tabulas brevi a Dno. Joh. Smith in lucem emissum iri.

Sed de his satis: Ad alia nunc pergamus. Dn. Newtonus et Dn. Gregorius Problema sequens considerarunt, a Dn. Collinio ideo propositum, quod reperisset, Intersectiones Sectionum Conicarum, a Sphaera projectarum, ad calculum revocari posse Trigonometriae Sphaericae beneficio, vel inveniri Constructionum Sphaericarum ope, citra alterutrius figurarum descriptionem, viz. Duabus quibuslibet Geometricis Curvis vel Sectionibus Conicis determinatae speciei ductis in qualibet positione casuali, puta Hyperbolae, cujus axis est BLK, atque Ellipsis, cujus longior Axis est HLG, invenire, quaenam aequatio solvatur ope ordinatarum, cadentium a punctis Intersectionis DCFE ad alterutrum Axium, vel quamlibet ex diametris alterutrius datarum figurarum.



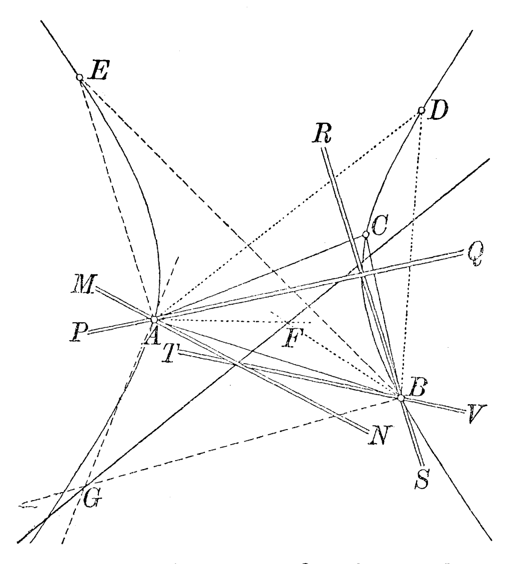
Quae adeo generalis est propositio, ut dubio procul octavum Apollonii librum, nec non magnam partem doctrinae de Locis in utero gerat: de qua posteriore spes nobis facta est, doctum quendam Tractatum ex Gallia oriundum esse, a Cl. scil. Fermato compositum, viz. de Locis planis, solidis, linearibus et ad superficiem. Cujus generis nonnulla habentur in Kinkhusii, Algebrae in Belgio doctoris, libro postremo Geometriae.

Ad haec intelleximus, Celeberrimum Robervallium bene ea de re scripsisse, nec pauca illius scripti Apographa circumferri. Praeterquam quod credimus, Doctrinam hanc, et Huddenii annexa Geometriae Cartesianae elucidata esse a Malbranchio in Opere suo Algebraico, quod avide expectamus.

Dubium non est, Newtonum et Gregorium Problema hoc dudum expendisse. Et quidem factum id esse a Newtono, ex chartis ipsius ad nos missis, eo tendentibus, colligi potest, suppetente scil. constanti Parabola cubica, omnes Aequationes a 3 ad 8 gradum solvi posse, illius et Sectionum Conicarum beneficio; aequationes vero noni gradus, duarum ejusmodi Parabolarum ope; omnes vero aequationes a 4to ad 15^{tum} gradum, Parabolastri Biquadratici et Sectionum Conicarum adminiculo, aequationes denique 16 graduum, duorum ejusmodi Parabolastrorum ope. Et quoad Sectiones Conicas, opus haud fuerit, eas per puncta describere, cum Puncta Intersectionis prompte inveniantur duorum mobilium angulorum proprie applicatorum ope; qua de re audi Authorem ipsum:

Descriptio Sectionis Conicae

per 5 puncta transeuntis:



In sequenti schemate puncta sint A, B, C, D, E. Junge horum tria quaelibet e. g. A, B, C, ad Triangulum rectilineare ABC constituendum, cujus duobus quibuslibet angulis, puta A et B, duos sectores vel angulos mobiles applica, Polis ipsorum ad puncta angularia eorundemque cruribus ad latera Triangulorum positis, dictosque angulos sic dispone, ut libere circumagantur circa polos suos A et B, citra angulorum, quibus apponuntur, variationem. Quo facto, reliquis duobus punctis D et E successive applica duo ipsorum crura PQ et RS, quae prius applicata fuerant ad C (quae crura distinctionis ergo vocari possunt crura describentia, uti reliqua duo MN et TV, quae applicabantur ad A, B, crura eorum dirigentia appellari queunt); quas intersectiones supponas esse F, facta

ad D applicatione, et G, ea facta ad E. Duc lineam rectam FG, eamque produc sufficienter utrimque: Et tunc si ita moveris Angulos, ut crura ipsorum dirigentia continuo se invicem intersecent ad lineam GF, reliquorum crurum intersectio describet Sectionem illam Conicam, quae per omnia, quae dixi, data puncta transibit.

Si tria ex datis punctis sint in eadem recta linea, impossibile est, ullam Sectionem Conicam transire ea omnia posse, eoque casu habebis illius loco duas lineas rectas.

Juxta eundem fere modum describi potest sectio Conica, quae per 4 data puncta transeat tangatque lineam datam; vel quae transeat per 3 data puncta tangatque duas lineas datas, sive rectae illae fuerint sive curvae etc.

Author existimat, non injucundam fore speculationem Mathematum studiosis, hujus Theorematis demonstrationem invenire, nec non determinare Centra, Diametros, Axes, Vertices et Asymptotos Sectionum Conicarum ita descriptarum, vel describere parabolam per 4 data puncta transeuntem.

Caeterum, degit apud nos Veteranus quidam Algebrae doctor, cui Davenantii nomen, qui multa penes se habet MSS Algebram spectantia. Is rure ad nos transmisit hoc Problema solvendum:

Sint A, B, C, D quatuor continue Proportionalia, Summa quadratorum ex his terminis data est aequalis N, et summa cuborum ex iisdem aequalis O; postulatur, ut invenias quatuor respective Proportionalia. Hujus problematis solutio, ait Author, explorabit peritiam, et forte non parum augebit cognitionem solventis: id quod probabilitate non caret, quia, si recte memini, quidam Albertus Gerardus (in libro, cui titulus Invention nouvelle) methodum habet ex Aeqnationum Coefficientibus et Homogeneo Comparationis summam dare Quadratorum, Cubornm et Biquadratorum Radicum incognitarum etc.

Quod spectat Additionem Progressionis Musicae, h. e. Arithmeticae Progressionis Reciproca, scripserat Dn. Collinius Exercitationem de ea re diversimode praestanda, quae periit Amicis eam commodando. Una ex Methodis illis ab ipso adhibitis haec erat Numerator semper sit Unitas, et pro medio termino in serie ponatur b, et pro crescente aut decrescente differentia in Denominatore ponatur + vel — c respective, et pro duabus differentiis ponatur 2 c, pro tribus differentiis 3 c. Tunc quotae unitatis per dicta binomia divisae, simul additae dant seriem inservientem additioni similis numeri Terminorum. Ex Paradigmate sequenti patebit Quotarum respectivarum genius, et in quanam progressione exurgant:

$\frac{1}{b-c}$ =	$+\frac{1}{b}$	$+\frac{c}{bb}$	$+\frac{cc}{b^3}$	$+\frac{c^3}{b^4}$	$+\frac{c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b-2c}$ =	$+\frac{1}{b}$	$+\frac{2c}{bb}$	$+\frac{4cc}{b^3}$	$+\frac{8c^3}{b^4}$	$+\frac{16c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b-3c}$ =	$+\frac{1}{b}$	$+\frac{3c}{bb}$	$+\frac{9cc}{b^3}$	$+\frac{27c^3}{b^4}$	$+\frac{81c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b}$ =	$+\frac{1}{b}$				
$\frac{1}{b+c}$ =	$+\frac{1}{b}$	$-\frac{c}{bb}$	$+\frac{cc}{b^3}$	$-\frac{c^3}{b^4}$	$+\frac{c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b+2c}$ =	$+\frac{1}{b}$	$-\frac{2c}{bb}$	$+\frac{4cc}{b^3}$	$-\frac{8c^3}{b^4}$	$+\frac{16c^4}{b^5}$
$\frac{1}{b+3c}$ =	$+\frac{1}{b}$	$-\frac{3c}{bb}$	$+\frac{9cc}{b^3}$	$-\frac{27c^3}{b^4}$	$+\frac{81c^4}{b^5}$
Summa horum 7 terminorum =	$+\frac{7}{b}$	*	$+\frac{28cc}{b^3}$	*	$+\frac{196c^4}{b^5}$

Coefficientes sunt summae duplae Quadratorum et Biquadratorum etc. progressionis Arithmeticae numerorum ab Unitate, possuntque illae excitari pro quolibet numero terminorum ex Aequationibus illi rei accommodatis, quae non difficulter obtinentur.

Verum his missis, sciscitatus antehac fui, quando Dn. Piccardus praelo daturus esset Dni. de Beaune Tractatum de Angulo solido, adjeceramque Tractatus Dni. Paschalis et Dni. Desargues penes bibliopolam de Prez adhuc ineditos delitescentes, de demonstranda derivandaque doctrina Conica ex minoribus circulis Sphaerae projectae in plano sphaeram tangente, oculo constituto in centro, eos, inquam, tractatus mereri ut in lucem emittantur, quippe qui sine dubio varias contineant speculationes novas utilesque, Trigonometriam tum planam tum sphaericam in Doctrinam conicam introducendo. Unius solummodo Propositionis mentionem hic injiciam, inquit Collinius, quae sine illa scientifice solvi nequit, viz.

In Ellipsi vel Hyperbola datae cujusdam speciei proponitur, ut ei adaptetur data diameter, citra descriptionem figurae: Quem angulum faciet dicta diameter cum alterutro Axium, et quis est Angulus inter illos contentus, ejusdemque conjugatum?

Ignoscas, vir Clarissime, huic prolixitati, et sinas te rogem, ut per amicum mihi transmittas Elementa Geometriae planae Dni. de Gottignies, impressa Romae in 12. A. 1669, quae sex priores libros Euclidis explicant. Simili officiorum genere hanc gratiam compensare annitar.

Si visum fuerit Dni. Thevenotii Libellam transmittere, conabor ipsi suum tribuere, quod studere per omnia, sine partium dubio, annitor.

Illustres illi viri, quos salutaveras, plurimum Te resalutant: Dominus Boylius prae ceteris amplissimam sui erga te affectus testificationem edebat. Toti nunc sumus in edendo insignissimo scripto Malpighiano de Anatomia Plantarum: cui succenturiabit tractatum geminum Doctissimus Grevius. Vidisti sine dubio, quae nuper edidit Boylius: brevi visurus, quae nunc edenda de Motuum languidorum effectis etc. Willisius molitur librum de Pulmonibus, eorumque affectibus, qui reliquis jam editis non cedet. Vale. Dabam Londini die 12 Aprilis 1675 et mox, si placet, rescribe.

XXXIII.

Leibniz an Oldenburg.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Literas tuas multa fruge Algebraica refertas accepi, pro quibus tibi et doctissimo Collinio gratias ago. Cum nunc praeter ordinarias curas Mechanicis imprimis negotiis distrahar, non potui examinare series quas misistis, ac cum meis comparare. Ubi fecero, perscribam tibi sententiam meam. Nam aliquot jam anni sunt quod inveni meas via quadam sic satis singulari. Collinium ipsum magni facio, quoniam omnes purae Matheseos partes ab ipso egregie cultas video. Multa habeo destinata, a quibus me deterrent calculi tantum, qui nec suscipi facile ab homine occupato, nec alteri nisi doctissimo ac sincerissimo tuto credi possunt. De modo quo tolli possint plerique termini intermedii ex aequationibus, item de ratione qua aequationes etiam affectae ope Logarithmorum solvi possint, fac quaeso ut Collinius, si vacat, mihi scribat distinctius. Ego enim in hoc negotio, item circa ea quae spectant quadraturas vix ac ne vix quidem multa a Juvene illo expecto, qui sub Dn. Malbranchii auspiciis laborat. Huddeniana inventa ab eo in nucleum ac compendium non male contractum iri credo. In Geometria

nondum laboravit, sed nec in numeris et Diophanto; calculo aequationum Cartesii methodo et Huddenii incubuit unice. Dicit, se errorem invenisse quendam in methodo qua Cartesius (aut potius Vieta, ab eo enim sumsit Cartesius) aequationes quadrato-quadraticas reducit ad cubicas. Ego vereor ne erret ipse. Nam praeterquam quod Beaunius et alii eam demonstrare suscepere, mihi etiam aliquando alia quaerenti haec eadem methodus provenit, atque origo ejus (quae ad multa alia aditum praebere potest) patuit, quae nisi fallor eadem fuit cum Cartesiana, nec spero minutias quasdam loquendi captaturum. In problematis seu geometricis sive numericis et multo minus mechanicis nondum se exercuit. Hortatus sum, quoniam calculi labor ei nullus, ut saltem quintum et sextum gradum nobis absolutum dare velit, quemadmodum Vieta et Scipio Ferreus dedere quartum et tertium, exhibendo scilicet talium aequationum generaliter conceptarum radices irrationales. Ita enim dicerem uno gradu promotam esse hanc Algebrae partem; sed nondum id mihi liquido satis promittere visus est. Itaque duos adhuc tresve menses expectabimus, donec prodeat liber. Si autor nobis nihil aliud promitteret quam elegans atque utile Algebrae aequationum compendium, non dubitarem promisso satisfacturum. Dn. Osanna, qui in Huddeniana illa, ut sic dicam, Algebrae parte minus versatus est, contra in problematis Geometricis solvendis sic satis est versatus, in numericis autem et Diophanto omnino excellit, ubi non nisi Analytico calculo utitur. Cum contra Freniclius et Dn. Billius crebrius utantur numerorum proprietatibus.

Quamquam sint fortasse problemata aliqua quae ex solo analytico calculo vix possint solvi: ex gr. datum Numerum dividere in duos quadratos, Problema est quod qui analysi subjicere posset, et solvere semper aut ostendere impossibilitatem, eum ego dicerem novam Algebrae numericae portam aperuisse. Quaeso vestrates ea de re consule; vellem enim nosse, quae eis de eo problemate spes. P. Gottignii Geometrica nondum apud librarios invenio; dabo operam, ut saltem librum reperiam, si forte est apud Jesuitas Claremontanos, ut judicem an mereatur ex Italia peti. De Pascalii reliquiis scripsi tibi dudum, eas esse apud Pererium, ex sorore nepotem, in Claramontana Arverniae subsidiorum curia consiliarium, amicum meum; sed vix nisi fragmenta sunt.

Additio numerorum qui sunt primariorum etc. reciproci, Colliniana etsi perutilis, alia est tamen quam expectabam; est enim non nisi per appropinquationes. Ego credebam summam numeri finiti horum terminorum $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ etc. exacte daturum. Nam hanc quidem appropinquatoriam ex Mercatore sequi apparet. Sed quando non possumus quae volumus, velimus quae possumus.

De machina mea chronometrica Doctissimi viri, Hugenius, Cassi-

nus, aliique optime sentiunt. Scribis Vestrates doctissimos viros credere generali illa responsione mea non esse satisfactum difficultatibus a me ipso formatis. Beneficium in me conferes, si quid potissime objiciunt, perscribas distinctius, atque illud interim admoneas, si quas forment difficultates a libramentorum moderando motui adhibitorum concusione frictioneque, eas ideo concidere, quia in machina ipsa maritimis usibus destinata, nulla erunt ejusmodi libramenta, sed major elateriolorum displodendorum numerus quae nec dentes agent, nec quicquam aliud quam alia liberabunt. Ut minore forma res exhibeatur pro horologiis gestabilibus, complura in machina aliter construenda sunt eodem principio servato. Duo hactenus principia aequalitatis habentur, oscillationes ab ipsa natura factae a Galilaeo et Hugenio observatae et adhibitae, et tensiones atque displosiones alternantes, quibus ego utor.

Ajunt ingeniosissimum Hookium nescio quid novum in hoc genere moliri, quod quale sit docebis, si vacat occasione data. Celeberrimi Thevenotii libella jam olim Diario Eruditorum Gallico inserta est, nondum quod sciam Translationibus vestris.

Illustri Boylio, quaeso, ut officiosam a me salutem nunties; ego id unum opto imprimis, ut Philosophiam Chymicam, quod unus potest (quantum ab uno homine expectari licet) perficiat. Qui cum eo in eo genere comparari possit, scio neminem. Quaeso eum aliquando impensius hortare, ac saltem quae ejus super eo negotio consilia sint, scribas distincte atque aperte. Interest enim reipublicae, praeclara adeo experimenta ac destinata non interire.

Ego nuper (nam saepe Geometriam in re Mechanica exerceo) usum mirabilem reperi Logarithmorum in re Mechanica, quem ordinate conscriptum demonstratumque aliquando dabo. Quod superest, vale et cultori virtutis tuae fave.

Dabam Paris. 20. Maji 1675.

XXXIV.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Quamvis nuperrime litteris sat prolixis studia tua interrupi, cohibere me tamen non potui, etiam priusquam responsum a te acciperem, quin

Tibi ea significarem, quae ante biduum a Dno. Collinio, me invisente, accepi, cum ea Tibi, gnavissimo Logistices cultori, grata fore existimem. Retulit ille mihi, Londinensem quendam, Michaëlem Darium, hominem plebejum, invenisse, beneficio aequationis Quadraticae, radices Cubicas Binomiorum Cardani, quando ea accuratae radicis Cubicae non sunt capacia, proindeque frangere eum omnes aequationes Cubicas et Biquadraticas, adeoque omnia Problemata solida, Geometriae planae beneficio resolvere: Atque hoc ipsum non modo demonstrasse, sed et plurimis Exemplis jam actu illustrasse.

Res ingens, si certa. Certam autem esse, Dictus Collinius vehementer asseveravit*). Quid Tibi ea de re videatur, edocere me ne graveris, quando prioribus meis responsum paras.

Caetera, praelo nostro jam exiere Barrovii Archimedes et Apollonii 4 libri priores, nec non Theodosius, ad eandem scil. methodum reducti, qua Euclides Barrovianus prodiit.

Idem bibliopola, cujus impensis hi Authores typis mandati fuere, paratus est ad imprimendum Pappum, Serenum de Sectione Cylindri, et tres libros posteriores Apollonii, dummodo viri docti laborem suscipere vellent hos Authores ad eandem Methodum Barrovianam reducendi, Barrovio jam ad aliam provinciam . . . . .**)

Haec sunt, quae paucis hac vice scire Te volui. Vale et salve etc.

XXXV.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift Guhrauer's, die derselbe vom Original (Dn. Pells Lettres, Mus. Brit. Bibl. Birch. 4279) genommen.

Rem mihi scribis miram, invenisse apud vos Michaëlem quendam Parium***), methodum resolvendi problemata solida omnia per Geome-

---

*) Leibniz hat hierbei bemerkt: nihil erat.

**) Ein Wort unleserlich.

***) Oldenburg schreibt diesen Namen sehr deutlich: Darium. Es ist wahrscheinlich derselbe, der von Newton in der Recensio des Commercium epist. unter dem Namen Dary erwähnt wird (Commerc. epist. Neue Ausgabe von Biot und Lefort. S. 10).

triam planam. Equidem fateor nullam mihi notam esse demonstrationem, qua propositi impossibilitas evincatur, imo contra rem reduxi aliquando ad aliquam Aequationem Numericam, quam qui numeris rationalibus generaliter exhibere potuerit, is omnem aequationem solidam planam reddiderit. Eademque opera comperi usum admirabilem Arithmeticae Diophanteae, si quis enim proposito quocunque problemate Diophanteo possit invenire solutionem in numeris, quando id possibile est, poterit etiam eadem opera problemata solida, imo et sursolida, reddere plana, modo id sit possibile. Sed ab eo labore tum calculi me deterruit prolixitas, tum imprimis rem quam impossibilem verebar inveniendi desperatio. Quam si Parius vester detexit, felicitati ejus atque ingenio gratulor. Doctissimus Collinius, harum rerum judex acer, si de veritate inventi persuasus est, ut scribis, ego vix putem relictum dubitandi locum.

Satisne ab eo tempore quo literas dedisti, discussa sint omnia, fac quaeso ut sciam. Et si per autorem licet, aut regulam ipsam, aut exemplum aliquod illustre, ut cubi duplicationem aut heptagoni regularis descriptionem, ejus methodo absolutam, aut analyticis saltem terminis expressam mitte, ut incredulitas nostra ipsis rerum documentis convincatur.

Ego rem molior, et satis credo in numerato habeo, qua nescio an ad usum major possit sperari in Algebra, methodum scilicet, per quam omnium Aequationum radices instrumento quodam, sine ullo calculo (post aequationum praeparationem non difficilem) in numeris pro instrumenti magnitudine quantumlibet veritati propinquis, haberi possint. Si Collinius aut Parius inventum supradictum communicare voluerint, ego meum inventum, nemini hactenus a me monstratum, vicissim ipsis patefaciam.

Clarissimus Perrerius, Pascalis ex sorore nepos, misit mihi ex Arvernia per suos fratres Ms. quaedam fragmenta Pascaliana. Ex quibus nunc penes me habeo elementa Geometrica singulari quadam ratione ab eo tractata, quanquam non integra. Quae ubi reddidero, etiam Conica mihi legenda dabunt. Repertum est inter scripta ejus quoddam dedicationis genus, quo opera sua Geometrica et Numerica Academiae nescio cui Parisinae (id est conventui Geometrarum privato, illo tempore celebri) inscribit, et scripta sua in eo genere absoluta aut affecta memorat, quod credo non illubenter leges, inde enim destinata viri liquidius disces. Mittam descriptum, si Tibi non ingratum fore significabis. Mitterem statim si e vestigio describi posset. Finio per Parium a quo incepi, et rogo, ut quantum licet per autorem, ea de re mihi perscribas. Barrovium Geometrica missa fecisse doleo, nam multa ab eo praeclara

adhuc expectabam. Collinium quaeso a me saluta. Perscribe item, si placet, quid sit illud, quod Vestrates iu machina mea chronometra potissimum desiderant. Hic enim plerique sunt persuasi, rem quousque sperare fas est, produci posse. Quod superest, vale faveque etc.

Paris. 12. Jun. 1675.

XXXVI.

Oldenburg an Leibniz.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Ad novissimas tuas, 12. junii mihi scriptas, Dn. Collinius, qui eas legit resolvitque, haec cum salute officiosissima Tibi rescribit.

1. Solutio aequationis cubicae (nisi in casibus quibusdam particularibus larvatisve) sua natura est Problema solidum, nec potest per Geometriam planam confici, quin et, nisi in paucis quibusdam casibus, ne quidem reduci potest ad simplicem cubum: Id quod magis liquebit considerando flexuras duplices, quae fiunt in Loco dictae aequationis, ut n exemplo sequenti,

$x^3 - 21xx + 120\ x = N.$

Radices	N sive Resolvenda.
1	100
2	164
3	198
4	225
5	200
6	180
7	154
8	128
9	108
10	100
11	110

In annexa hic Curva intellige respectiva N sive Resolvenda posita esse sursum versus ab O ad R radicesque excitari ceu ordinatas ad ipsa et curvam flexuosam per dictarum ordinatarum summitates transire: Atque hoc repraesentat Locum prioris aequationis.

2. Nihilominus tamen vir quidem doctus e nostratibus asserit, naturam Problematis ejusque Concomitantia suppeditare communiter adminicula ad id resolvendum per aequationem uno gradu inferiorem quam aequatio adhibita suggerit.

3. Haec assertio considerandum nobis praebet, Annon Concomitantia aequationis Cubicae, irrespective ad ullum Problema, similia auxilia sint suggestura? Atque hic jam explicandi locus est, quibus methodis probabilibus res illa vel suscepta fuerit, vel sit suscipienda. Et

Primo quidem Aequatio Cubica simplex vel affecta a Dario nostro considerata fuit ut Biquadratica sine Resolvendo, fractaque in suas componentes i. e. in duas aequationes Quadraticas, sic ut pro Resolvendo relinquatur illud, quodcunque casus obtulerit. Atque hoc ipsum ille praestitit, nullo respectu habito ad Malleum Cubicum Cartesii, nulloque auxilio inde adscito. Hinc prodire ait methodum inveniendi omnia ejusmodi Resolvenda Biquadratica in numeris integris, quae rationabiliter in duo Quadratica frangantur, nec non talia inveniendi Resolvenda mixta, quae similiter se habeant. Me quod attinet (ait Collinius) necdum exanimavi diversas Progressiones respectivas; probabile interim existimat, si quidem radix vel radices aequationis cubicae non absolute inveniantur captivae factae per hanc methodum, eas tamen arctissimis detineri cippis per aequationes quadraticas, quae majus et minus tam praecise dabunt ac quis postulaverit. Estque haec doctrina insignis usus ad aequationis Locum describendum.

Secundo, quaevis aequatio cubica considerari potest ut relativa ad Biquadraticam, inde derivabilem, cujus limites inveniuntur propositae cubicae radicum adminiculo: Limites vero cujusvis aequationis Biquadraticae inveniuntur a Bartholino in Tractatu Dioristices, aequationis Quadraticae beneficio, proindeque Huddenii aequatio Cubica evitatur.

Tertio, cum alius quidem vir praeclarus ex eo tempore affirmarit, omnium aequationum Limites (tum basis tum verticis) quae termino 2do carent, inveniri posse per aequationes duobus minimum gradibus inferiores aequatione proposita, suspicionem id parit, ipsum juxta methodum Dni. de Beaune c. 14. de natura Aequationum, terminum penultimum in locum secundi transferre. Atque tunc sane mutatae hujus aequationis limites inveniri per aequationem Quadraticam possunt. At vero, num acquisiti fuerint limites Biquadraticae aequationis primo propositae, atque hac ratione evitata methodus Huddeniana, considerandum superest.

Quarto, Dn. Darius cum invenisset, unam ex Cardani radicibus Binomialibus radicem esse in aequatione Quadratica, alteram quoque talem esse censuit. At difficultatibus implexum se cernens, inpraesentiarum suspensus

haeret. At in Cardani aequatione cubica triradicali reperit, sat multa exempla formari posse, in quibus Cardani regulae radicem aliquam recuperabunt; quin imo omnes tres radices ex iisdem regulis recuperabuntur sive invenientur, exiguo duntaxat labore accedente, viz.

Exemplum: in hac aequatione $x^3 - 21x = 20$ Radices cubicae Binomiorum

$$\begin{array}{ll} \text{sunt} & + 2\tfrac{1}{2} + \sqrt{-\tfrac{3}{4}} \\ & + 2\tfrac{1}{2} - \sqrt{-\tfrac{3}{4}} \\ \hline \text{radix} & + 5 = x \end{array}$$

Muta signa partis rationalis, ut et partis radicalis, multplicans eam per 3, et inferioris Quadraticae radices quaesitae sunt

$$x = -2\tfrac{1}{2} + \sqrt{+2\tfrac{1}{4}}$$
$$x = -2\tfrac{1}{2} - \sqrt{+2\tfrac{1}{4}}$$

Adeo ut, si illae Cardani radices excolerentur (ex considerationibus in priori epistola indicatis) similesque aptarentur quibusvis duabus potestatibus aliarum aequationum, insigne id augmentum foret Algebrae, eo quod Tabulae multum de labore minuunt. Quae hic ideo commemorantur, ut Algebristae vestrates excitentur ad eandem rem ex similibus vel etiam melioribus fundamentis expendendam; particulatim vero, ut vel fallacias harum probabilitatum detegant, vel eventum desideratum attingant.

Quinto subindicatum fuit in literis praegressis Tabulam Sinuum et Tangentium utilem futuram circa Aequationes; qua de re haec notio succurrit:

Si Polygonum aliquod inscribatur Circulo, et a quibusvis duobus pluribusve punctis in circumferentia, intra cujusvis lateris Polygoni extrema, lineae ducantur ad omnia Polygoni puncta angularia, lineae istae semper radices erunt ejusdem aequationis, Resolvendo duntaxat variante, prout asserit Cl. Wallisius in Tractatu suo de Sectionibus angularibus, typis destinato. Atque ita in aequatione pro Trisectione Anguli, Sinus $\frac{1}{3}$ partis Arcus, ad quem pertinebat Resolvendum, unam Tibi radicem suppeditat. Atque ex eadem Tabula Sinuum duae radices negativae sumi possunt, eo quod habitudines arcuum ad se invicem sunt cognitae: Simile fieri potest pro aliis aequationibus ad Sinus spectantes. Tale quid cognitum esse asseritur viro cuidam docto nostrati quoad Tangentes et Secantes. Hinc omnes aequationes, derivativae a primis, Tabularum illarum ope solvuntur; quin et doctrina tradita valde hoc nomine extenditur. Suppone duas Quadraticas generatrices ductas in se invicem: unam earum serva tibi constantem, alterius vero radices gradatim augeantur additione, multiplicatione etc. rursumque aequatio constans atque hae aequationes posteriores invicem multiplicentur; affirmatur ejusmodi Progressionum naturam probe esse cognitam; nec non

simile fieri posse de data quavis aequatione Biquadratica, cujus incognitae sint radices; duas nempe ex radicibus illius posse augeri, multiplicari etc. reliquis remanentibus fixis et constantibus; posseque illius adminiculo plurimas aequationes reduci ad Tabulas, quae secus per eas resolvi non poterant. Et forte, si Locus aequationis ita aptetur, ut omnes radices ejus sint in circumferentia circuli, cujus Radius est Resolvendum (qui intelligi potest multas habere revolutiones), conferre id posset ad notionem illam excolendam, aequationes scilicet per Tabulas Sinuum etc. solvendi.

Sexto, Vir quidam eruditus in Anglia scribit, tollere se posse omnes potestates Intermediatas in quavis aequatione arbitraria inter terminum supremum et penultimum, at non sine aequationis exaltatione, sine qua impossibile est tollere duos terminos in aequatione arbitraria; ac interdum unus aliquis terminorum non potest semper tolli, ex g. terminus secundus in Biquadraticis, quando quadratica aequatio, quae conficere id debebat, est impossibilis.

Dn. Newtonus (ut hoc ex occasione litterarum suarum addam) beneficio Logarithmorum graduatorum in scalis *παραλλέλως* locandis ad distantias aequales, vel Circulorum Concentricorum eo modo graduatorum adminiculo, invenit aequationum radices. Tres regulae rem conficiunt pro Cubicis; quatuor pro Biquadraticis: In harum dispositione respectivae coefficientes omnes jacent in eadem linea recta, a cujus puncto, tam remoto a regula prima ac graduatae scalae sunt ab invicem, linea recta iis super extenditur, una cum praescriptis consentaneis genio aequationis, qua in regularum una potestas pura datur radicis quaesitae. Lubentes equidem cognosceremus, num Tu, Vir Doctissime, et Newtonus noster in artificium idem incideritis.

Sed tempus monet, ut ad finem properem. Hoc solummodo adjicere fas fuerit, existimare nos operae pretium, ut Tractatus Conicus, derivandus a Projectionibus Sphaerae, concinnetur ex libro Dni. Desargues, cui titulus Leçons des Tenebres, nec non ex Reliquiis Pascalianis: Spesque nos fovet, Parisiis id confectum iri. Optamusque insuper, ut Paralipomena Fermati de Cocis planis, Solidis, Linearibus et ad Superficiem, de Porismatibus et Contactibus Sphaerarum, nec non Paralipomena Laloverae imprimantur. De Manuscriptis Dni Robervallii scire avemus, possimusne eorum consequi apographum, soluto pretio transcriptionis.

Vale, et prolixitati meae ignosce.

Dab. Londini d. 24. Junii 1675.

XXXVII.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Paris. 12 Jul. 1675.*)

Literae tuae, multiplici semper fruge refertae, non possunt non esse gratissimae. Facile crediderim problema solidum non posse reddi planum; id tamen demonstrare, quaemadmodum Euclides demonstravit Incommensurabilitates, magni res momenti fuerit, nec video, quod a flexu curvae aequationi propriae ad eam rem duci possit.

Ais Parium vestratem observasse, quod una ex Cardanicis sit radix aequationis Quadraticae. Hoc fateor non capio, et rogo explices.

Malleus (quem vocatis) Cubicus, quo aequationes Quadrato-quadraticae resolvuntur, non est Cartesii inventum, ac ne Vietae quidem, sed jam repertum secolo superiore. Etiam extractio illa Radicis Cubicae ex Cardanicis fit ut quantitas Imaginaria evanescat, et inveniatur radix rationalis Aequationis Cubicae regulas Cardani respuentis. Ejus exemplum a Pario datum in literis tuis novissimis habetur: superioris jam seculi inventum est. Nimirum primus omnium Aequationem Quadrato-quadraticam ad Cubicam revocare docuit Ludovicus Ferrariensis. Primus Radices Rationales ex Binomiis Cardanicis, in speciem Imaginariis, extrahere docuit Raphael Bombelli.

Tollere terminos omnes intermedios ex Aequatione Arbitraria cujuscunque gradus, non video cur sit difficile. Nam cum sit Arbitraria, potest reddi divisibilis. Si divisibilis reddi potest per Aequationem Simplicem aut Quadraticam, reddi potest Pura.

Per Tabulas Sinuum Logarithmicorum explicare Aequationes, res foret utilissima, si modo non sit opus tot praeparationibus, ut fructus compendii pereat.

Methodum Celeberrimi Newtoni, radices Aequationum inveniendi per Instrumentum, credo differre a mea. Neque enim video in mea, quid aut Logarithmi aut Circuli Concentrici conferant. Quoniam tamen rem vobis non ingratam video, conabor absolvere, ac tibi communicare, quamprimum otii satis erit.

---

*) Dieser Brief ist zuerst in den Werken von Wallis (Tom. III) gedruckt. Derselbe setzt ihn „anno circiter 1674 exeunte, vel ineunte 1675“. In der Sammlung v. Murr's findet sich eine Abschrift, nach welcher das Original datirt ist: Paris. 12. Jul. 1675. Dies letztere Datum ist richtig.

Incidi nuper in methodum perelegantem, qua Superioribus Aequationibus omnium graduum (ad certam tamen formam redactis) accommodari possunt Radices Cardanicis similes. Idque sine sublatione omnium terminorum inter primum et penultimum mediorum, imo nullo termino sublato, modo certa sit inter terminos intermedios relatio. Id cum novam quandam lucem dare videatur huic negotio, vobis mox communicabo.

Scripsisti aliquoties, Vestrates omnium curvarum dimensiones per Appropinquationem dare. Velim nosse, an possint dare Geometrice Dimensionem Curvae Ellipseos vel Hyperbolae ex data Circuli aut Hyperbolae quadratura.

Robervallius nunc sua quae MS. circumferebantur edit. Fragmentorum Pascalianorum spem mihi facit Doctissimus Perrerius, Consiliarius Regius in Avernica subsidiorum curia, Autoris ex sorore nepos. Quidquid ex illis comperero, vobis communicabo.*)

Scripseras alibi, Celeberrimum Wallisium methodum habere, qua Radici datae accomodet Homogeneum Comparationis tale, ut Aequatione Cubica triradicali inde constructa, per ipsas Cardani Regulas correctas inveniri vicissim possit haec radix. Quaero, an id possit etiam tum cum Aequatio illa non est Plana Palliata, sed reapse Cubica triradicalis, ita tamen ut Radix ejus sit pro arbitrio sumta. Si methodus illa differt ab ea quam dixi, per quam extrahendo Radicem Cubicam ex singulis Binomiis Cardanicis evanescit quantitas imaginaria, rogo ut eam primis literis communicetis. Ego interim et mea de altioribus Aequationibus aliquando extrahendis parabo.

Unum praeterea discere velim, quanam ratione per Logarithmos explicatis Aequationes, nonnisi summo atque imo gradu incognitae affectas.

Desideraveram aliquando ut indicares, de quo potissimum Vestrates circa Chronometrum meum dubitaverint.

Beilage.

Leibniz erhielt die nachgelassenen mathematischen Manuscripte Pascal's, darunter die welche in einem großen Werke (opus completum) über die Kegelschnitte handelten, von dessen Erben in Clermont-Ferrand in der Auvergne zugesandt. Er hielt die Papiere längere Zeit zurück, und unterwarf sie in Gemeinschaft mit Tschirnhaus, der im September 1675 nach Paris kam, einer genauen Durchsicht. Da den englischen Mathematikern ganz besonders daran gelegen war, zu sehen, wie Pascal die Entstehung der Kegelschnitte und die daraus

*) Siehe die Beilage.

hervorgehende Behandlung derselben aufgefaßt hatte, so ließ er von der ersten Section, welche die Generatio Conisectionum enthielt, eine Abschrift nehmen, die unter seinen Manuscripten noch vorhanden ist. Wenige Wochen vor seinem Weggange von Paris sandte Leibniz die Pascalschen Manuscripte an Perrier zurück, zugleich mit einem Briefe, in welchem er sich über den Inhalt derselben ausführlich ausspricht und namentlich das Urtheil abgiebt, daß sie druckfähig seien. Da seitdem diese Manuscripte Pascal's verschollen sind, so bilden der Leibnizische Brief und die Abschrift der ersten Section über die Generatio Conisectionum kostbare Documente über die Leistungen Pascal's als Mathematiker.*)

Ma lettre à Mons. Perrier Conseiller du Roy à la Cour des aides de Clermont-ferrand.

Monsieur

Vous m'avez obligé sensiblement en me communiquant les Ms. qui restent de feu Mons. Pascal touchant les Coniques. Car outre les marques de vostre bienveillance, que j'estime beaucoup, vous me donnez moyen de profiter par la lecture des meditations d'un des meilleurs esprits du siecle. Je souhaiterois pourtant de les avoir pu lire avec un peu plus d'application, mais le grand nombre des distractions qui ne me laissent pas disposer entierement de mon temps ne l'ont pas permis. Neantmoins je croy les avoir lues assez pour pouvoir satisfaire à vostre demande, et pour vous dire, que je les tiens assez entieres et finies, pour pouvoir paroistre à la veue du public. Et à fin que vous puissiez juger si je parle avec fondement, je veux vous faire un recit des pieces dont elles sont composées, et de la maniere que je croy qu'on les peut ranger.

I. Je croy qu'il faut commencer par la piece dont l'inscription est: Generatio Coni sectionum, tangentium et secantium, seu projectio peripheriae, tangentium et secantium circuli in quibuscunque oculi, plani ac tabellae positionibus. Car c'est le fondement de tout le reste; les figures y sont inserées.

II. Apres avoir expliqué la generation des sections du Cone, faite optiquement par la projection d'un cercle sur un plan qui coupe le cone des rayons, il explique les proprietez remarquables d'une certaine figure composée de six lignes droites, qu'il appelle Hexagramme Mystique, et il fait voir par le moyen des projections que tout Hexagramme

*) Vergl. meine Abhandlung: Desargues und Pascal über die Kegelschnitte, in den Sitzungsberichten der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1892.

Mystique convient à une section conique, et que toute la section conique donne un Hexagramme Mystique. J'ay mis au devant ces mots: de Hexagrammo mystico et conico. Une partie de cette piece se trouve repetée et inserée mot à mot dans une autre, sçavoir les definitions (avec leur corollaires) et les propositions (mais sans les demonstrations) se trouvent repetées dans le traité de loco solido dont je parleray cy dessous. Je croy meme que les figures du traité de loco solido suppleeront au defaut de quelques unes qui manquent dans celuy cy: de Hexagrammo.

Le IIIme traité doit estre à mon avis celuy qui porte cette inscription: De quatuor tangentibus et rectis puncta tactuum tangentibus, unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates oriuntur. Car c'est là dedans que l'usage de l' Hexagramme paroist, et que les proprietez des Centres et des diametres des sections Coniques sont expliquées. Je croy qu'il n'y manque rien.

Le IVme traité est de proportionibus segmentorum, secantium et tangentium. Car les proprietez fondamentales de sections Coniques, qui dependent de la connaissance du Centre et des diametres estant expliquées dans le traité precedent, il falloit donner quelques belles proprietez universellemont conceues, touchant les proportions des droites menées à la section Conique, et c'est de là que dépend tout ce qu'on peut dire des ordonnèes. Les figures y sont aussi, et je ne voy rien qui manque. J'ay mis après ce traité une feuille qui porte pour titre ces mots: de correspondentibus diametrorum, et dont la 3me page traite de summa et differentia laterum seu de focis.

Le Vme traité est de Tactionibus Conicis, c'est à dire (à fin que le titre ne trompe pas) de punctis et rectis quas sectio Conica attingit, mais je n'en trouve pas toutes les figures.

Le VIme traité sera de Loco Solido. J'y ay mis ce titre, parce qu'il n'y en a point. C'est sur le même sujet que Messieurs des Cartes et Fermat ont travaillé, quand ils ont donné la composition du lieu solide, chacun à sa mode, Pappus leur en ayant donné l'occasion. C'est là le fruit de la doctrine des sections Coniques, car les lieux solides servent à la resolution des problemes solides. Or je croy que Mons. Pascal a voulu donner ce traité à part, ou le communiquer au moins à ces amis, parcequ'il y repete beaucoup des choses du deuxiéme traité mot à mot, et assez au long. C'est pour quoy il commence par cecy: definitiones excerptae ex Conicis, sçavoir du 2 traité susdit où il explique ce qu'il entend par ces mots: Hexagrammum Conicum, Mysticum etc. On peut juger par là que les I. II. III. IV et peutestre V. traités devoient faire proprement les Coniques, et ce

mot se trouve aussi au dos du premier traité. Les grandes figures colorées appartiennent à ce VIme traité.

J'ay mis ensemble quelques fragments. Il y a un papier imprimé dont le titre est Essay des Coniques, et comme il s'y trouve deux fois tout de même, j'espere que vous permettrez, Monsieur, que j'en retienne un. Il y a un fragment de restitutione Coni, sçavoir les diametres et parametres estant donnés, retrouver les sections coniques; ce discours paroist entier, et a ses figures. Il y a un autre fragment, où se trouvent ces mots au devant: magnum problema, et je croy que c'est celuy cy qui est compris: dato puncto in sublimi et solido conico ex eo descripto solidum ita secare, ut exhibeat sectionem Conicam datae similem. Mais cela n'est pas mis au net. Il y a quelques problemes sur une autre feuille qui sont contez, mais il en manque le premier. On en tirera ce qu'on pourra, en forme d'appendix, mais le corps de l'ouvrage composé des VI. traitez est assez net et achevé.

Je conclus que cet ouvrage est en estat d'estre imprimé, et il ne faut pas demander s'il le merite: je croy même qu'il est bon de ne pas tarder davantage, parceque je voy paroistre des traitez qui ont quelque rapport à ce qui est dit dans celuy cy. C'est pourquoy je croy qu'il est bon de le donner au plustost, avant qu'il perde la grace de la nouveauté.

J'en ay parlé plus amplement à Messieurs vos freres, dont je vous dois la connaissance et que j'ay prié de me conserver l'honneur de vostre bienveillance. J'avois esperé de vous revoir un jour icy, mais je voy que vos affaires ne l'ont pas encor permis, et j'ay peu d'esperance de passer par Clermont. Je souhaiterois de Vous pouvoir donner des marques plus convainquantes de l'estime que j'ay pour Vous et de la passion que j'ay pour tout ce qui regarde feu Mons. Pascal. Mais je vous supplie de vous contenter cependant de celles cy. Je suis Monsieur, vostre tres humble etc.*).

Generatio Conisectionum.

Definitiones.

Si a puncto, extra planum circuli sumpto, ad punctum in peripheria sumptum ducta recta linea utrimque infinita circa peripheriam

---

*) Das unter den Leibniz'schen Papieren vorhandene Original hat weder Ort noch Datum. In der gedruckten Ausgabe findet sich das Datum: A Paris, le 30 Août 1676.

feratur, manente puncto illo immobili, superficies quam in sua circumvolutione describit infinita haec recta, dicetur superficies conica; spatium infinitum intra superficiem conicam comprehensum vocabitur conus; circulus vero dicetur basis coni; punctum immobile vertex; pars superficiei quae a vertice versus basim in infinitum ad alteras partes protenditur, dicetur semisuperficies conica; recta illa modo assumpta, in quocunque circumvolutionis suae situ constituta, verticalis dicetur.

Corollarium 1.

Hinc patet, si a puncto verticis ad quodlibet punctum in peripheria vel in superficie conica ubicumque sumptum ducatur recta linea infinita, totam hanc rectam infinitam esse in superficie conica, seu verticali.

Corollarium 2.

Si sumantur in superficie conica duo puncta, quae recta linea jungantur, et ipsa in infinitum producta ad verticem perveniat, tota haec superficiei conicae incumbit, seu verticalis erit; si vero ad verticem non perveniat, nullum erit punctum in recta praeter duo assumpta, quod sit in superficie conica; tota vero linea erit partim intra partim extra.

Corollarium 3.

Hinc patet 3 verticales non existere in eodem plano, eo quod tria puncta in peripheria circuli sumpta non possunt esse in eadem recta.

Corollarium 4.

Igitur planum infinitum ubicumque positum necessario occurret superficiei conicae ubicumque positae, quia ex tribus quibuscumque verticalibus una necessario occurret et huic plano; hic autem concursus dicetur sectio coni, seu uno verbo conisectio.

Scholium.

Occurrere autem sex modis possunt planum et superficies conica, vel enim planum occurret conicae superficiei in solo verticis puncto, tunc conisectio est punctum; vel planum per verticem transiens tangit superficiem conicam . . . .*) unam ex verticalibus, talis conisectio est recta linea; vel per verticem transiens dividit totam superficiem in duas partes aequales, talis conisectio est ang. rectilineus; vel per verticem non transiens, nulli ex verticalibus parallelum est, talis conisectio est Antobola, eo quod in se ipsam redit; vel rursus per verticem non transiens, uni tantum e verticalibus parallelum est, talis conisectio di-

*) Lücke des Manuskripts.

cetur Parabola; vel adhuc non transiens per verticem duabus e verticalibus parallelum est, et dicetur sectio haec hyperbola. Sunt ergo sex conisectionum species: Punctum, Recta linea, Ang. rectilineus, Antobola, Parabola, hyperbola.

Definitio 2.

Recta ad punctum tendere dicitur, quae ad illud, si opus est producta pervenit, et recta ad punctum in alia recta ad distantiam infinitam datum, duci seu tendere dicitur qua ipsi parallela est.

Definitio 3.

Duae Rectae aut plures quomodocumque sint positae, dicuntur semper concurrere, et quidem ad distantiam vel finitam, si se in eodem puncto intersecent, vel infinitam, si sunt parallelae.

Definitio 4.

Recta infinita in plano conisectionis ducta, quae conisectionem secat in uno tantum puncto, dicitur monosecans.

Definitio 5.

Recta infinita in plano conisectionis ducta, quae ipsam conisectionem non nisi ad distantiam infinitam attingit, et quibusdam Monosecantibus parallela est, dicitur asymptotos.

Definitio 6.

Recta infinita in plano Circuli ducta, quae ipsius peripheriam tangit vel secat, dicitur ad Circulum.

Corollarium.

Coroll. de apparentiis punctorum peripherae.

Hinc patet, quod si oculus sit in vertice coni, sitque objectum peripheria circuli qui est coni basis, et tabella sit planum utrimque occurrens superficiei conicae, tunc conisectio quae ab ipso plano in superficie conica producetur, sive sit punctum sive sit Recta, sive Angulus, sive Antobola, sive Parabola, sive hyperbola, erit apparentia ipsius Peripheriae circuli.

Corollarium.

Iisdem positis, si planum tabellae non per verticem transiens nulli e verticalibus seu nulli radio sit parallelum, atque ideo efficiat antobolam, manifestum est, omnia puncta peripheriae projicere suas apparentias in planum tabellae conisectionis ad distantiam finitam.

Scholium.

Inde fit, ut Antobola in se ipsam redeat et spatium finitum complectatur.

Corollarium.

Iisdem positis, si planum tabellae uni tantum e verticalibus seu uni e radiis sit parallelum, ideoque efficiat parabolam, manifestum est, omnia puncta peripheriae Circuli projicere suas apparentias in planum conisectionis ad distantiam finitam, dempto uno puncto quod non apparet nisi ad distantiam infinitam.

Scholium.

Inde fit, ut Parabola in infinitum extensa infinitum spatium suscipiat, quamvis sit apparentia peripheriae circuli quae finita est, et spatium finitum complectatur.

Corollarium.

Iisdem positis, si planum tabellae duabus e verticalibus parallelum sit, adeoque efficiat hyperbolam, manifestum est, omnia puncta ejus peripheriae suas apparentias projicere in plano visionis tanquam tabella ad distantiam finitam, demptis duobus punctis quorum apparentia propter parallelismum non nisi ad distantiam infinitam reperientur, ideoque vocabuntur puncta non apparentia circuli, et respectu hyperbolae puncta deficientia.

Scholium 1.

Inde fit ut hyperbola sit in infinitum extensa et duabus constet partibus, quarum quaelibet infinitum spatium suscipit; una ex semihyperbolis est apparentia partis unius Peripheriae, altera alterius. Sic singula puncta peripheriae dant suas apparentias in alterutra semihyperbolarum, demptis duobus punctis quae in neutra semihyperbola reperiuntur nisi ad distantiam infinitam.

Scholium 2.

Ex tribus praecedentibus corollariis patet, duo esse puncta deficientia in hyperbola, unicum in Parabola, nullum in Antobola.

Corollarium.

de apparentiis secantium.

Iisdem positis, si planum secans superficiem conicam, Antobolam efficiat, omnes rectae quae circuli peripheriam secant, projicient in planum conisectionis apparentias suas, quae quidem secabunt Antobolam in duobus punctis.

Corollarium.

Si planum superficiem conicam secans, omnes rectae quae circuli peripheriam secant, projicient suas apparentias in planum conisectionis; quod si recta secans peripheriam ad punctum quod apparentia caret, non pertineat, ipsius apparentia in plano tabellae secabit parabolam in duobus punctis; si vero recta ipsa peripheriam secans ad ipsum punctum apparentia carens pertineat, ipsius rectae apparentia erit parallela radio et Parabolam in uno tantum puncto secabit.

Corollarium.

Si planum conicam superficiem secans efficiat hyperbolam, omnis recta quae circuli peripheriam secat et ad neutrum punctorum apparentia carentium pertineat, projicit in planum conisectionis apparentiam suam, quae secat conisectionem in duobus punctis; si vero recta ipsa ad alterutrum punctorum apparentia carentium pertineat, ipsius apparentia secabit hyperbolam, et in uno tantum puncto secabit triangulum; denique ipsa recta jungat ambo puncta quae carent apparentia, ipsius rectae apparentia in plano conisectionis non erit nisi ad distantiam infinitam.

Corollarium.

de apparentiis tangentium.

Iisdem adhuc positis quae supra, si planum tabellae efficiat Antobolam, omnes tangentes peripheriam projicient suas apparentias in planum tabellae tangentes Antobolam in puncto ad distantiam finitam.

Corollarium.

Si planum tabellae efficiat parabolam, omnes tangentes peripheriam, una tantum dempta quae ad punctum non apparens pertinet, projicient suas apparentias in planum tabellae, quae quidem tangent parabolam in puncto ad distantiam finitam, quod erit puncti contactus in peripheria apparentia.

Scholium.

Est ergo in parabola recta deficiens, quae quidem vice fungitur tangentis, cum tangentis sit apparentia.

Corollarium.

Si planum tabellae efficiat hyperbolam, omnes tangentes peripheriam projicient suas apparentias in planum tabellae, etiamsi ad puncta non apparentia pertineant, et quidem si ipsae tangentes peripheriam ad puncta non apparentia non pertineant, ipsarum apparentiae tangent hyper-

bolam in puncto ad distantiam finitam; si vero ducantur tangentes ad puncta non apparentia, ipsarum apparentiae non nisi ad distantiam infinitam hyperbolam attingent, et parallelae erunt alterutri radiorum.

Scholium 1.

Colligendum hinc, asymptotos censeri et sumi pro tangentibus ad distantiam infinitam.

Scholium 2.

Colligitur quoque ex praecedentibus, in parabola esse unam seriem rectarum inter se parallelarum, secantium parabolam in uno tantum puncto.

Scholium 3.

Colligitur quoque, in hyperbola esse duas series rectarum inter se parallelarum, quarum in utraque una recta est, quae non nisi ad distantiam infinitam hyperbolam attingit, seu quae est asymptotos. Denique patet, Parabolam tenere medium inter Antobolam et hyperbolam nam

in Antobola	Parabola	hyperbola
verticalis parallela ne quidem una, punctum deficiens ne quidem unum.	una est parallela, unum est punctum deficiens.	duae verticales sunt parallelae, duo sunt puncta deficientia,
Constat finita linea una, comprehendit spatium finitum unum, series parallelarum nulla.	Una linea infinita, unum spatium infinitum, una series monosecantium	constat duabus lineis infinitis, spatia duo infinita, duae sunt series monosecantium.

XXXVIII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Scriptum quoddam lingua Belgica concinnatnm Belga quidam Georgius Moor vocatus, Algebrae et Mechanices probe peritus, et Parisios nuper profectus apud Collinium nostrum reliquit, cujus Apographum

hic insertum Tibi communicare libuit, eam quidem ob causam, quod dictus Moor, Collinio teste, affirmaverit, scriptum hoc bene intellectum Cardani regulas, ubi illae deficiunt, perficere, et ejusmodi Aequationum radices, quae per surdos exprimuntur, quando sc. non mentiuntur quadraticas, supplere. Adjectam ibi quoque reperies illam Wallisii epistolam, quae eam continet methodum, de qua ultimae tuae litterae loquebantur.

Caeterum, quae de Darii nostri observato non capere te ais, ea brevi se elucidaturum, Collinio affirmante, pollicetur. Extractionem illam Radicis Cubicae ex binomiis Cardanicis (qua fit, ut quantitas imaginaria evanescat inveniaturque radix rationalis Aequationis Cubicae, regulas Cardani respuentis) superioris jam seculi inventum esse; ad haec, Ludovicum Ferrariensem primum omnium revocare docuisse Aequationem quadrato-quadraticam ad Cubicam; Raphaelem Borelli*) insuper primum extrahere docuisse radices rationales ex binomiis Cardanicis in speciem imaginariis: nostrates, quibus scil. ea ostendi, non diffitentur.

Difficile Tibi non videri ais, tollere terminos omnes intermedios ex aequatione arbitraria cujuscunque gradus, idque propterea, quod Arbitraria cum sit, reddi possit divisibilis. Hanc in rem scire te cupit Collinius, per arbitrariam Dnum. Gregorium intelligere aequationem quamcunque, non talem, quam quis ad libitum suum peculiariter elegerit. Praeterea, quoad Aequationes in genere, binam pro solertia sua Gregorius noster methodum nactus est. Earum una omnes radices, dummodo possibiles, exprimit per surdos, Canone scil., qui reperit unam radicem, reliquis omnibus reperiendis, sola signorum quantitatibus illis additorum variatione, inserviente: altera vero priorem perficit, dum omnia signa radicalia tollit, ad superiores purarum potestatum dimensiones ascendendo. Canonum illorum perquam taediosa erit calculatio: interim si quem invenire possimus, qui laborem illum subire et devorare taedium non renuat, communicaturum se Gregorius pollicetur methodum illam demonstratione comitatam.

Quod Aequationum per sinuum et logarithmorum Tabulas explicationem spectat, Pellius noster, ut audio, se id praestiturum pollicitus est Ut datam fidem liberet, quam maxime optamus.

Quando Methodum tuam absolveris, radices aequationum per instrumentum inveniendi, si eam mihi communicare tunc temporis volueris, rem pergratam praestabis.

Dicis incidisse Te nuper in elegantem methodum, qua superiori-

---

*) Muß offenbar Bombelli heißen.

bus aequationibus omnium graduum (ad certam tamen formam redactis) accommodari radices Cardanicis similes possint, idque sine sublatione omnium terminorum inter primum et penultimum mediorum, imo nullo termino sublato, modo certa sit inter terminos intermedios relatio. Hoc quod attinet, putat Collinius, affine id quodam modo esse Gregorii et Tschirnhausii (qui nuper Parisios hinc abiit, et Te sine dubio jam salutavit) methodo generali. Utrumque quippe hunc in eandem circa hoc methodum incidisse existimat speratque Collinius.

Scire cupis, an dare Nostrates Geometrice possint dimensionem Curvae Ellipseos aut Hyperbolae ex data Circuli aut Hyperbolae quadratura. Respondet Collinius, illos id praestare non posse Geometrica praecisione, sed dare eos posse ejusmodi approximationes, quae quacunque quantitate data minus a scopo aberrabunt. Et speciatim quod attinet alicujus arcus Circuli rectificationem, impertiri Tibi poterit laudatus Tschirnhausius methodum a Gregorio nostro inventam, quam, cum ille apud nos esset, Collinius ipsi communicavit.

Num Experientia ipsa omnes circa Chronometrum tuum dubitationes solverit, scire pervelim. Hookii nostri Chronometrum a Rege nostro hactenus valde laudatur; nec dubito quin horologium Hugenii, quod indies ab ipso exspecto, pari sit passu ambulaturum.

Denique, ut pauca adjiciam de iis, quae apud nos nunc agitantur, paucos intra dies videbitis Malpighii de Plantarum Anatome Tractatum curiosissimum pereleganter hic editum, cujus Exemplar ad Justellum meum perferendum Dominico Italo tradidi, quod ille reliquis meis amicis Parisiensibus pro humanitate sua lubenter ostendet. Illustrissimus Boylius, qui plurimum tibi salutem dicit, suas de Qualitatum sensibilium origine mechanica Diatribas, qua potest diligentia, typis mandari nunc curat. Accedit iis Grevii nostri de Argumento Malpighiano libellus, nec non Evelini nostri de Agricultura dissertatio, in Soc. Regiae consessu publico habita, ut et Willisii Pharmaceutices pars secunda, insignissimis, ni fallor, observationibus et iconismis Anatomicis locupletata. Hisce vale, et me Tuum ex asse crede.

Dab. Londini d. 30. Septembr. 1675.

XXXIX.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Hae lineolae hoc tantum volunt, ut inquiram, num epistola mea 30. Sept. novissimi ad te data, reddita tibi fuerit, cui et Georgii Mori Belgae scriptum aliquod Algebraicum, et Wallisii nostri epistolam a Te desideratam inserueram. De redditione mearum addubito, cum nihil ex eo tempore litterarum a Te acceperim. Miror quoque, Dn. Tschirnhausium, nobilem Lusatum, quem Tibi commendaveram, adeo penitus silere, ut, num vivos inter an mortuos degat, ignoremus. Si vivit et valet, promissi sui plane est immemor. Vale, vir clarissime, et me Tui cultorem porro ama.

Dabam Londini d. 20. Decembris 1675.

XL.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift in der Sammlung v. Murr's.

Duarum tibi Literarum debitor, rogo ne sequius interpreteris silentium meum. Soleo enim interrumpi nonnunquam, et haec studia per intervalla tractare.

Quod Tschirnhausium ad nos misisti, fecisti pro amico: multum enim ejus consuetudine delector, et ingenium agnosco in Juvene praeclarum, et magna promittens Inventa mihi ostendit non pauca, Analytica et geometrica, sane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo expectari possit.

Jam diu est quod petiit, ut tibi scribens rogarem pro ipso veniam silentii: adderemque ejus nomine diligentiam ipsi in quaerendis Robervallianis, Pascalianis et Fermatianis non defuisse; defuisse ex parte successum.

Elementa Robervalliana a me ipsi impetrata sunt Manuscripta. Legit, sed mihi assentit, qui tanti esse non puto ut debeant excudi. Sed nescio annon mors Autoris operam sufflaminavit. Jactura certe fuerit non magna. Alia longe utiliora puto exstare ejus Manuscripta, quae ab ipso legata sunt Academiae Scientiarum Regiae. Et executores ab eo nominati Blondellus, Picardus, Brotius.

Professionem Robervallii Regiam (quae et ipsa ejus morte vacat) obtinuit idem Picardus. Nescio an tibi notum sit institutum. Petrus Ramus hanc fundavit Cathedram, et pecunia apud Urbanum Magistratum (à la maison de ville) deposita, Testamento cavit, ut dignissimo petentium conferretur, liceretque, velut praemio proposito, certare. Judices instituit Principem Senatus, Advocatum Regium, Praefectum rei Mercatoriae (cujus munus Consulari simile est) et nescio quos alios. Itaque schedis tota urbe affixis publicatum est, proximo mense Martio adjudicatum iri hoc munus merenti. Addidit Ramus, ne diligentia Professoris, semel recepti, frigesceret, quovis triennio cuivis cum eo certandi potestatem fore. Quod institutum mihi non illepidum videtur, ipsumque spectaculum hujus ingeniorum certaminis erit credo non injucundum. Haec de Robervallianis.

Pascalianorum quorundam Manuscriptorum facta mihi spes est.

Frenicli Triangulum Rectangulum Numericum prelo paratur, cura Mariotti, qui non paucas proprias observationes adjiciet.

Elementa Mathematica Johannis Prestet (qui apud Malebranchium agit egitve) prodiere tandem, magno satis volumine in 4to. Intus vero nonnisi Arithmeticam et Algebram reperies. Probo Arithmeticam per literas expositam; id enim poterit Arithmeticis reddere Symbolicam familiariorem. Probo etiam Casus Aequationum Quadrato-quadraticarum particulares, secundum Cartesii Regulam ab eo calculatos. Caetera omnia pervulgata, et eorum quae vos expectastis nihil. Praeterea nullum Problema difficile solutum videbis. At quod miror, ne exemplum quidem Geometricum ullum allatum. Ita non est quod putes quicquam Vestratibus praereptum, Pellioque et Newtono et Gregorio integra manebunt, quae de Resolutione Aequationum per sinus aut Logarithmos, aut Series numerorum Infinitas pollicentur, quae aliquando videre valde velim.

Illustrissimo Boylio rogo me commendes, quandocunque occasio dabitur. Virum in tantum aestimo, in quantum virtus et doctrina in homine possunt. Legi nuper Diatribam ejus de Studio Theologico non contemnendo, quae me mire affecit et in illa voluntate confirmavit, quae mihi, ut nosti, jam dudum fuit, Scientiam de Mente tractandi per Geometricas Demonstrationes. Multa in hoc genere mira a me sunt observata, quae aliquando, quo par est rigore, exposita dabo.

Cartesianis quibusdam in hoc argumento non acquiesco. Multa inaedificantur Ideis, quae mihi Sophismatis suspecta sunt. Sed et in Corpore necessarium aliud quiddam ab Extensione. Quare Discrimen Mentis a Materia nondum patet ex Discrimine Cogitationis et Extensionis. Aliud nobis dedit principium Natura rerum, ex quo patet Perennitas Mentis directa Demonstratione. Quaecunque a Scholasticis, a Valeriano Magno, a Cartesio, aliisque ex Entis illius notione ducuntur, cujus Essentia est Existere, ea tamdiu vacillant, quamdiu non constat an Tale Ens possibile sit, si intelligi possit. Pronunciare talia, facile est; intelligere, non aeque. Posito, tale Ens esse possibile, sive aliquam esse Ideam respondentem his Vocabulis, utique sequitur, Existere tale Ens. Multa videmur nobis Cogitare (confuse scilicet) quae tamen implicant: exempli gratia, Numerus omnium numerorum. Valde suspectum esse debet nobis Notio Infiniti, et Minimi, et Maximi, et Perfectissimi, et ipsius Omnitatis. Neque fidendum his notionibus, antequam ad illud Criterion exigantur, quod mihi agnoscere videor, et quod velut Mechanica ratione fixam et visibilem et (ut ita dicam) irresistibilem reddit veritatem. Quale nobis inexplicabili beneficio tributum est a Natura.

Haec Algebra, quam tanti facimus merito, generalis illius artificii non nisi pars est. Id tamen praestat, Errare ne possumus quidem si velimus. Et, ut Veritas quasi picta, velut Machinae ope in charta expressa, deprehendatur. Ego vero agnosco, quidquid in genere probet Algebra, non nisi superioris scientiae beneficium esse, quam nunc Combinatoriam Characteristicam appellare soleo, longe diversam ab illa, quae, auditis his vocabulis, statim alicui in mentem venire posset. Hujus mirabilem vim ac potestatem praeceptis aliquando et speciminibus me explicaturum spero, si sanitas atque otium fuerit. Non possum paucis verbis rei naturam complecti. Illud tamen dicere ausim, Nihil facile ad humanae mentis perfectionem efficacius concipi posse, ac, recepta hac philosophandi ratione, fore tempus, et mox fore, quo de Deo ac Mente non minus certa, quam de Figuris Numerisque habeamus, et quo Machinarum Inventio non difficilior, quam Constructio Problematum Geometricorum: exhaustisque his studiis (nisi quod semper Infinitorum Theorematum elegantissimae supererunt harmoniae, indies observandae tunc magis quam eruendae) ad solam homines redibunt naturae indagationem, quae nunquam in potestate futura est. Nam in Experimentis, Ingenii et Industriae Fortuna miscetur.

Boyliano itaque more semper philosophabuntur homines, nostrum aliquando ad finem perducent, nisi quatenus ipsa quoque Natura rerum, in quantum cognita est, calculis subjici potest, et novis detectis et ad Mechanismum redactis qualitatibus, novam applicandi materiam Geometris

dabit. Sed impetus scribendi effert me longius quam constitueram, facitque ut non satis cohaerentia dicam.

Superest ut ad tuarum literarum Algebraica respondeam. Plurimum tibi debeo doctissimoque Collinio, quod communicare mihi voluistis non pauca nec contemnenda, qualia Epistola Wallisii continet, et quae ei adjunxistis.

Sed (ut tibi dicam quod res est) in illa (nescio cujus) de Regulis Cardani Diatriba non invenio, quin Regulam Cardani ille longe alias quam nos sumit. Cartesius aliique per Regulam Cardani intelligunt Methodum qua ille expressit quasdam Radices cubicas per Irrationales. Autor Diatribae intelligit per Regulam Methodum qua ille ex illis Binomiis Irrationalibus denique Rationales Radices extrahit.

Id vero Cardanus facit quibusdam tentamentis adhibitis, qualia plurima dari possunt, et mihi quoque non ignota sunt. Ergo nec Autor Diatribae aliud quam ejusmodi determinationes loquitur quibus Radices facilius determinantur. Ego vero has determinationes non curo, quoniam Schotenius (vel quisquis est Autor Regulae circa Binomia a Schotenio adjectae) regulam dedit perfectam, et nulli tentamento obnoxiam, in numeris extrahendis. Binomiorum Cubicorum Radices tunc absunt imaginariae. Sed cum adhuc adsunt imaginariae (ut $\sqrt{-1}$), cessat Regula Schoteniana, ut facile per ejus rationem instituti patebit. Fateor eas Regulas quae per Tentamenta et Determinationes procedunt, facile posse extendi ad Imaginarias continentia. Sed qui Regulam tentamentis carentem, qualis Schotenii est, etiam imaginariis commune dederit, mihi notus non est. Eam vero jamdudum est quod mihi videor recepisse, quam aliquando distincte expositam vobis communicabo. Adjiciamque alia, ut opinor, curiosa de Imaginariis in speciem tractandis et dignoscendis, Geometrice pariter Analyticeque. Mittam et viam meam perveniendi ad Radices Irrationales altiorum gradnum, cujus perelegans habeo specimen. Sed, quominus perficiam, deterret calculns, praesertim cum alii in ea re feliciter laborent: sufficiat aditum aperuisse.

Habebis et a me Instrumentum Aequationes omnes Geometrice construendi unicum; et meam Quadraturam Circuli ejusque partium per seriem Numerorum Rationalium infinitam, de qua aliquoties scripsi, et quam jam plusquam biennio abhinc geometris hic communicavi.

Sed et ad aliud Problema Geometricum, hactenus pene desperatum, nuper aditum reperi felicem. De quo pluribus loquar, ubi otium erit absolvendi.*)

*) Es ist wohl zweifellos, daß Leibniz an dieser Stelle auf die Manuscripte hinweist, in welchen er zuerst den Algorithmus der höheren Analysis zur Anwendung brachte. Sie folgen in der Beilage.

Haec vero omnia ubi ita in ordinem redegero ut mitti possint, singulatim tibi spondeo. Ex quibus agnoscetis, credo, non tantum soluta a me Problemata, sed et nova methodo (hoc enim ego unice aestimo) detecta esse.

Nunc vero in eo sum, ut iter suscipiam aliquot septimanarum. Nam ante exitum Januarii rursus Parisiis ero. Quare non est ut rescribas, donec per secundas literas reditus te mei admonuero. Vale et fave etc.

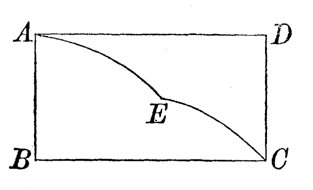
Paris. 28 Decemb. 1675.

Beilage.

A.

Analysis Tetragonistica ex Centrobarycis.*)

25 Oktober 1675.



Sit curva quaelibet AEC referenda ad angulum rectum BAD, sit AB $\sqcap$ DC $\sqcap$ x, et ultima x $\sqcap$ b, et BC $\sqcap$ AD $\sqcap$ y, et ultima y $\sqcap$ c. Patet omn. $\overline{y\,x\text{ ad }x} \overset{(1)}{\sqcap} \frac{b^2c}{2} -$ omn. $\overline{\frac{x^2}{2}\text{ ad }y}$. Nam momentum spatii ABCEA ex AD sit ex rectangulis ex BC $\sqcap$ y in AB $\sqcap$ x. At vero momentum spatii ADCEA ex AD seu complementi prioris sit ex summa quadratorum DC, sive $\frac{x^2}{2}$, dimidiata quod momentum, si auferatur a momento totius rectanguli ABCD ex AD, id est a cin omn. x, sive a $\frac{cb^2}{2}$, restabit momentum spatii ABCEA. Unde habetur aequatio quam dixi. Qua reformata sequitur omn $\overline{yx\text{ ad }x}$ + omn. $\frac{x^2}{2}$ ad y $\overset{(2)}{\sqcap} \frac{b^2c}{2}$, adeoque harum duarum figurarum in unum junctarum semper haberi quadraturam. Qui est centrobarycae apex.

Sit aequatio curvae naturam exprimens $ay^2 + bx^2 + cxy + dx + ey + f \overset{(3)}{\sqcap} o$. Ponatur $yx \overset{(4)}{\sqcap} z$, fiet $y \overset{(5)}{\sqcap} \frac{z}{x}$; quo valore in aequatione 3. inserto

*) Diese Inhaltsangabe ist auf dem ersten Blatt des Manuscripts, das aus drei Folioblättern besteht, am Rande bemerkt. Auf den beiden folgenden Blättern findet sie sich als Aufschrift.

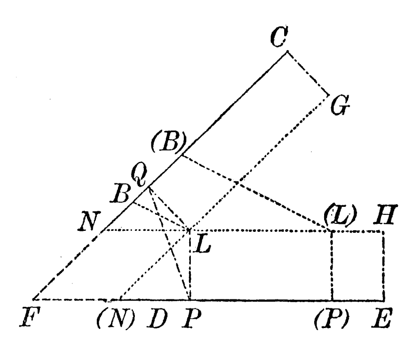
fiet: $a\frac{z^2}{x^2} + bx^2 + cx\frac{z}{x} + dx + e\frac{z}{x} + f \overset{(6)}{\sqcap} o$, sive sublatis fractionibus fiet $az^2 + bx^4 + cx^2 z + dx^3 + ezx + fx^2 \sqcap o$.

Sit rursus $x^2 \overset{(8)}{\sqcap} 2\omega$, eumque valorem inserendo in aequ. 3 fiet $ay^2 + 2b\omega + cxy + dx + ey + f \overset{(9)}{\sqcap} o$, adeoque erit $x \overset{(10)}{\sqcap} \frac{-ay^2 - 2b\omega - ey - f}{+cy + d}$ $\overset{(11)}{\sqcap} \sqrt{2\omega}$, et quadrando utrobique fiet: $a^2 y^4 + 4bay^2 \omega + 2aey^2 + 2afy^2 + 4b^2 \omega^2 + 4be\omega y + 4bfw + e^2 y^2 + 2efy + f^2 - 2c^2 y^2 \omega^2 - 4cdy\omega - 2d^2\omega \overset{(12)}{\sqcap} o$.

Quod si jam curva describatur secundum aequationem 7. itemque alia secundum aequationem 12, ajo, quadraturam figurae unius pendere ex quadratura figurae alterius, et contra. Quod si jam loco aequationis 3. aliam sumamus altiorem, seu tertii gradus, rursus duas alias habebimus loco 7. et 12, et ita continuando dubium non est, quin certam quandam progressionem ipsarum 7 et ipsarum 12 habituri simus, ut sine calculo continuari possit in infinitum, non difficili opera. Ex data autem una alicujus curvae aequatione omnes aliae generali expressione exhiberi possunt, ex quibus compendiosissima eligi potest.

Datis figurae cujusdam momentis ex duabus quibusdam rectis, dataque figurae ejusdem area, habetur ejus centrum gravitatis. Dato autem figurae cujusdam (aut etiam lineae] centro gravitatis et magnitudine habetur ejus momentum ex aliis quibuscunque rectis. Itaque data figurae cujusdam magnitudine et momento ex duabus quibusdam rectis, datur ejus momentum ex qualibet recta data. Hinc etiam multae quadraturae ex quibusdam datis. Momentum autem cujusdam figurae ex recta qualibet etiam generali calculo exprimi potest.

Momentum divisum per magnitudinem dat distantiam centri gravitatis ab axe librationis. Sint in eodem plano rectae positione datae, sive parallelae sint sive productae concurrant in F, Momentum ex BC inventum sit ba^2, Momentum ex DE inventum sit ca^2. Area figurae sit v, erit distantia centri gravitatis a recta BC, nempe $CG \sqcap \frac{ba^2}{v}$, et distantia ejus a recta DE, nempe $EH \sqcap \frac{ca^2}{v}$, ergo CG ad EH est ut b ad c, sive rationem habent datam. Ponatur jam rectam EH in eodem plano manentem percurrere normaliter ipsam DE, et rectam CG percurrere normaliter ipsam BC, et apicem G rectam G(N), apicem vero H rectam HN, vestigium scilicet suum relinquere. Necesse est si BC et DE



alicubi concurrunt, etiam G(N) et HN alicubi concurrere, sive intra sive extra F; concurrant in L, erit angulus HLG aequalis angulo EFC, et angulus PLQ (ponendo PL ⊓ EH et LQ ⊓ CG) erit supplementum ipsius anguli EFC ad duos rectos, adeoque erit datus. Iuncta PQ, habebitur Triangulnm PQL, cujus dabitur angulus verticis L ad rationem laterum ad verticem QL ad LP. Cum ergo sumta BL vel (B)(L) quantacunque, angulus BLP semper maneat idem, ac praeterea sit ut BL ad LP ita (B)(L) ad (C)(P), erit etiam ut BL ad (B)(L) ita LP ad (L)(P), quod contingere patet si etiam FL ipsis proportionalis, seu recta transit per FL (L) etc. Unde cum non dentur plura hic loca, sequitur locum esse rectam. Datis ergo duobus momentis figurae ex duabus rectis non parallelis, dabitur linea recta transiens per centrum gravitatis. Quare datis tribus figurae momentis ex tribus axibus librationis qui non sint omnes paralleli inter se, dabitur figurae area et centrum gravitatis. Ecce apicem Centrobarycae. Si dentur duo ejusdem figurae momenta ex duabus rectis inter se parallelis, dabitur figurae area, sed non centrum gravitatis.

Cum sit finis Centrobarycae, ex datis momentis invenire dimensiones, hinc habemus duo theoremata generalia: si dentur ejusdem figurae momenta duo ex duabus rectis sive axibus librationis parallelis inter se, dabitur ejus magnitudo; item si ex tribus licet non parallelis. Hinc jam videtur methodus patere ad inveniendas curvas Ellipticam et Hyperbolicam ex datis Circuli et Hyperbolae quadraturis. De quo schediasmate peculiari.

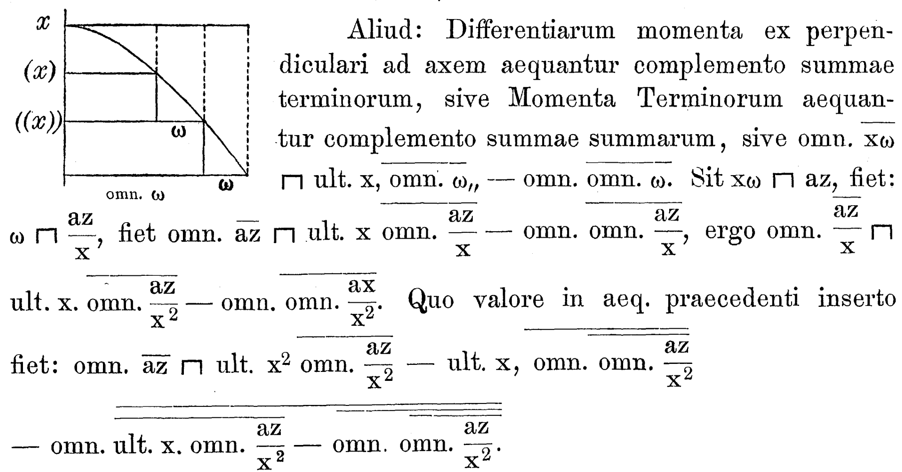
26. Octobr. 1675.

Alia Analysis Tetragonistica haberi potest ope curvarum. Scilicet eadem curva in diversa resolvetur Elementa, prout ad diversas rectas ordinatae referuntur. Unde diversae quoque oriuntur figurae planae, curvae propositae Elementis homogeneae, cumque ex data curvae dimensione inveniantur omnes, sequitur ex data unius figurarum hujusmodi dimensione etiam caeteras haberi.

Aliis modis inveniri possunt figurae quae ex alia pendent, si ordinatae figurarum quarum quadratura habetur aut quarum quadratura ex data habetur, adduntur datae. Quemadmodum tractabiliora sunt spatia quam curvae, quoniam pluribus modis secari ac resolvi possunt, ita tractabiliora sunt solida planis et generatim superficiebus. Itaque ubi

methodum qua superficies examinamus, ad solida transferemus, multa nova detegemus, et facile saepe demonstrabimus de superficiebus per solida, quae in ipsis superficiebus difficulter habentur. Eleganterque observavit Tschirnhausius pleraque ab Archimede demonstrata, ut quadraturam parabolae, et quae ab his pendent circa sphaeram, conum, cylindrum, ex sola solidorum rectilineorum sectione ac compositione manifesta ac palpabilia reddi posse.

Modi varii describendi nova solida: Si ex puncto in sublimi posito recta rigida descendens circa planum ducatur, cujuscunque illud sit figurae, coniformium genera producentur. Nam si planum circuli circumferentia terminatum sit, orietur conus rectus vel scalenus. Ita si figura quae pro basi est, seu planum, aliquod centrum habeat, ut Ellipsis, orietur coniforme Ellipticum rectum, si punctum datum centro immineat, sin minus, scalenum. Aliud conoeides, aliud coniforme Ellipticum. Si linea rigida ex puncto descendens sit circularis aliave curva, tunc aut puncto vel polo illi ita affixa est, ut non nisi unius in eo motus libertatem habeat, scilicet circa quendam axem, et tunc necesse est ut basis seu planum sit circulus, et ut centro ejus immineat punctum vel polus. Sin aliter, necesse est ut linea rigida aliorum habeat motuum libertatem nempe sursum et deorsum, aliterve secundum quandam rectam; et tunc semper ubi opus erit, ascendet descendetve ut semper planum datum sua circumrotatione circa axem attingat. Et hoc est secundum Coniformium genus. Tertium genus est eorum, ubi praeter motum illum duplicem gyrationis cum axe, et axaltationis, et descensionis, curva sola vel axis solus vel etiam figura cum axe rursus alios interim motus exercent, vel ipsum etiam punctum interim movetur.



Aliud: Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem aequantur complemento summae terminorum, sive Momenta Terminorum aequantur complemento summae summarum, sive omn. $\overline{x\omega}$ $\sqcap$ ult. x, $\overline{\text{omn. } \omega_{,,}}$ — omn. $\overline{\text{omn. } \omega}$. Sit $x\omega \sqcap az$, fiet: $\omega \sqcap \frac{az}{x}$, fiet omn. $\overline{az} \sqcap$ ult. x $\overline{\text{omn. } \frac{az}{x}}$ — omn. $\overline{\text{omn. } \frac{az}{x}}$, ergo omn. $\overline{\frac{az}{x}} \sqcap$ ult. x. $\overline{\text{omn. } \frac{az}{x^2}}$ — omn. $\overline{\text{omn. } \frac{ax}{x^2}}$. Quo valore in aeq. praecedenti inserto fiet: omn. $\overline{az} \sqcap$ ult. x^2 $\overline{\text{omn. } \frac{az}{x^2}}$ — ult. x, $\overline{\text{omn. } \overline{\text{omn. } \frac{az}{x^2}}}$

— $\overline{\overline{\text{omn. } \overline{\text{ult. x. omn. } \frac{az}{x^2}} - \overline{\text{omn. } \overline{\text{omn. } \frac{az}{x^2}}}}}$.

Et ita iri potest in infinitum.

$\text{Omn.}\ \frac{a}{x} \sqcap \text{ult. x.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x^2}} - \text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x^2}}$; Et $\text{omn. a} \sqcap \text{ult. x.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x}}$ $- \text{omn.}\ \overline{\text{omn.}\ \frac{a}{x}}$, quod postremum theorema exhibet summam logarithmorum ex data Hyperbolae quadratura.

Numeros abscissas repraesentantes soleo appellare ordinales, quia ordinem terminorum sive ordinatarum exhibent. Si quadrato ordinatae figurae quadrabilis addas quadratum rectae constantis, radices summae duorum quadratorum repraesentabunt curvam quadratricis. Quod si radices summae duorum quadratorum dent figuram quadrabilem, etiam curva erit rectificabilis. Datae progressionis curvam describere: a Termino progressionis quadrato auferatur quadratum quantitatis constantis; Radicum ex duobus quadratis figura quadratrix descripta curvam habebit quaesitam. Curva rectificabilis non ideo est descriptibilis. Descriptae curvae elementa pluribus diversis modis enuntiari possunt. Comparentur diversi modi enuntiandi elementa curvae cum diversis modis enuntiandi figuram ei homogeneam, prout ad diversa refertur. Imo et solidum curvae homogeneum adhuc pluribus modis enuntiari potest; et superficies homogenea curvae vel figurae.

Analyseos Tetragonisticae pars 2da.*)

29 Octobr. 1675

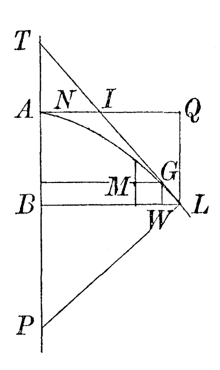
Credo nos tandem dare posse methodum, qua cujuslibet figurae Analyticae figura analytica quadratrix inveniri potest, quando id possibile, aut quando id fieri non potest, poterit tamen semper figura describi analytica, fungens vice quadratricis quam proxime. Hoc ita concipio: Proposita sit aequatio figurae cujus quaeritur quadratrix, cujus incognitae x et v. Sumatur aequatio ad curvam indeterminatam: $o \overset{(1)}{\sqcap} b + cx + dy + ex^2 + fy^2 + gyx + hy^3 + lx^3 + mxyy + yxx$ etc. Ordinetur ad tangentes hoc modo: $- dy - 2fy^2 - gyx - 3hy^3 - 2mxy^2 - x^2 y$ etc. $\overset{(2)}{\sqcap} ct + 2ext + gyt + 3lx^2 t + my^2 t + 2yxt$ etc. Jam $\frac{t}{y} \overset{(3)}{\sqcap} \frac{a}{v}$. Ergo ex aequatione $\frac{t}{y} \sqcap \frac{a}{v}$ tollendo ipsas t et y ope aequationum 1. et 2. debet prodire aequatio illa ipsa, quae est figurae curvilineae ad quadrandum propositae, et conferendo terminos productae terminis datae, si nulla est in conferendo impossibilitas, habemus quadraturam. Sin oritur impossibilitas, certum est figuram analyticam propositam non habere analyticam quadratricem.

*) Leibniz hat bemerkt: refertur ad praecedentem 25. Octobr. 1675.

Facile autem apparebit, si quae ei addantur quae eam insensibiliter immutent, posse inde figuram fieri quadrabilem, ob aliam plane aequationem prodeuntem. Caeterum ut impossibilitas appareat, considerandae sunt difficultates. Nimirum obstat quod aequatio producta est prolixitatis infinitae, data autem definita. Respondeo: eo ipso dum comparantnr, videbitur quousque maximae potestates incognitarum indefinitae excurrere possint. Regeri potest, fieri posse ut producta aequatio indefinita plures habeat terminos quam finita data, et tamen ad eam reduci possit, quod scilicet per aliam vel finitam vel indefinitam dividi possit. Haec difficultas me diu jam anno abhinc tenuit. Sed nunc video, non debere nos ea deterreri. Nam nunc fieri potest, ut methodo tangentium ex figura quadam determinata (cujus aequatio sit indivisibilis per rationalem) oriatur figura ambigua, quia non potest ad unum punctum figura quaelibet nisi unam habere tangentem, ergo aequatio producta neque per finitam dividi potest, neque etiam per indefinitam, nam etiam figurae indefinitae revera seu quarum ordinatae exprimuntur aequatione infinita, habent ordinatas, easque aliquando finitas quae deberent satisfacere. Tametsi difficultatem adhuc exiguam praevideam, quod scilicet videatur fieri aliquando ut radices aequationum omnes non serviant ad problematis solutionem. Ego tamen, ut verum fatear, credo. Alia est difficultas satis magna, quod scilicet fieri possit, ut aequatio finita exprimatur etiam per indefinitam, adeo ut aequatio producta coincidere possit cum data, etsi id non appareat, v. g. $y^2 \sqcap \frac{x}{1+x} \sqcap x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6$ etc., et ita infinitae aliae possunt formari variis compositionibus et divisionibus. Hic fateor difficilis nodus. Sed responderi sic potest: Si quam habet figura quadratricem analyticam, utique ipsa sub indefinita intelligi potest, et tunc non dabit utique iudefinitam, sed finitam datae aequivalentem. Eodem modo certum est etiam, quadratricem datae ordinarie tractatam, si qua est, datam solam non ambiguam daturam, adeoque et illa quae ab ea non nisi nomine differt. Una superest difficultas, non videri judicari posse quis sit ultimus vel primus terminus productae indefinitae, quia potest fieri ut termini inferiores destruantur, et tunc ipsa sit divisibilis vel per y vel per x, vel per yx, aut horum potestates. Et hoc non video quid prohibeat. Eademque manet difficultas, sive a minimo sive maximo gradu incipias assumtam initio aequationem indefinitam. Pone ergo in aequatione producta dividi posse, necesse est absit quantitas cognita, item absint omnes termini, ubi sola x, vel si mavis, omnes termini, ubi sola abest y. Quod si id examinando continue inciditur in impossibilitatem, in calculo hoc generali, tunc pro certo habere poterimus solutam esse hanc

difficultatem, nec unquam posse evenire talem divisionem post calculum. Sin fieri potest, tunc alii post alios destruentur, ut deprimi possit aequatio producta, et instituenda comparatio, et tunc videndum an non generaliter evinci possit, procedere non posse comparationem utcunque procedamus destruendo. Forte si figurae quadrandae redigantur antea ad simplicissimas aequationes, facilius detegentur impossibilitates Nam et quadratrix praesumitur fore simplicior. Succurrit adhuc aliud auxilium, quod scilicet varii ad idem ducentes plane diversi inter se calculi institui possunt quorum producti comparabiles.

BL $\sqcap$ y, WL $\sqcap$ l, BP $\sqcap$ p, TB $\sqcap$ t, AB $\sqcap$ x, GW $\sqcap$ a, y $\sqcap$ omn. l (+*). Ut obiter dicam, sunt numeri compositi qui sibi addi non possunt vel demi per partes, nempe denominati a potestatibus seu subpotestatibus sive surdi. Sunt alii numeri denominati qui nec in se multiplicari possunt per partes, et tales sunt numeri summarii, v. g. omn. l non possunt multiplicari in omn. p, nec enim fieret $y^3 \sqcap \overline{{}^2\,\text{omn. omn. pl.}}$ Ut tamen multiplicatio illa fieri in rebus intelligatur, sic agendum: Volumus spatium quod repraesentet omnes p in omnes l, non poterunt servire ductus Gregorii a S. Vincentio, quibus figurae in figuras dicuntur, sic enim non ducitur una ordinata in alias omnes, sed una ordinata in unam. At inquies, si una ordinata ducenda in alias omnes, prodibit spatium sursolidum, summa nimirum infinitorum solidorum. Huic malo remedium reperi sane admirabile. Repraesententur omnes l per lineam infinite parvam WL, id est, opus est linea quadratrice omn. l. Erit linea BL $\sqcap$ omn. l, quae ducatur in omnes p figura plana repraesentatas, fiet solidum. Si omn. l sint recta et omnes p curva, fiet superficies curvilinea ductui homogenea. Sed haec vetera. Ecce jam novum. Si ipsis WL, MG seu omnibus l imponatur singulis eadem curva repraesentans omnes p, debet autem curva p esse ejusdem plani, et sibi semper parallelo ejus plano existente per curvam AGL ferri, et habebitur quod desideramus. Loco curvae et planum variis modis terminatum ita ferri potest per curvam, et fiet solidum, priore modo superficies curvilinea, et superficiei sive solidi sectio semper eadem. Si possumus tamen fingere quod decrescant interim inter ferendum, videndum an certus sit numerus superficierum analyticarum, ut linearum analyticarum. Sed haec obiter. Nota: superficies curvilinea facta motu curvae sibi parallelae



*) Dieses Zeichen gebraucht Leibniz, um anzuzeigen, daß er eine Bemerkung einschaltet.

per curvam aequabitur cylindro curvae sub BL, $\overline{\text{summa omnium } l}$. Sed haec obiter. Porro $\frac{l}{a} \sqcap \frac{p}{\text{omn.}\, l \sqcap y}$. Ergo $p \sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\, l}}{a}\, l$. Itaque omn. $\frac{yl}{a}$ non vult dicere omn. y in omn. l, nec y omn. l. Quare, cum sit $p \sqcap \frac{y}{a}\, l$ sive $p \sqcap \frac{\text{omn.}\, l}{a}\, l$, hoc vult dicere, omn. l ductas in unum illud quod uni illi p respondet. Ergo omn. $p \sqcap$ omn- $\overline{\overline{\frac{\text{omn.}\, l}{a}}, l}$. Atqui aliunde demonstravi omn. $p \sqcap \frac{y^2}{2}$ sive $\sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\, l}\,\boxed{2}}{2}$. Ergo habemus theorema quod mihi videtur admirabile, et novo huic calculo magni adjumenti loco futurum, nempe quod sit $\frac{\overline{\text{omn.}\, l}\,\boxed{2}}{2} \sqcap \text{omn.}\, \overline{\overline{\text{omn.}\, l}\, \frac{l}{a}}$, qualiscunque sit l, id est si omnes l ducantur in ultimam, et aliae omnes l rursus in suam ultimam, et ita quoties id fieri potest, summa horum omnium aequabitur dimidiae summae quadratorum quorum latera sunt summae ipsorum l, seu omnes l. Pulcherrimum ac minime obvium Theorema. Tale est etiam Theorema: omn $\overline{xl} \sqcap x\, \overline{\text{omn.}\, l} - \text{omn.}\, \overline{\text{omn.}\, l}$, ponendo l esse terminum progressionis et x esse numerum qui exprimit locum seu ordinem ipsius l ei respondentis, seu x esse numerum ordinalem, l rem ordinatam. Nota: in his calculis observari potest lex homogeneorum, nam si omn. praefigatur numero seu rationi, vel infinite parvo, fit linea; si lineae, fit superficies; si superficiei, fit corpus, et ita in infinitum etiam ad dimensiones. Utile erit scribi $\int$ pro omn., ut $\int l$ pro omn. l, id est summa ipsorum l. Itaque fiet $\frac{\overline{\int l}^2}{2} \sqcap \int \overline{\int \overline{l}\, \frac{l}{a}}$ et $\int \overline{xl} \sqcap x \int \overline{l} - \int\int \overline{l}$. Et ita apparebit semper observari legem homogeneorum, quod utile est ut calculi errores vitentur. Nota: si analytice detur $\int l$, dabitur etiam l. Ergo si detur $\int\int l$, dabitur etiam l, sed non si datur l, dabitur et $\int l$. Semper $\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$. Nota: omnia haec theoremata vera de seriebus, in quibus differentiae terminorum ad terminos rationem habent minorem qualibet assignabili. $\int x^2 \sqcap \frac{x^3}{3}$. Nota jam, si termini summandi affecti sint, quomodo hinc afficiatur summa, regulam generalem talem: v. g. $\int \overline{\frac{a}{b}\, l} \sqcap \frac{a}{b} \times \int \overline{l}$, scilicet si $\frac{a}{b}$ sit terminus constans, ducendus est in maximum ordinalem; quod

si sit terminus inconstans, tunc tractari non potest nisi ad ipsum l reduci possit vel utrumque ad quantitatem communem nempe ordinalem. Nota: quotiescunque in aequatione Tetragonistica non nisi una est litera varians ut l, tunc potest poni esse terminus constans, et ipsa $\int l$ erit $\sqcap x$. Et huic fundamento initur theorema $\frac{\overline{\int l}^2}{2} \sqcap \int \overline{\int l}\, l$, id est $\frac{x^2}{2}$ $\sqcap \int x$. Eodem ergo modo statim innumera similia possunt solvi, ut $\int \overline{\frac{c}{a}\int \overline{l^2} + b\, a^2} + \int \overline{l^3} + \int l^3 \sqcap e\, a^3$, quaeritur qualis sit e; fiet $a^3\, e$

(1 2 3 4)

$\sqcap \frac{c\, x^3}{3} + b\, a^2\, x + \frac{x^4}{4} + x\, a^3$. Nimirum $\int l^3 \sqcap x$, quia $l \sqcap a$ suppo-

(1 2 3 4)

nitur calculi causa. $\frac{a \int l}{a} \sqcap x$. $\int \overline{c \int \overline{l^2}} \sqcap \frac{c\, x^3}{3}$, id est $\sqcap \frac{c\, \overline{\int l}^3}{3\, a^3}$. $\int b\, a^2 \sqcap$ $\int l\, b\, a$. Intelligitur autem a esse unitatem. Satis haec nova et notabilia, cum novum genus calculi inducant. Pono ut ad priora redeamus. Datur l, relatio ad x, quaeritur $\int l$. Quod fiet jam contrario calculo, scilicet si sit $\int l \sqcap y\, a$, ponemus $l \sqcap \frac{y\, a}{d}$. Nempe ut $\int$ augebit, ita d minuet dimensiones. $\int$ autem significat summam, d differentiam. Ex dato y semper invenitur $\frac{y\, a}{d}$, sive l, sive differentia ipsarum y. Hinc aequatio una mutari potest in aliam, sublatio ut ex aequatione: $\int \overline{c \int \overline{l^2}} \sqcap \frac{c\, \overline{\int l}^3}{3\, a^3}$ facere possumus $c \int \overline{l^2} \sqcap \frac{c \int l^3}{3\, a^3\, d}$. Nota $\int \frac{x^3}{b} + \int \frac{x^2\, a}{e} \sqcap$ $\int \overline{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2\, a}{e}}$. Eodem modo $\frac{x^3}{d\, b} + \frac{x^2\, a}{d\, c} \sqcap \frac{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2\, a}{e}}{d}$. Sed ut ad superiora redeamus. Investigare possumus $\int l$ bis, primum sumendo y et quaerendo $y\, \frac{a}{d} \sqcap l$ datae. Deinde aliter sumendo $\frac{z^2}{2a} \sqcap y$ sive sumendo $\sqrt{2\, a\, y} \sqcap z$ et inde $\frac{z^2}{t} \sqcap p \sqcap l \sqcap \frac{ya}{d}$. Quare si in aequatione indefinita, in qua y et x, tollamus y, substituendo in ejus locum $\frac{z^2}{2\, a}$, et investigemus ipsam t hujus novae aequationis indefinitae ut ante prioris; denique ope valoris $\frac{z^2}{t} \sqcap l$ et novi valoris t ex indefinita z, continente

ipsas z et t, tollamus, restabit sola ex istis (tribus) y, z, t, l litera l et debet rursus aequatio prodire quae eadem esse debet tum cum data, tum cum paulo ante producta. Unde cum habeamus duas aequationes indefinitas earundem non tantum capitalium sed et arbitrariarum, nonnihil tamen dissimiles, quae coincidere debent, facile apparebit an aliqui termini possint tolli; an possibilis sit ista comparatio; aliaqne id genus, et quod caput est, qui termini vere maximi et minimi seu numerus terminorum aequationis. Sed quoniam in Triangula similia TBL, GWL, LBP nondum intravit abscissa x, seu punctum fixum A, nimirum ex puncto quodam fixo A ducatur AIQ indefinita ipsi LB parallela, occurrens tangenti LT in I, et sit AQ $\sqcap$ BL; bisecetur AI in N; ajo summam omnium QN aequari semper Triangulo ABL, ut facile demonstrari potest ex alibi a me dictis, quae rursus novum dant calculi fundamentum. Nimirum $\frac{xv}{2} \sqcap y$, ponendo BL $\sqcap$ v et QN $\sqcap$ l et y $\sqcap \int l$. $\frac{AI}{v} \sqcap \frac{t-x}{t}$ (signa ambigua). Ergo AI $\sqcap \frac{t-x}{t} v$, et QI $\sqcap v - AI \sqcap v - \frac{t}{t} v + \frac{xv}{t}$, QI $\sqcap \frac{xv}{t}$ et QN $\sqcap QI + \frac{AI}{2} \sqcap \frac{xv}{t} + \frac{v}{2} - \frac{xv}{2t} \sqcap \frac{xv + tv}{2t} \sqcap l$. Et ope hujus aequationis $\frac{xv + tv}{2t} \sqcap l$ et hujus y $\sqcap \frac{xv}{2}$, et illa ipsa prima aequatione indefinita seu generali, jam tertium resumta, tollendo primo y, deinde t ope inventi valoris ipsius t ad x in aeq. ex x, v indefinita, ac denique v ope aeq. $\frac{xv + tv}{2x} \sqcap l$ habebitur rursus aequatio, in qua solae capitalium restabunt x et l, ut ante, quae coincidere debet iterum datae. Habemus ergo tres aequationes productas diversis viis inventas, quae inter se et cum data coincidere debent, et hae quidem tres non tantum sunt coincidentes, sed et iisdem constare debent literis et vocabulis, quod an fieri possit analytice profecto, mox apparebit.

De figuris secundariis multa . . . .*) posse inventis primariarum areis et centris gravitatis. Hinc enim et momenta habebuntur ex rectis quibusdam minus principalibus, quae momenta plerumque in figuras secundarias cadere solere arbitror. Operae pretium erit pro eo instituere calculum generalem.

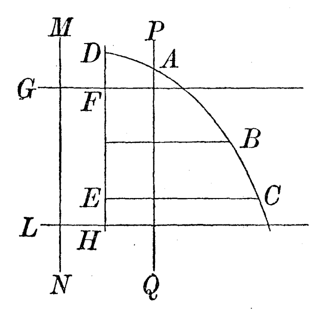
---

*) Einige Worte unleserlich.

Analyseos Tetragonisticae Pars III.

1. November 1675.*)

Diu est quod observavi, dato curvae ABC vel figurae curvilineae DABCE momento ex duabus rectis inter se parallelis ut GF, LH (vel MN, PQ) haberi aream figurae, quoniam duo momenta different inter se cylindro figurae, cujus altitudo distantia parallelarum. Hoc verum est in omnibus progressionibus, sive Numericis sive linearibus. Id est etiamsi non adhibeantur figurae curvilineae, sed polygona ordinata, id est tametsi differentiae inter terminos non sint infinite parvae. Sit quaelibet quantitas ordinata ut z, sit numerus ordinalis x, erit $b\,\overline{\text{omn. } z} \sqcap \pm\, \text{omn}\, \overline{zx} \mp \text{omn.}\, \overline{z \frown x + b}$, idque per se patet ex solo calculo. Ope hujus regulae inveniuntur summae terminorum progressionis Arithmeticae replicatae reciprocae. Et haec multiplicatio locum habet, cum quaeritur momentum ordinatarnm ex recta ad axem perpendiculari. Sed si quaeratur momentum ex alia recta, regula generalis haec est: Ex quantitatum quarum summae momentum quaeritur, singularum centris gravitatis ducatur perpendicularis ad rectam librationis, summa rectangulorum sub distantiis sive perpendicularibus et quantitatibus aequabitur momento ex recta data. Unde si sit recta aequilibrii axi eadem, statim sequitur momentum figurae ex axe aequari summae quadratorum dimidiatorum. Et cum axi parallela est. ab eo differre data quantitate. Sed sumamus aliam rectam in circulo exempli causa fig. 2. Sit quadrans ABCD, vertex B, centrum D. Detur alia recta EF, ita scilicet ut datae sint DF perpendicularis, et FE quo diameter ei occurrit, adeoque et DE. Sit ordinata circuli HB, cujus dimidium punctum L. Ducatur LM perpendicularis ad FE, patet triangula EFD et EMN (N punctum intersectionis ML, AD) et LHN esse similia. Sit AD $\sqcap$ x, erit HL $\sqcap \frac{y}{2} \sqcap$ $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{2}$. Jam ob triangula similia $\frac{NH}{HL}$



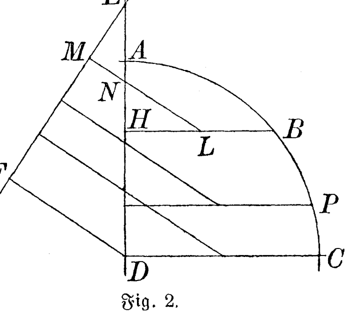


Fig. 2.

*) Leibniz hat bemerkt: prima erat 25. Octobr., 2da 29. Octbr.; ferner: Usus centrobarycae. Am Rande des Manuscripts ist von ihm offenbar später geschrieben: Scheda 2da notanda de differentiali calculo tunc mihi rudius cognito, et satis .... quantum ad scopum.

$\sqcap \frac{DF \sqcap d}{FE \sqcap f}$, ergo NH $\sqcap \frac{d}{2f} \sqrt{a^2 - x^2} \sqcap \frac{yd}{2f}$, ergo EN $\sqcap$ DE ($\sqcap$ e) $-$ HD($\sqcap$ x)$-$NH($\sqcap \frac{d}{2f}$y), ergo EN $\sqcap e - x - \frac{dy}{2f}$. Jam NL $\sqcap \sqrt{NH^2 + HL^2}$ $\sqcap \sqrt{\frac{d^2}{4f^2}y^2 + \frac{y^2}{4}} \sqcap \frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}$; et $\frac{MN}{EN} \sqcap \frac{NH}{NL}$, sive MN $\sqcap \frac{NH, EN}{NL}$

adeoque MN $\sqcap \frac{\frac{yd}{zf}, \frown e - x - \frac{dy}{2f}}{\frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}} \sqcap \frac{d}{f\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}} \overline{e - x - \frac{dy}{2f}}$, et ML $\sqcap$

MN + NL $\sqcap \frac{d}{f\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}} \overline{e - x - \frac{dy}{2f}} + \frac{y}{2}\sqrt{\frac{d^2}{f^2} + 1}$ (e $\sqcap \sqrt{f^2 - d^2}$)

sive ML $\sqcap \frac{d\sqrt{f^2 - d^2} - x - \frac{d}{2f}y + \frac{d^2 + f^2}{2f}y}{\sqrt{d^2 + f^2}} \sqcap \frac{d\,\overline{\sqrt{f^2 - d^2} - x + \frac{f}{2}y}}{\sqrt{d^2 + f^2}}$.

Qui calculus cuilibet curvae communis est, sumta semper x pro abscissa et y pro ordinata. Rectangulum ergo sub ML et HB ($\sqcap$ y) sive momentum cujusque ordinatae ex recta EF ponderatae sive wa erit $\sqcap$ $\frac{d\,\overline{\sqrt{f^2 - d^2}\,y - xy + \frac{f}{2}y^2}}{\sqrt{d^2 + f^2}}$. Ergo omn. w habebuntur ex datis omn. y, omn. xy, et omn. y^2, vel etiam si ex his quatuor dentur tres. dabitur quartum. Jam omn. xy aequantur momento figurae ex vertice, omn. y^2 aequantur momento figurae ex axe. Ergo datis tribus figurae momentis, ex duabus scilicet rectis inter se perpendicularibus, et tertia qualibet, datur ejus area. Sed hoc tamen theorema minus generale est, quam prius in prima hujus Schediasmatis pagina, ubi nihil refert, quis sit angulus rectarum, modo dentur tria momenta. Intelligitur autem semper in eodem plano. (Hoc interim theorema sufficit ad curvam Hyperbolae primariae. Si*) f sit infinita seu si FE et ED parallelae, fiet $dy + \frac{y^2}{2} \sqcap$ w a, quod dudum constat). Notandum, diversis calculis hac schediasmatis plagula et prima aream quantitatis cujus centrum gravitatis (+ etsi NB. non ipsa tota) in plano dato positum est, ex datis tribus momentis ex tribus ejusdem plani rectis inveniri. Unde videndum, annon comparati inter se eventus quiddam

*) Am Rande hat Leibniz bemerkt: NB. ista ad curvam si applicentur.

novum praebeant. Si non figurae, sed curvae ut omnium BP, PC etc. momenta quaerantur, ex punctis B, P, C tantum ad rectam demittendae perpendiculares sive ordinatae, nihil enim refert, ex extremo an medio ipsius BP v. g. ducantur, differentiae enim infinite parvae inter duas ejusmodi perpendiculares. Ergo curvae elementum appellando z, momentum curvae ex recta EF fiet $\frac{d\sqrt{f^2-d^2}\,z - dxz + fyz}{\sqrt{d^2+f^2}}$.

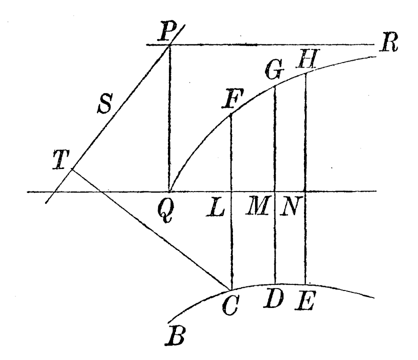
Pleraque theoremata Geometriae indivisibilium quae apud Cavalerium, Vincentium, Wallisium, Gregorium, Barrovium extant, statim ex calculo patent, ut v. g. perpendiculares ad axem aequari superficiei seu momento curvae ex axe, patet calculo, nam invenies perpendicularem aequari rectangulo ex curvae elemento in ordinatam. Talia igitur theoremeta non aestimo, quemadmodum illa quoque de applicationibus interceptarum in axe (inter tangentes et ordinatas) ad basin. Talia ergo theoremata nihil novi detegunt, nec nisi calculi compendia praebent. At meum theorema de dimensione segmentorum rem detegit novam, quia spatium cujus quaeritur dimensio aliter resolvit, nempe non tantum in ordinates, sed in triangula. Centrobaryca etiam forte aliquid detegunt novum; poterit forte facilis methodus tradi, qua sine figuris calculo deducantur ex figura quae ex ea pendent. Gregorii theorema de ductibus parabolarum subalternis aequalibus cylindro patet statim ex calculo, nam circuli ordinata $y \sqcap \sqrt{a^2 - x^2}$, id est $\sqcap \sqrt{a+x}$ in $\sqrt{a-x}$; eodem modo $\sqrt{2av - v^2} \sqcap y$, ergo $y \sqcap \sqrt{v}\frown$in $\sqrt{2a-v}$ quae duo eodem redeunt. Si eadem ordinata y per quandam quantitatem z multiplicetur, et postea per eandem z $\pm$ cognita sive constante b*), erit differentia summarum productorum aequalis cylindro figurae, ut $zy_{,,} - zy + by \sqcap by$. Hoc etsi per se manifeste pateat in genere, applicationes tamen non semper manifestae. Sit v. g. $\frac{x^2}{ax - b^2}$ id est

$\frac{x,\ x}{\sqrt{ax}+b,\ \sqrt{ax}-b} \sqcap y$; multiplicando per $\sqrt{ax}+b$ fiet $\overset{(\odot)}{\frac{x^2}{\sqrt{ax}-b}}$ et multiplicando per $\sqrt{ax}-b$, fiet $\frac{x^2}{\sqrt{ax}+b}$ (☽). Quoniam autem pro $\frac{ax^2}{ax-b^2}$ fieri potest $x + \frac{b^2x}{ax-b^2}$, quae pendet ex quadratura hyperbolae, itaque una ex his duabus data, ☽ et $\odot$, dabitur et altera, supposita hyperbolae quadratura. $\frac{ax^2}{\sqrt{ax}+b} \sqcap x\sqrt{ax} - \frac{bx\sqrt{ax}}{\sqrt{ax}+b}$.

---

*) Leibniz hat am Rande bemerkt: Idem est si sit z — b et z + b.

Suppone curvae cuidam in aliquo plano positae BCDE in punctis C, D, E imponi alterius curvae FGH ordinatas perpendiculares*) ad planum, et ita ut medium ordinatae punctum incidat in planum, patet ipsas LC, MD, NE ductas in FL, GM, HN, id est in C, D, E impositas curvae BCDE seu rectangula FLC, GMD, HNE sive ductum duorum planorum in se invicem aequari momento omnium LC, MD, NE etc. Unde si PR sit alius axis et intervallum a QL recta PQ, momentum ex PR differet a momento ex QL cylindro ipsarum LC, MD etc. in PQ. Quod si jam tum ex recta PQ, tum alias ex alia recta ut TS aliud haberetur momentum ejusdem figurae ordinatarum LF in C impositarum, tunc haberetur etiam cylinder omnium LF, quod probo: quia appellando QL, x, CL, y, erit TC $\sqcap \frac{f}{a} x + \frac{g}{a} y + h$, quae ducta in ipsam z**) dabit $\frac{f}{a} zx + \frac{g}{a} yz + hz$. Jam zx datur, supposito momento ex PQ, quod semper idem sive sint ipsae z, ubi erant in LF, MG etc. sive sint positae in C, D, E. Datur et yz sive rectangulum pro FLC, sive ductus ex hypothesi. Ergo si detur adhuc unum momentum ordinatarum curvae in C, D, E impositarum, sit ipsum aequale $\frac{f}{a} zx + \frac{g}{a} yz + hz$, dabitur hz, seu cylinder quaesitus. Hinc eligendae curvae BCDE tales, ut per diversas earum ordinatas vel in axem QL vel in axem TS multiplicari possint ordinatae curvae datae cum utilitate quadam seu simplicitate. Ad quod eae curvae utiles, quae plures habent axes utiles, ut Hyperbola circularis seu primaria quae duas habet asymptotos, et axem, et axem conjugatum.



*) Leibniz hat darüber geschrieben: imo et aliter.

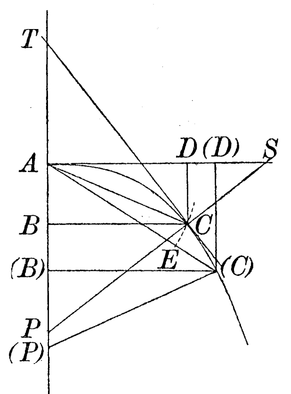
**) Leibniz hat am Rande des Manuscripts bemerkt: LF vel MG $\sqcap$ z.

B.

Methodi tangentium inversae exempla.

11. Novembr. 1673.*)

Jam superiore anno mihi proposueram quaestionem, quae inter difficillimas totius Geometriae haberi potest, vel ideo quod nihil conferunt methodi hactenus vulgatae. Ejus hodie solutionem reperi cujus analysin dabo: Nimirum quaeritur curva C(C) in qua ipsae BP, intervalla ordinatarum BC et perpendicularium ad curvam PC, in axe AB(B) sumta, sint ipsis ordinatis BC reciproce proportionalia. Sit alia recta AD(D) ad ipsam AB(B) axem normalis, in quam ducantur ordinatae CD, ita ut ipsae AD abscissae ex axe AD(D) sint ipsis BC ordinatae ad axem AD(D) aequales ipsis AB abscissis ex AB(B). Appellemus AD = BC = y, et AB = DC = x; ipsam BP vocemus w et ipsam B(B) vocemus z. Constat ex alibi a me demonstratis, esse $\int \overline{wz} = \frac{y^2}{2}$, sive esse $wz = \frac{y^2}{2d}$.**) At ex quadratura Trianguli patet esse $\frac{y^2}{2d} = y$. Ergo $wz = y$. Jam ex hypothesi



est $w = \frac{b}{y}$, ita enim erunt ipsae w ipsis y reciproce proportionales. Ergo fiet $\frac{bz}{y} = y$, adeoque $z = \frac{y^2}{b}$. Jam $\int z = x$. Ergo $x = \int \frac{y^2}{b}$. At $\int \frac{y^2}{b} = \frac{y^3}{3ba}$ ex quadratura Parabolae; ergo $x = \frac{y^3}{3ba}$, quae est aequatio explicans relationem inter ordinatas y et abscissas x curvae quaesitae C(C). Inventam ergo habemus curvam quae est Analytica, et uno verbo Parabola Cubica, cujus vertex A.

Videbimus ergo, an verum sit hoc Theorema sane memorabile: „In Parabola Cubica C(C) sunt BP intervalla perpendicularium ad „curvam PC et ordinatarum BC ad axem, in axe ABP sumta ipsis „ordinatis BC reciproce proportionalia“. Hoc calculus tangentium facile

*) Muß 1675 heißen. Es ist mit dieser Jahreszahl eine Fälschung versucht worden. Die Spuren davon sind deutlich zu sehen; der obere Zug der 5 ist wegradirt und dafür mit schwärzerer Tinte der obere Zug von 3 gesetzt.

**) Leibniz hat am Rande des Manuscripts bemerkt: $\int$ summa, d differentia.

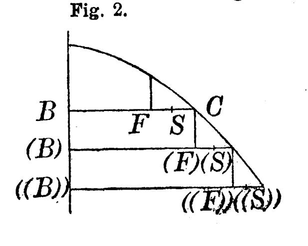
ostendet. Aequatio Parabolae Cubicae: $xc^2 = y^3$; ponendo c latere recto, sive pro c^2 ponendo $3ba$ sive $c = \sqrt{3ba}$, fiet $3xba = y^3$. Ergo ex methodo tangentium Slusii erit $t = \frac{y^3}{ba}$, ponendo $BT = t$, intervallo inter tangentem et ordinatam in axe. Jam $BP = w$ est $= \frac{y^2}{t}$. Ergo $w = \frac{y^2}{\frac{y^3}{ba}} = \frac{ba}{y}$. Sunt ergo ipsae w ipsis y reciproce proportionales, quod desiderabatur.

Analyseos hujus artificium in eo fuit, quod ex ordinata abscissam fecimus, cujus stratagematis antea non venerat in mentem. Non est difficilior quaestio, si quaeratur curva, in qua ipsae BP, intervalla ordinatarum et perpendicularium, sint ipsis AB abscissis reciproce proportionales. Nempe $w = \frac{a^2}{x}$; jam $\int \overline{w} = \frac{y^2}{2}$, ergo $y = \sqrt{2\int \overline{w}}$ vel $\sqrt{2\int \frac{a^2}{x}}$ Jam $\int \overline{w}$ non potest inveniri nisi ope curvae logarithmicae. Ergo et figura quae satisfaciat, est in qua ordinatae sunt in subduplicata ratione logarithmorum ab abscissis; quae figura est ex numero Transcendentium.

At revera difficilior est quaestio, cum quaeritur ut ipsae AP sint ipsis BC ordinatis reciproce proportionales. Nempe $x + w = \frac{a^2}{y}$ et $wz = \frac{y^2}{2d}$, et $\int z = x$ sive $z = \frac{x}{d}$, sive fiet $\overline{w \frac{x}{d}} = \frac{y^2}{2d}$ et $w = \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d}$, et fiet $x + \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d} = \frac{a^2}{y}$. Ponendo ipsas x arithmeticas, erit $\frac{x}{d} = z$ constans et fiet: $x + \frac{y^2}{2d} = \frac{a^2}{y}$ et $\int x = \int \frac{a^2}{y} - \frac{y^2}{2}$ et $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \int \frac{a^2}{y}$ sive $d\,\overline{x^2 + y^2} = \frac{2a^2}{y}$. Jam junctae AC, A(C) sunt $= \sqrt{x^2 + y^2}$. Centro A radio AC describatur arcus CE, ita ut E cadat in rectam AE(C), erunt ipsae E(C) differentiae inter AC et A(C), sive $EC = e = \sqrt{x^2 + y^2}$. Ergo $e = \frac{2a^2}{y}$. Si ergo liceret y sumere Arithmeticae progressionis, haberemus quaesitum; videtur tamen nihil referre, etsi x progressionis arithmeticae sumserimus. Sumtis enim x progressionis Arithmeticae, sequitur ipsis AD sive y esse ipsas EC sive e reciproce proportionales. Quod si autem sunt semel, erunt semper. Summae autem infinitarum reciproce proportionalium habentur, quacunque sint progressione, ex quibus reciproce proportionales sumuntur, neque enim hic rectangulorum ulla ratio habetur, ubi aequali altitudine opus est, sed summa linearum, omnium scilicet E(C), initur. Sed jam video

difficultatem, ipsam omnium e summam sive omnes $\frac{2a^2}{y}$, sive ipsas A(C) non haberi, nisi sciatur cujus progressionis sint ipsae y. Quod hoc loco ignoratur, quoniam ipsas x necesse est esse progressionis Arithmeticae, non ipsas y. Sin jam in aequatione superiore $x + \frac{y^2}{2d} \smile \frac{x}{d} = \frac{a^2}{y}$ faciamus y progressionis Arithmeticae, fiet: $x + \frac{y}{dx} = \frac{a^2}{y}$ *) et $xy + \frac{y^2}{dx} = a^2$; imo generaliter neutri assignando progressionem, fiet $xy + y \frac{d\overline{\frac{y^2}{2}}}{dx} = a^2$ (⨀). Sed nondum quicquam praestitimus; considerandum ergo ex doctrina indivisibilium, producta PCS dum ipsi AD occurrat in S, esse summam omnium AP applicatarum ad AB aequalem summae omnium AS applicatarum ad AD, id est vocando DS = v, fiet $dy\int y + dy\int v = dx\int x + dx\int w$, sive $dy\int y + dy\int v = dx \int \frac{a^2}{y}$ ex hypothesi quaestionis. Ponendo jam y progressionis Arithmeticae fiet: $\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2} = dx\,\overline{\text{Log}\,y}$. At paulo ante eadem facta suppositione ipsarum y progressionis Arithmeticae fuit $xy + \frac{y^2}{dx} = a^2$, fiet: $dx = \frac{y^2}{a^2 - yx}$, et nunc: $dx = \frac{y^2 + x^2}{2\,\overline{\text{Log}\,y}}$; ergo habemus denique aequationem, in qua solae supersunt x et y extra vincula nempe: $\overline{y^2 + x^2},\ a^2 - yx = 2y^2\,\overline{\text{Log}\,y}$, quae aequatio, cum sit determinata, locum dabit quaesitum. Et valde memorabilis est haec methodus, cum enim non sit hic in nostra potestate tot aequationes habere quot incognitas, poterimus tamen saepe plusculas obtinere aequationes, et earum ope quosdam terminos elidere, ut hoc loco $\overline{dx}$, quae sola nobis obstabat. Singulae aequationes totam includebant aequationis naturam, tamen ex iis erui poterat solutio; quod media facilia hactenus desint, conjunctio duarum aequationum rem compendio dedit. Videor idem aliter obtinere potuisse per momenta. Ubi in mentem venit consideratio nova non inelegans. In Fig. 2 est BC = y, FC = $\overline{dy}$. Sit punctum S medium ipsius FC, patet momentum ipsius FC esse rectangulum sub FC et BS, id est rectangulum BFC; nam cum sit BFC + SFC, posterius quippe prioris ratione infinite parvum negligi potest, adeoque erit $\int \overline{y\overline{dy}} = \frac{y^2}{2}$

Fig. 2.



*) Idem est dx et $\frac{x}{d}$, id est differentia inter duas x proximas. Bemerkung Leibnizens.

sive momentum omnium differentiarum FC aequabitur ultimi termini momento, et $y d\overline{y} = d\overline{\frac{y^2}{2}}$ et $y^2\, dy = \frac{y d\overline{y^2}}{2}$. Porro supra in aeq. ($\odot$) faciendo x arithmeticam fuit $y d\overline{\frac{y^2}{2}} = a^2 - xy$ sive $d\overline{\frac{y^2}{2}} = \frac{a^2 - xy}{y}$, at idem $= y\, d\overline{y}$; fiet ergo $y\, d\overline{y} = \frac{a^2 - xy}{y}$, et erit $\int \overline{y\, d\overline{y}} = \int \overline{\frac{a^2}{y}} - \frac{x^2}{2}$. At jam invenimus esse $\int \overline{y\, d\overline{y}} = \frac{y^2}{2}$, fiet ergo $y^2 + x^2 = 2\int \overline{\frac{a^2}{y}}$, ut ante, vel $d\,\overline{y^2 + x^2} = \frac{2a^2}{y}$. Ubi patet res notabilis, in[his aequationibus, in quibus reperiuntur $\int$ et d, ubi jam una, v. g. hic x pro arithmetice procedente sumta est, non posse jam inverti, nec dici nos habere valorem ipsius x, nempe $x = \frac{2a^2}{y} - d\overline{y^2}$, quia $d\overline{y^2}$ non potest intelligi nisi determinata progressionis natura ipsius y; ipsius y autem progressio, ut $d\overline{y^2}$ serviat, talis sumi debet ut sint x progressionis Arithmeticae, ergo ipsae $d\overline{y}$ supponunt ipsas x, non ergo per ipsas invenietur x. Caeterum hac arte multa poterunt praeclara haberi theoremata de curvis alias intractabilibus, jungendo scilicet plures ejusmodi aequationes.

Ut in hujus modi quaestionibus sane difficillimis simus exercitatiores, utile erit unam experiri, ut scilicet ipsae AP sint ipsis AB reciproce proportionales; fiet $x + w = \frac{a^2}{x}$ et $zw = d\overline{y^2}$ et $z = d\overline{x}$, adeoque fiet: $w = \frac{d\overline{\frac{y^2}{2}}}{z} = \frac{d\overline{\frac{y^2}{2}}}{dx}$, et denique $x + \frac{d\overline{\frac{y^2}{2}}}{dx} = \frac{a^2}{x}$. Cujus jam non difficilis solutio est, nam ponendo x arithmeticas, fiet $\int x + \frac{y^2}{2} = \int \frac{a^2}{x}$, sive fiet $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \overline{\mathrm{Log}\, y}$ sive $\sqrt{x^2 + y^2} = AC = \sqrt{2\, \mathrm{Log}\, AD}$, quae expressio curvae satis est simplex. Requiruntur autem ipsae AP progressionis arithmethicae. Contra si sint y progressionis arithmeticae, fieret: $x + \frac{y}{dx} = \frac{a^2}{x}$, sed hinc non facile habebitur natura curvae.

Videamus an possit esse curva, in qua ipsae AC ipsis BP aequales; fiet $\sqrt{x^2 + y^2} = w$ et $w = \frac{dy^2}{2dx}$. Sit x progressionis arithmeticae, fiet: $\left(\int \overline{\sqrt{x^2 + y^2}} =\right) \int AC = y^2$, sed non hoc sufficit ad curvam mechanice

describendam, per puncta scilicet proxime accedentia. Ut sit $x = 1$, sit $BC = (y)$, erit $\sqrt{1 + (y^2)} = (y^2)$ sive $1 + (y^2) = (y^4)$. Unde habetur (y), nempe $y^4 - y^2 + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{4}$ sive $(y^2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ et $(y) = \frac{\sqrt[4]{5}}{\sqrt{2}}$. Porro eodem modo $\underset{AC}{\sqrt{4 + ((y^2))}} + \underset{A(C)}{\sqrt{1 + \frac{\sqrt{5}}{2}}} = ((y^2))$, ita rursus poterit inveniri $((y))$. Et hujus ope reperietur tertia AC, et ita reperietur polygonum aliquod curvilineo quaesito eo similius, quo minor assumta est unitas.

x esse progressionis Arithmeticae significat motum (inter describendum) in axe AB esse uniformem. Descriptiones autem, quae supponunt motum aliquem esse uniformem, non sunt prorsus in nostra potestate. Neque enim possumus producere motum uniformem nisi continue interruptum.

Videndum an $dx dy$ idem sit quod $d\overline{xy}$, et an $\frac{dx}{dy}$ idem quod $d\frac{x}{y}$, et videtur, ut sit $y = z^2 + bz$, et x sit $cz + d$, fiet $dy = z^2 + 2\beta z + \beta^2$, $+ bz + b\beta$, $- z^2 - bz$, et fiet $dy = \overline{2z + b}\beta$. Eodem modo $dx + c\beta$, et ita erit $dy\, dx = \overline{2z + b}\, c\beta^2$. At idem produces, si statim facias dxy. Nam in singulis factoribus separatim destructio fit, altero in alterum non influente; idem est de divisoribus. Sed jam cum earum summae quaeruntur, discrimen an sit, videndum est. $\int dx = x$, $\int dy = y$, $\int d\overline{xy} = xy$*). Si jam sit aequatio v. g. $dx\, dy = x$, erit $\int \overline{dx\, dy} = \int x$. Jam $\int x = \frac{x^2}{2}$, ergo $\int \overline{dx\, dy} = \frac{x^2}{2}$, sive $xy = \frac{x^2}{2}$, sive $\frac{x}{2} = y$, quod satisfacit aequationi $dx\, dy = x$; nam pro y ponendo ejus valorem fiet: $dx \frac{dx}{2} = x$ sive $\frac{dx^2}{2} = x$, quod verum esse constat. In summis haec non procedunt, nam $\int x \int y$ non est idem quod $\int \overline{xy}$; ratio est, quod differentia est quantitas unica, at summa est quantitatum plurium aggregatum. Summa differentiarum est terminus novissimus. At ex summis facientium invenire summas productorum, nondum analytice certa ratione possumus, et quae in eo genere fecit Wallisius, non demonstratione, sed felici inductione nituntur. Demonstrationem tamen eorum invenire, magni res foret momenti. Sint $\int \overline{zy}$, quae quaeruntur. Ponatur $\int \overline{zy} = w$, erit $zy = dw$; et $y = \frac{d\overline{w}}{z}$ et $\int y = \int \frac{d\overline{w}}{z}$. Eodem

*) Error, vide infra. Bemerkung von Leibniz.

modo $\int z = \int \overline{\frac{dw}{y}}$. Ponatur $\int y$ nota $= v$, et $\int z$ nota $= \psi$, fiet $y = dv = \frac{\overline{dw}}{z}$ et $z = d\psi = \frac{dw}{y}$ et $\frac{dv}{d\psi} = \frac{y}{z}$. Unde sequi videtur $d\frac{v}{\psi} = \frac{y}{z}$, adeoque $\frac{v}{\psi} = \int \frac{y}{z}$. Ergo foret $\int \frac{y}{z} = \frac{\int y}{\int z}$, quod est absurdum. Unde sequitur $\int \frac{dv}{d\psi}$ non esse $\frac{v}{\psi}$. Quid ergo erit? Differentia ipsarum v, divisa per differentiam ipsarum ψ, summanda est. Non ergo quaelibet differentiarum, adeoque et tota v, dividenda erit per singulas ipsius ψ; non, inquam, quia singulae tantum per singulas respondentes sibi dividuntur, non quaelibet per omnes. Ergo aliud est $\int \frac{dv}{d\psi}$ quam $\frac{\int dv = v}{\int d\psi = \psi}$. Ergone aliud erit $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$? Si idem est, etiam $\int d\frac{v}{\psi}$ erit $= \int \frac{dv}{d\psi}$, sive $\frac{v}{\psi} = \int \frac{dv}{d\psi} = \frac{\int dv}{\int d\psi}$, quod absurdum est. Eodem modo, an $\overline{dv\psi} = \overline{dv}\,\overline{d\psi}$. Ergo $\int \overline{dv\psi}$ sive $v\psi = \int \overline{dv\, d\psi}$. Jam $v\psi = \int dv \int d\psi$; ergo $\int \overline{dv\, d\psi} = \int dv \int d\psi$, quod est absurdum. Ergo absurdum esse videtur $dv\, d\psi$ id esse quod $dv\psi$, itemque $\frac{dv}{d\psi} = d\frac{v}{\psi}$, quod tamen paulo ante asserueram, et quod videtur demonstrativum. Difficilis nodus. Sed jam distinguendum video: Si sit v et ψ et faciant $v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$ quantitatem aliquam v. g. $\aleph = v\psi$ vel $\frac{v}{\psi}$, sintque valores tam ipsius v quam ipsius ψ rationales per unam quandam v. g. abscissam x expressi, tunc calculus semper docebit eandem produci differentiam, sive idem fore $d\aleph$ et $dv\, d\psi$ vel $\frac{dv}{d\psi}$ Sed jam video ista nunquam procedere, nec per partes in his iri posse, nam v. g. sit $x + \beta$, $\frown x + \beta,, - x, x$, fiet $2\beta x$, quod longe aliud est quam $x + \beta, - x,, \frown x + \beta, - x$, quod daret β^2. Concludendum ergo aliud esse $\overline{dv\psi}$ quam $dv\, d\psi$, aliudque $d\frac{v}{\psi}$ quam $\frac{dv}{d\psi}$. Sit primus gradus $a + bx + cy = 0$; $D\sqcap = \Theta$, $AB = x$, $BC = y$, $TB = t$; ordinando et accommodando ad tangentes fiet: $bt = -cy$, et $t = \frac{-cy}{b}$. Eodem modo $\Theta = \frac{-bx}{c}$. Sit $WC = w$ et $WS = \beta$, patet esse: $\frac{t}{y} = \frac{\beta}{w}$, et fiet: $w = \frac{-\beta b}{c}$. Eodem modo $\beta = \frac{-wc}{b}$.
Secundus gradus:

$a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fyx = 0$; ordinando ad tangentes fiet: $bt + 2dxt + fyt = -cy - 2ey^2 - fyx$, adeoque $t = \frac{-cy - 2ey^2 - fyx}{b + 2dx + fy}$. Unde facile patet, semper t per y (et Θ per x) dividi posse, et quoniam $w = \frac{\beta y}{t}$, ideo fiet hic $w = \frac{\beta\overline{b + 2dx + fy}}{-c - 2ey - fx}$, adeoque fiet

$$y = \frac{-w\overline{c + fx} - \beta\overline{b + 2dx}}{2we + f\beta}, \text{at paulo ante } y = \frac{-a - bx - dx^2}{c + ey + fx}$$

$$\text{et fiet } y = \frac{-\overline{w, \overline{c + fx}, - \beta\overline{b + 2dx}, \frown \overline{c + fx},,, + f\beta + 2we \frown \overline{a + bx + dx}}^2}{-w\overline{c + fx}, -\beta\overline{b + 2dx}, \frown - e}$$

$$= \frac{-w\overline{c + fx}, -\beta\overline{b + 2dx}}{2we + f\beta}.$$

Habemus ergo aequationem, in qua nulla est amplius y. Et omnes figurae, quarum aequatio ex hac aequatione pro varia explicatione literarum constantium formari potest, quadrari possunt; illae item, quae ipsi per methodos alias ostendi possunt σύγνωτοι.

XLI.

Leibniz an Oldenburg.

Nach einer Abschrift von dem Original im Besitz der Royal Society in London (Ms. LXXXI, No. 44.)

Paris. 12 Maji 1676.

Cum Georgius Mohr Danus, in Geometria et Analysi versatissimus, nobis attulerit communicatam sibi a Doctissimo Collinio vestro expressionem relationis inter arcum et sinum per infinitas series sequentes: Posito sinu x, arcu z, radio 1

$$z \sqcap x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 \text{ etc,}$$

$$x \sqcap z - \frac{1}{6}z + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9 \text{ etc.}$$

Haec, inquam, cum nobis attulerit ille, quae mihi valde ingeniosa videntur, posterior imprimis series elegantiam quandam singularem habeat ideo rem gratam mihi feceris, vir Cl^{me}, si demonstrationem transmiseris,

Habebis vicissim mea, ab his longe diversa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc annis ad te perscripsisse credo, demonstratione tamen non addita, quam nunc polio. Oro ut Cl^{mo} Collinio multam a me salutem dicas: is facile Tibi materiam suppeditabit satisfaciendi desiderio meo.

Phaenomenon singulare paucis abhinc diebus Picardo accidit. Is Barometrum aliquot annorum perpetua experientia cognitum, cum de Musaeo in Musaeum transferri jussisset, famulus agitatione scintillas in tenebris emicare vidit; quod ubi Picardo nuntiatum est, idem expertus verum deprehendit. Scintillae erant quales maris agitati, aut saccari dum fricando in tenebris comminuitur. Experimentum repetere potest, quoties lubet. Certum est, in aëre Mercurium utcunque inclusum id non praestare.

Nob^{mus} Tschirnhusius Tibi ac Collinio multam salutem dicit, creditque suas ad Te literas dudum scriptas tibi fuisse redditas. Is nuper circa Anguli sectionem et Polygona circuli multa elegantia theoremata aliud agendo observavit, aliaque ingenio suo digna, ubi otium erit, molietur.

Claudius Hardus, Geometra et scis praestantissimus et jam olim Mersenni et Cartesii temporibus clarus, praeterea orientalium linguarum cognitione excellens, rogavit ut quaererem, verumne sit quod ad ipsum fama pertulit, apud Vos in nova restitutorum Apollonii ex Arabico librorum versione laborari. Scis Florentiae prodiisse cura Ioh. Alph. Borelli. Christianus Ravius eadem pollicebatur ex Mss quae habebat Arabicis: et nescio qui mihi dixit (nam ipse non satis memini) etiam Ravium suam versionem edidisse, quod si verum est, Tibi haud dubie notum est, idque ipsum etiam scire pervelim. Ebertus quidam, homo ut videtur non indoctus neque aspernandus, Robervallio in cathedra Ramea successit.

Frenicli tractatum de Triangulo Arithmetico vobis visum non dubito. Pleraque ejus theoremata (quale illud: omnis quadratus est ternarius aut ternario major unitate) non tantum alia plane via dudum demonstravi, sed et multo longius extendi, ut amicis hic constat. Unum tamen theorema magni facio, quod scilicet area Trianguli Rectanguli in Numeris non possit esse Quadratus, cujus aliam a Frenicliana demonstrationem nondum observavi.

Curate quaeso, ne quae Gregorius circa Diophantum et numeros molitus est, intercidant; mihi enim videtur in hoc argumento nos omnes a vera quadam perfectaque methodo adhuc longe abesse. A Gregorii autem ingenio poterat sperari aliquid non vulgare. Qua ratione aequationum radices per infinitas series possint exhiberi; item quomodo Ta-

bulae sinuum et Logarithmorum ad resolvendas aequationes utcunque affectas serviant, nosse pervelim, neque enim mihi hic satisfacio. P. Pardies pollicebatur omnium aequationum utcunque affectarum resolutionem ope lineae logarithmicae: ego id fieri posse valde dubito. Quod ad series infinitas attinet, equidem radicum irrationalium omnium purarum pariter et affectarum et in genere omnium quantitatum, ad quas accedi potest appropinquando ad distantiam assignata minorem, valores per series infinitas habere possum, sed plerumque nimis prolixe; vestratibus autem, qui multam in ea re operam posuere, elegantia quaedem compendia atque artificia nota esse non dubito.

Illmo Boylio rogo me commendes, virumque egregium perpetuo horteris, ne diutius tot praeclara sua chymica observata publico neget. Solum illum de rebus chymicis praeclare, recte philosophice scripsisse constat, reliqui aut tabulas pro experimentis, aut chimaeras pro hypothesibus dedere.

Nosse velim an adhuc in vivis sit Drebelii gener, Kieflerus; item quousque producta sint praeclara Serenissimi Principis Ruperti Palatini circa ferri tractationem experimenta. Quod superest, vale ac mihi tibi deditissimo fave.

XLII.

Oldenburg an Leibniz.

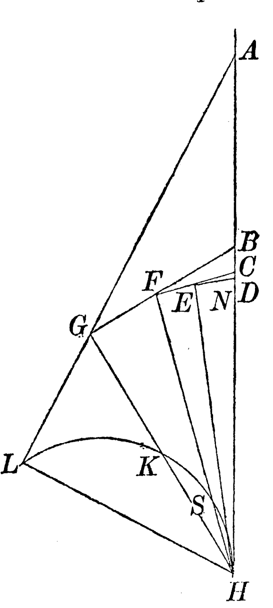
Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Impense laetabar, amice plurimum colende, conspecta de novo docta tua quam diu subduxeras manu, maturiusque responsum parassem, ni id ab amicis, Newtono imprimis et Collinio (qui nec ipsi semper sui juris sunt) parte longe maxima dependisset. Dum prioris meditationes parantur, en tibi varia et accumulata Collinii nostri communicata, menti ad tempus satis forsan distinendae accommoda, donec scilicet alia a Dno. Newtono succenturientur.

Principio igitur ait Collinius: Quod attinet primam illam Seriem, cujus coefficientes sunt $\frac{1}{6}, \frac{3}{40}, \frac{5}{112}, \frac{35}{1152}$, illi hoc modo formantur nempe:

$\frac{1 \times 1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$, et $\frac{1}{6} \frac{\times 3 \times 3}{\times 4 \times 5} = \frac{3}{40}$, et $\frac{3}{40} \frac{\times 5 \times 5}{\times 6 \times 7} = \frac{5}{112}$, et $\frac{5}{112} \frac{\times 7 \times 7}{\times 8 \times 9} = \frac{35}{1152}$, et $\frac{35}{1152} \frac{\times 9 \times 9}{\times 10 \times 11} = \frac{63}{2816}$, et sic in infinitum: unde intelligere est, Seriem illam elegantia sua inferiorem non esse conversa, quam tu potius commendas. Tuas de eodem argumento contemplationes, quas ab istis longe diversas innuis, pergratas nobis fore credideris, optantibus equidem, ut eae fidem nostram superent quoad methodi hujus praestantiam, quae tam late patet ut averruncare omnes difficultates videatur, adeo ut Collinius perceperit, Dn. Gregorium sensisse, quaecunque ante eam fuissent cognita, haud aliter se habere ac auroram meridianae luci comparatam, quamvis Dn. Gregorius alia fuerit egregia methodo instructus pro circulo, priusquam haec ipsi perspecta erat, quam hic impertiri libet. In litteris igitur ipsius 15. Feb. 1669 datis, ita scribit: Approximationes meae ad perimetros p. 8. et 5. Exercitat. Geometricarum, Londini impressarum, nonnihil illustrantur nupera mea ad Dn. Hugenium responsione. Ut ut sit, in tui gratiam eas alia methodo explico, nempe:

Sit arcus quilibet Semicirculo minor HKL, cujus chorda HL, ducatur recta HA tangens arcum in puncto H, sitque angulus ALH rectus; deinde recta HG dividat arcum HKL bifariam in K, sitque angulus HGF rectus, et ita de caeteris in infinitum: arcus HKL erit major quam HL, et minor quam HB, item major quam HF, et minor quam HC, item major quam HE et minor quam HD etc. in infinitum:



erit quoque arcus minor quam $\frac{96\,HG - 22\,HL + HA}{75}$

item minor quam $\frac{16\,HG - 3\,HL + 2\,HB}{15}$.

Et major quam $\frac{320\,HG + 52\,HB - 56\,AL - AB}{315}$.

Et major quam $\frac{64\,HF - 20\,HG + HL}{45}$

Et major quam $\frac{4096\,HE - 1344\,HF + 84\,HG - HL}{2835}$.

Et major quam 1048576 HN − 348160 HE + 22848 HF — 340 HG + HL. Non credimus, meliorem circuli quadraturam linearem, quam haec est, unquam datum iri. Et quod nos induxit ad eam vobis impertiendam, potissimum hoc est, quod Dominus Gregorius similem Methodum ad alias curvas rectificandas applicavit.

Impertiar tibi hac occasione Solutionem Problematis Kepleriani de dividendo Semicirculo in ratione data per rectam pertranseuntem punctum in diametro datum, hoc pacto:

Sit*) semicirculus AHC, cujus centrnm B, dividendus e puncto D in ratione p ad q. Sint BD, BC, BE continue proportionales, sitque BD ad BC, sicut Semiperipheria AHC ad m.

Fiat $\frac{p\,m}{p+q} = a$, $AB = r$, $AE = b$,

et sumatur $AF = \frac{ra^2}{2b^2} + \frac{r^2 a^4}{6b^3} - \frac{ra^4}{24b^4} + \frac{ra^6}{720b^6} - \frac{13 r^2 a^6}{360b^7} + \frac{7 r^3 a^6}{72b^8}$

$+ \frac{19 r^4 a^8}{630\, b^{11}} + \frac{173 r^2 a^8}{107520\, b^9} - \frac{199 r^3 a^8}{13440\, b^{10}} - \frac{113 ra^8}{1290240\, b^8}$ + etc.

Denique ex F erigatur Diametro AC perpendicularis FG, peripheriae occurrens in G, et ducatur recta DG; dico GDA : GHCD :: p : q. Hujus seriei prolixitas provenit duntaxat a puncto D indefinite sumpto; nam posita recta BD determinata, viz. $\frac{1}{3}$ 3**) = D B, Series haec evanescit in simplicissimam, erit namque

$$AF = \frac{a^2}{200r} - \frac{a^4}{300000r^3} - \frac{a^6}{800000000r^5} - \frac{799\ a^8}{1792000000000000r^7}$$

Dn. Gregorius supponit, Seriem hanc in omnibus usibus Astronomicis qualibet Sinuum tabula exactiorem: verum tamen, puncto D cadente prope C, et ratione p ad q existente majoris inaequalitatis, Series quae sequitur, fuerit, ipso Judice, expeditior:

Reliquis manentibus ut supra,

$$m^2 + r - a = e, \text{ et } BE = d,$$

erit $BF = \frac{re}{d} - \frac{r^2 e^2}{2d^3} + \frac{r^3 e^3}{2d^3} - \frac{re^3}{6d^3} + \frac{7 r^2 e^4}{24 d^5} - \frac{5r^4 e^4}{8 d^7} + \frac{7r^5 e^5}{8 d^9} - \frac{r^3 e^5}{2d^7}$

$+ \frac{re^5}{120d^5}$ + etc.

Si contingit e notari cum —, tum et BF eandem notam habebit, inque eo casu F capitur inter B et C. Infinitae hae series eodem gaudent successu in aequationum radicibus, quem sortiuntur in aliis problematibus, nisi quod, cum in aequationibus multae sunt quantitates indeterminatae, earum Series grave pariunt taedium; at vero, quando determinatae illae sunt, series perquam sunt simplices.

Hactenus Gregorius: cui subnectam, pro alia instantia seriem accommodatam inveniendae naturali tangenti ex arcu dato.

Sit radius = r
Arcus = a
tangens = t,

*) Die Figur fehlt im Manuscript. **) Muß wohl heißen: $\frac{1}{3}$r.

$$\text{tunc } t = a + \frac{a^3}{3r^3} + \frac{2a^5}{15r^4} + \frac{17a^7}{315r^6} + \frac{62\,a^9}{2835r^8} \text{ etc.}$$

Et ad inveniendam tangentem logarithmicam non cognita Naturali, pone q pro toto quadrante, et sit $2a - q = e$, et tunc voca t Tangentem artificialem, tunc erit

$$t = e + \frac{e^3}{6r^2} + \frac{5e^5}{24r^4} + \frac{61\,e^7}{5040r^6} + \frac{277e^9}{72576r^8} \text{ etc.}$$

Dn. Gregorius Collinio mediante in hanc methodum incidit, visa non nisi una ex seriebus Domini Newtoni, ejusque de ea haec est sententia, Rem omnem non nisi corollarium esse seriei generalis, accommodatae inveniendo cuilibet ex quotlibet mediis proportionalibus, ut libuerit, inter quosvis duos numeros extremos datos, vel inter alia quaelibet extrema, in eadem ratione licet remota, cum inveniendo ullo ejusmodi termino remoto.

Defuncto Gregorio, congessit Collinius amplum illud commercium litterarium, quod ipsi inter se coluerant, in quo habetur argumenti hujus de seriebus historia: cui Dn. Newtonus pollicitus est se adjecturum suam methodum inventionis illius, prima quaque occasione commoda edendam, de qua interea temporis hoc scire praeter rem non fuerit, quod scilicet Dn. Newtonus cum in litteris suis Dcbr. 10. 1672 communicaret nobis methodum ducendi tangentes ad curvas geometricas ex aequatione exprimente relationem ordinatarum ad Basin, subjicit hoc esse unum particulare, vel corollarium potius, methodi generalis, quae extendit se absque molesto calculo, non modo ad ducendas tangentes accommodatas omnibus curvis sive Geometricis sive Mechanicis, vel quomodocunque spectantes lineas rectas aliasve lineas curvas; sic etiam ad resolvenda alia abstrusiora problematum genera de curvarum flexu, areis, longitudinibus, centris gravitatis etc. Neque (sic pergit) ut Huddenii methodus de maximis et minimis, proindeque Slusii nova Methodus de tangentibus (ut arbitror) restricta est ad aequationes surdarum quantitatum immunes. Hanc methodum se intertexuisse, ait Nowtonus, alteri illi, quae aequationes expedit reducendo eas ad infinitas series, adjicitque, se recordari, aliquando data occasione, se significasse Doctori Barrovio lectiones suas jamjam edituro, instructum se esse tali methodo ducendi tangentes, sed avocamentis quibusdam se praepeditum, quominus eam ipsi describeret.

Quod spectat series infinitas pro aequationum radicibus, ait Collinius, putare se, Dn. Gregorium ei rei insudasse mediante alia methodo, extrahendo eas symbolice; qua de re haec sunt ipsissima verba Gregorii, litteris ipsius 17. Maji 1671 ad Collinium datis inserta: Invenio ejus-

modi serierum continuationem, immane quantum! prolixam. Et in alia ejusdem epistola 17. Jan. 1672 scripta, haec habet: Dari posse unam seriem, accommodatam omnibus aequationibus cubicis, aliam omnibus biquadraticis, aliam omnibus sursolidis; quin imo pro quavis radice dari posse numeros serierum infinitos, et industria quaedam requiritur seriem ingrediendi noscendique ad quam radicem referatur.

Quoad vero aequationum resolutionem ope logarithmorum, vel potestatum omnium intermediatarum amotione, dixit idem Gregorius epistola sua 17. Jan.1672 ad Collinium data, praestare se id posse; sed aequationem sursolidam (quam constat esse 5 dimensionum) priusquam reduci possit ad puram, ascendere oportere ad 20^{am} potestatem. Et litteris suis 26. Maji 1675 exaratis ait, Facile esse ita constituere aequationes, ut vel 2, 3 etc. vel omnes intermedii termini sine difficultate tollantur, at vero tollere duos terminos intermedios in aequatione arbitraria, citra elevationem, penitus esse impossibile, seque ipsum posse, illam elevando, tollere omnes terminos intermedios, quod (quantum ipsi constaret) orbem eruditum hactenus latuerit.

Disquisitionis hujus occasionem suppeditatam fuisse ait a Dno. du Laurens, in praeloquio suo asserente, se praestare id posse. Erat ille Dno. Freniclio familiaris. Scire avemus, num inter Freniclii et du Laurentii Schediasmata aliquid ea de re inveniatur. Rev. Dnum. Pardies quod attinet, nescimus quomodo tale quid de eo expectare licuerit.

Quod attinet radicum exhibitionem omnium aequationum in surdis, haec dicenda habet Collinius.

Laudato Gregorio significatum cum fuisset Dnum. Tschirnhausium in talem methodum incidisse, aliquotque instantias de ea exhibuisse in casibus quibusdam particularibus ad Dn. Gregorium missis, hunc in responsione sua 20. Aug. 1675 dixisse, se nullum videre nexum inter suam ipsius methodum generalem exhibendi omnium aequationum radices surdas, et regulas illas particulares nobilis illius Germani ad se transmissas, quandoquidem in sua (Gregoriana) Methodo frequentius occurrant casus impossibiles.

Atque in epistola sua Sept. 11. 1675 ex occasione regularum illarum quas diximus particulearium ait, In quavis aequatione habente ejusmodi relationem inter radices suas, ut data una reliquae omnes ope ejus possint inveniri, 1. Regulam constitui posse, qua ipsa reducatur ad simplicem aequationem lateralem; 2. vel, si duarum Radicum adminiculo ceterae omnes inveniri queant, earum beneficio reduci eam posse ad aequationem quadraticam, radicibus istis duabus inveniendis accommodam; 3. vel, si trium radicum ope reliquae omnes possint inveniri, reduci eam posse ad aequationem cubicam pro istis tribus radicibus in infinitum; 4. datis aequationibus duabus tribusve, novam aequa-

tionem inveniri posse, cujus radix sit radicum aequationum datarum summa vel earum differentia, vel productum, vel (verbo dicam) quodlibet quod constitui potest ex radicibus vel per radices aequationum priorum.

In litteris suis 20. Aug. 1675 datis porro addit de methodo sua, aequationum surdis radicibus accommodata, probabile scilicet esse, laudati Germani methodum universalem, quando vulgata fuerit, magis esse compendiosam sua, cum (ut verum fateatur) inventio particularium canonum (unus namque canon semper inservit omnibus aequationibus eodem numero dimensionem constantibus) sit admodum laboriosa, quin et excedens quicquid hactenus in praxin abierit: atque (sic pergit) si ipsius methodus non compendifaciat meam, dubito, num integri anni spatium suffecerit ineundo calculo canonum aequationum pro 10 prioribus dimensionibus, attamen meae methodi ratio fere me persuasum tenet non dari aliam compendiosiorem; quin in aequationibus Cubicis et Biquadraticis majus habet compendium ulla mihi unquam visa: verum in immensum augetur labor auctis dimensionibus, et si quis laborem subire vellet calculandi canones, lubens ipsi communicarem methodum meam demonstratione munitam, cum, ut quod res est dicam, in opere tam taedioso me destituat patientia.

Idem in epistola Octobr. 2. 1675 scripta ait, Variando signa quantitatum, radicem unam componentium (pro unaquaque dimensione respectiva) omnes alias radices componi, et Methodum canones hosce inveniendi in eo consistere ut deprimatur semper aequatio a gradu superiore ad gradum inferiorem.

Si de aliis Gregorii Scoti inventionibus scire aves, haec porro habet Collinius:

1. Illum ex Italia reducem factum Londini A. 1668 ostendisse manuscriptum quoddam de Astronomia, Planetarum Theorias ad Methodum Geometricam reducens, quod dicebat aliquando forte in lucem emissum iri: ostendisse eodem tempore aliud scriptum suum Dioptricum; sed Doct. Barrovii lectiones, de eo argumento deinceps editas, in causa fuisse quod illud supprimere statuerit, saltem donec videret, quid Hugenius et Newtonus ea de re commentati essent.

2. In litteris suis 5. Sept. 1670 sic scribit: Perlegi utrumque Barrovii librum, praelectionibus Opticis et Geometricis constantem, idque magna cum voluptate et attentione, deprehendique illum multis parasangis post se reliquisse omnes, qui ante ipsum de istis argumentis fuere commentati. Detexi ex ipsius methodo ducendi tangentes, nonnullis meis meditamentis sociata, generalem methodum Geometricam, absque calculo tangentes ducendi ad quasvis curvas, comprehendentem non modo Dni. Barrovii Methodos particulares, sed et generalem ejus methodum analyticam,

sub lectionis ipsius 10^{mae} finem traditam. Mea Methodus non continet ultra propositiones 12.

Una mittebat exemplum praxeos ejus, ducendo tangentem ad spiralem arcuum rectificatricem, supposita Circuli quadratura: cujus curvae haec est indoles. Describe circulum, et per centrum ejus duc aliquot radios secantes; intellige, arcus interceptos inter radios illos et unum diametri terminum extendi in chordas, et adaptatos intra extremitatem diametri et radios illos secantes; curva transiens per puncta sic inventa vocatur spiralis arcuum rectificatrix.

3. Idem in litteris scriptis 23. Novembr. 1670 haec habet: Prope jam paratam habeo typis edendam aliam editionem meae quadraturae circuli et hyperbolae, in qua (ni fallor) multis et variis modis institutum meum demonstro.

Erat illud probare, utramque figuram incapacem esse exactae ullius quadraturae, sive in lineis, sive in numeris, nec aliquam inter ullas alterutrius portiones assignari posse aequalitatem.

4. Quoad duplicatas aequalitates Diophanti et similia earum augmenta et explicationes testatus est aliquot epistolis, posse ea plurimum excoli et provehi: quod idem et affirmatur a Pellio.

5. Quoad spectat constructiones aequationibus idoneas, cum mentio fieret apud Gregorium, methodum deesse inveniendi, quaenam aequationes solvantur per ordinatas cadentes ab intersectionibus duarum quarumvis Sectionum Conicarum aliarumve curvarum Geometricarum in axes vel lineas ipsis parallelas alterutrius figurae, si figurae illae sint determinatae et ex suppositione in quovis positu ad libitum ductae: Respondit, cum hic ageret Londini A. 1673, se rem illam considerasse, et labore aliquo consectatum esse.

6. Difficile Problema cum ipsi proponeretur, viz. Summa quadratorum et summa Cuborum quatuor continue proportionalium datis, invenire proportionales, ajebat coram eodem anno 1673, se non dubitare quin resolvere id posset, tollendo omnes potestates inferiores in unaquaque aequatione proposita, atque ita tandem reductionum ope perveniendo ad duas potestates puras sublimiorum dimensionum, quarum unius radix daret primam Proportionalem quaesitam, alterius vero rationem, proindeque problema solutum esse.

Sed ex eo tempore in epistola data 28. Julii 1675 scripsit, se de hoc Problemate meditatum esse, et magnum sibi Apollinem fore, qui id solveret per aequationem 30 dimensionibus inferiorem. Adjicit, aequationes equidem illas, ad quas ipse rem deduxerat adeo fuisse taediosas, ut patientia ipsi deficeret, reductionum regulas applicandi; verum tot tamque

diversas aequationes se explorasse, ut si capaces reductionis fuissent, reductionum illarum nonnullas fuisse obvias futuras crederet.

Propositi hujus Problematis ratio erat, quod, cum praesumatur jam cognitum quoad progressionem quamvis Arithmeticam, quod datis duabus quibuslibet summis, viz. vel ipsius progressionis, vel ejus quadratorum, cuborum etc. una cum numero terminorum, progressio possit inveniri, disquisitione dignum foret simile dari respectu Progressionis geometricae. Res spinosa implexaque videtur. Interim Dn. Collinius de Methodo cogitavit quaestionem propositam solvendi, quae probabiliter (necdum enim vacavit ipsi calculos ea de re inire) non ascendet ad dimensiones adeo sublimes ut putatur: eaque hunc in modum se habet.

Pone quantitatem ignotam pro summa proportionalium, et juxta Doctrinam Billii, nactus summam 4 Proportionalium summamque quadratorum ex iis emergentium, extunde 4 proportionales, quod fieri potest, vel omni modo per species, vel (brevitatis causa ad solvendum illud in particulari) partim per species, partim per numeros: easque hoc modo consecutus, cuba omnes, easque simul additas, aequales redde datae summae cuborum. Hac ratione obtinetur aequatio, qua valor ignoti Symboli primo positi inveniri potest, quem postquam consecutus et interpretatus fueris, in proportionalibus speciosis vel mixtis, per Billii Doctrinam inventis, 4 Proportionales quaesitae habentur.

Quod attinet omnium Aequationum per Sinuum tabulas solvendarum rationem, Dn. Pellius id fieri posse saepius asseruit, et nuper me praesente rogatus, possetne aequationes omnes sex vel octo dimensionum Canonis Sinuum beneficio solvere, affirmavit sese sublimiorum adhuc dimensionum aequationes ad dictum canonem reduxisse.

1. Ait laudatus Pellius, Sectionum angularium doctrinam posse in immensum ampliari; id quod verum esse videtur ex specimine ad calcem Algebrae Germanicae, a discipulo ipsius Rhonio*) concinnatae, adjecto, ubi habentur 105 theoremata de Sinubus, Chordis, Tangentibus et Secantibus, quae in editione Anglica non habentur.

2. Praecipuus finis et usus hujus Doctrinae est, non tam confectio tabularum (quippe quae facilius peragi alia ratione potest) quam aequationum resolutio.

3. Circulus et Ellipsis una cum suis inscriptis adscriptisque magis sunt hanc in rem idonea, quam ullae figurae aliae. e. g. in Dni. Gregorii Geometriae parte universali haec occurrit propositio p. 128:

*) Soll wahrscheinlich heißen: Rahnio. J. H. Rahn ist Verfasser von: Deutsche Algebra oder algebraische Rechenkunst zusamt ihrem Gebrauch, bestehend 1. in der Auflösung verworrener mathematischen Aufgaben; 2. in Verhandlung allerhand algebraischer Aequationen; 3. in Erfindung unterschiedlicher nützlicher theorematum. Zürich 1659. 4.

„Si circuli circumferentia dividatur in partes quotcunque aequales „et numero impares, et a quolibet peripheriae puncto ad omnes ejusdem „divisiones rectae ducantur, si circulus dividatur in partes aequales, erit „summa primarum aequalis ultimae; si in quinque, erit summa pri- „marum et ultimae aequalis summae secundarum; si in septem, erit „summa primarum et tertiarum aequalis secundarum et ultimae; si in „novem, erit summa primarum, tertiarum et ultimae aequalis summae se- „cundarum et quartarum, atque ita deinceps in infinitum. Dicimus „autem, rectas primas esse illas, quae ducuntur ad divisiones, ex utraque „parte puncto assignato proximas; secundas illas rectas, quae ducuntur „ad divisiones, primis ex utraque parte succedentes; tertias, quae se- „cundis succedunt etc; rectam vero ultimam illam quae ducitur ad di- „visionem a puncto assignato remotissimam.“

4. Consimile quid Wallisius noster praestitit, quando Peripheria dividitur in quemlibet numerum partium aequalium, deditque aequationes divisionibus tam paribus quam imparibus idoneas, in tractatu de Sectionibus angularibus, qui nunc penes Collinium est, typis mandandus.

5. Hae chordae, repraesentantes aequationum radices, transferri possunt a circulo, tamquam ordinatae, propriis suis resolvendis insistentes, per quarum summitates ducta curva erit flexuosa, uti sunt omnium aequationum loca, prout saepius antehac innuimus, ac evidenter jam cognitum est in cubicis: atque hinc lucem faenerari possumus Methodo transferendi vicissim a loco ad circulum.

6. Affirmat Pellius, constituere se posse problemata, abitura in aequationem ejusdem formae cum quavis proposita: ad haec, posse se in istius modi constitutionibus pertingere ad limites ascendendo: Porro Doctrinam limitum hactenus etiam a praestantissimis ejus scriptoribus perquam imperfecte esse traditam: insuper copmarando et accommodando invicem limites aequationum et problemata Cardani, regulas innumeras alias ipsis consimiles inveniri posse, atque Regulam illam et Doctrinam Huddenii de aequationum omnium tum numeralium tum litteralium inveniendis Radicibus Surdis attingi et obtineri. Limitibus obtentis ad evitandam implexam illam surdorum complicationem, canone illo se uti ait idem Pellius, quod et fieri similiter potest in limitum ipsorum consecutione, quos postquam obtinuerimus, inveniuntur omnes ad quodvis Resolvendum propositum Radices, beneficio facilis methodi applicandi illud uni circulo, vel plura Resolvenda pluribus circulis, quorum quilibet intelligi potest diversas revoutiones habere. Denique affirmat Pellius, conscripsisse se dudum de hac doctrina exercitationes, quarum titulus: Tractatus de habitudinibus repetitis, et usu Canonis mathematici; sed Schediasmata illa ruri, ubi antehac commoratus est, asservari.

Assertiones hae Pellianae parere in Philomathematici mente possent cogitationem, 1. Annon detur possibilitas augendi, minuendi, multiplicandi et dividendi quasdam ex aequationum radicibus, reliquis in eo quo sunt statu servatis; 2. Si duae aequationes habeant eosdem plane limites, sive paria radicum aequalium, excepto tantum uno par, in utrisque communia, quaenam habitudines variationesque dentur inter quot radices in singulis, et inter quot radices ex illis? 3. Probabile videri, quodlibet radicum par in qualibet sublimiori aequatione habere posse diversos ad eas inveniendas canones. Ex. g. Regulae Cardani idoneae sunt inveniendae radici aequationis cubicae, quando nonnisi una radix est possibilis, et post novam aequationis efformationem diminuendo radices limitum alii possunt strui canones ad inveniendas radices, quando tres sunt possibiles.

7. Harum rerum notitia fretus Pellius dudum in Idea sua mathematica typis edita A. 1657 proposuit sive promisit p. 43: Juxta Methodum suam descriptam deducere non solum quicquid invenire est in praedecessorum nostrorum scriptis, et quicquid illis in mentem venisse videri potest, sed etiam omnia inventa, Theoremata, Problemata et praecepta Mathematica quae foecunda successorum nostrorum ingenia excogitare poterunt, idque uno certo et immutato ordine, inde a primis Mathematum principiis usque ad summas nobilissimasque eorum applicationes, aeque ac imas maximeque vulgares, non tradendo eas tumultuarie prout mentem subeunt, uti factitarunt majores nostri, qui in problemata sua eorumque solutiones casu, non vero una constante et invariata methodo scientifica incidisse videntur. Cui subjungit p. 45. quovis argumento proposito determinare numerum omnium Problematum, quae de eo concipi possunt; et quovis problemate proposito, ostendere demonstrative vel omnia media iis solvendis idonea vel solvendi impossibilitatem; et, si posterius, utrum necdum, vel plane non sit solutu possibile; qua de re exercitationem scripsit, Cribrum Eratostenis dictum, quam Dn. Boylius perlustravit.

Has assertiones Dn. Descartes censura sua aliquot litteris perstrinxit, quae si obtineri possent a Dno. Clerselier, si quidem penes ipsum sint, magni beneficii loco poneremus.

8. Ad majorem dictis fidem astruendam, in nonnullorum fide dignorum praesentia, chartam aliquoties deprompsit ex loculis, ulnae longitudine, diversis columnis notatam, in qua e regione 400 resolvendorum Arithmetice crescentium, aequationis sex dimensionum (si rite memini) tradebantur, in diversis columnis, diversae series radicum ad ea pertinentes, quas e tabula sinuum desumptas afferebat, nec tamen aequatio illa Sectionibus angularibus erat accommoda. Adjiciebat ille, ad opus hoc melius

conficiendum necessum esse, ampliorem strui canonem, dividentem quemlibet arcus gradum in 1000 partes. Cui respondebatur, utilitate hujus rei intellecta, forsan non defore viros, qui canonem illum struendum susciperent; cujus tabulae radicum ope ipsa accurate descripserat locum aequationis una cum omnibns flexuris, ostendentem ubinam radices lucrabantur vel omittebant possibilitatem suam per paria; hanc radicum seriem aeque fere facile strui posse ac transscribi, velleque eam suscipere Methodo Vietae, esse laborem, quem humeri humani ferre recusent, nec nisi ut Warnerus dictitabat, ei possibilem, qui Alpibus Italis in Angliam transferendis locare operam suam vellet.

9. Ex sermone cum Pellio habito non patet, ipsum studio doctrinae infinitarum serierum adeo multum incubuisse, et quamvis agnoscat, posse eas esse usui in Theorematibus vel potius habitudinibus per eas inventis, attamen quoad partem calculativam vel applicativam, ait, posse eam vel plane amoveri, vel plurimum facilitari Methodorum suarum beneficio, quas evulgare recusat, nisi prius viderit, quid Gregorii vel Newtoni methodi praestare valeant, quorum posterior lectiones ea de re et de Algebra habuit, quas publicae Bibliothecae Cantabrigensi commisit.

Digna sane haec videntur Mathematicorum Parisiensium meditatione, et spes nos fovet, ipsos communicaturos esse suos hac in re labores et conatus. Vale, et cito si placet rescribe.

Datam Londini d. 26 Julii 1676.

XLIII.

Oldenburg an Leibniz.*)

Nach dem Manuscript in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Quamquam Dni. Leibnitii modestia in excerptis, quae ex Epistola ejus ad me nuper misisti, nostratibus multum tribuat circa speculationem quandam infinitarum serierum, de qua jam coepit esse rumor: nullus dubito tamen, quin ille non tantum quod asserit methodum reducendi quantitates quascunque in ejusmodi series, sed et varia compendia, forte nostris similia, si non et meliora, adinvenerit. Quoniam tamen ea scire

*) Oldenburg hat bemerkt: Apographum literarum a Dno. Newtono scriptarum ad H. Oldenburgium, Cantabrigia d. 13. Junii 1676.

pervelit, quae ab Anglis ea in re inventa sunt, et ipse ante annos aliquot in hanc speculationem inciderim, ut votis ejus aliqua saltem ex parte satisfacerem, nonnulla eorum, quae mihi occurrerunt, ad te transmisi.

Fractiones in infinitas series reducuntur per divisionem, et quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes istas in speciebus istis ac institui solent in decimalibus numeris. Haec sunt fundamenta harum reductionum; sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc theorema:

$$\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ = \text{etc.}^{*}), \text{ubi}$$

$P+PQ$ significat quantitatem, cujus radix vel etiam dimensio quaevis vel radix dimensionis investiganda est, P primum terminum quantitatis ejus, Q reliquos terminos divisos per primum, et $\frac{m}{n}$ numeralem indicem dimensionis ipsius $P+PQ$, sive dimensio illa integra sit, sive (ut ita loquar) fracta, sive affirmativa sive negativa. Nam sicut

**) Leibniz hat über die einzelnen Glieder dieses Ausdrucks die Buchstaben A, B. C, D, E geschrieben und am Rande des Briefes Folgendes bemerkt: Conferendum cum extractione mea radicis quad. cub.

$$\overset{A}{P^{\frac{m}{n}}} + \overset{B}{\frac{m}{n} Q P^{\frac{m}{n}}} + \overset{C}{\frac{m^2-mn}{1,2n^2} Q^2 P^{\frac{m}{n}}} + \overset{D}{\frac{m^3-3m^2n+1,2mn^2}{1,2,3n^2} Q^3 P^{\frac{m}{n}}} \text{etc.} \sqcap \overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}$$

Numerator in B est m, in C est m, m—n, in D est m, m—n, m—2n et ita porro, arithmeticis continue in se ductis. Nominator fit ex arithmeticis crescentibus, numerator ex decrescentibus. Numerator per m divisus foret formula serviens pro aequatione, cujus radices progressionis Arithmeticae, posito m pro incognita et n, 1n, 2n etc. pro radicibus veris. Hinc facile condetur tabula pro continuanda hac serie in infinitum. $P^{\frac{m}{n}}$ potest esse rationalis vel irrationalis; divisa serie per $P^{\frac{m}{n}}$ reliquum rationale; imo prorsus evanescet $P^{\frac{m}{n}}$ vel ipsa P. Hinc semper fieri potest commode, ut P sit 1, erit $P^{\frac{m}{n}}$ etiam 1.

Si $m \sqcap n$, et tam m quam n integer, series non ibit in infinitum, sed aliquis terminus fiet $\sqcap$ 0 adeoque omnes quoque sequentes. Potest m vel n etiam esse fractus vel irrationalis, quod magni est momenti. Quin et potest esse litera. (Vicissim $\frac{m}{n}$ potest inveniri ex $P+PQ$, logarithmus ex numero; denique et numerus ex logarithmo, Methodis alibi a me traditis). Eadem quantitas infinitis modis hinc haberi potest, faciendo m, n alias atque alias, eadem semper manente $\frac{m}{n}$.

Quaerenda et theoremata pro extractione radicum inaequalium, ut si sint progressionis arithmeticae, exemplum est, dato numero extrahere radicem quam vocant pronicam, ut $\frac{y^2+y}{2} \sqcap b$ invenire y, aut $y^3+by^2+cy \sqcap d$ seu y in $y^2+by+c \sqcap d$. Unde non tantum y, sed et y^2+by+c sunt divisores ipsius d. Si pro n ponatur $\frac{1}{q}$, fiet $\frac{m}{n} \sqcap mq$, et nulla erit litera in fractione; etiam pro Q potest poni $\frac{1}{S}$.

Analystae pro aa, aaa etc. scribere solent a^2, a^3, sic ego pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{c.a^5}$ etc. scribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$, et pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$ scribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et sic pro $\frac{aa}{\sqrt{c.\,a^3+bbx}}$ scribo $aa \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$ et pro $\frac{aab}{\sqrt{c:\ a^3+bbx \times a^3+bbx}}$ scribo $aab \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$, in quo ultimo casu, si $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur esse $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regula, erit $P=a^3, Q=\frac{bbx}{a^3}$, $m=-2$ et $n=3$. Denique pro terminis inter operandum inventis in quoto, usurpo A, B, C, D etc. nempe A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$, B pro secundo $\frac{m}{n}AQ$, et sic deinceps. Ceterum usus Regulae patebit exemplis.

Exempl. 1. Est $\sqrt{cc+xx}$ $\left(\text{seu } \overline{cc+xx}|^{\frac{1}{2}}\right) = c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} +$ etc. nam in hoc casu est $P=cc, Q=\frac{xx}{cc}$, $m=1$, $n=2$, $A\left(=P^{\frac{m}{n}} = \overline{cc}|^{\frac{1}{2}}\right) = c$, $B\left(=\frac{m}{n}AQ\right) = \frac{xx}{2c}$, $C\left(=\frac{m-n}{2n}BQ\right) = \frac{-x^4}{8c^3}$ et sic deinceps.

Exempl. 2. Est $\sqrt{5:c^5+c^4x-x^5}$ $\left(\text{i. e. } \overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}\right) = c + \frac{c^4x-x^5}{5e^4} - \frac{2c^8xx+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9} +$ etc. ut patebit substituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P*), et $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q et tunc evadet $\sqrt{5:c^5+c^4x-x^5} = -x + \frac{c^4x+c^5}{5x^4} + \frac{2c^8xx+4c^9x+2c^{10}}{25x^9} +$ etc. Prior modus eligendus est, si x valde parvum sit; posterior, si valde magnum.

---

*) So heißt diese Stelle in der Abschrift, die Leibniz zugeschickt wurde. Offenbar ist hier etwas ausgefallen; in den Opusc. Newt. ed. Castillon Tom. I. pag. 109 folgt nach den Worten „pro P": et $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Potest etiam $-x^5$ substitui pro P, et $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q, et tunc etc. Ebenso lautet diese Stelle im Commercium Epistolicum J. Collins et aliorum de Analysi promota.

Exempl. 3. Est $\frac{N}{\sqrt{c:y^3 - aay}}$ $\left(\text{hoc est } N \times \overline{y^3 - aay}|^{-\frac{1}{3}}\right) =$ $= N \times \overline{\frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{2a^4}{9y^5} + \frac{14a^6}{81y^7} + \text{etc.}}$ Nam $P = y^3, Q = -\frac{aa}{yy}, m = -1, n = 3,$ $A\left(= P^{\frac{m}{n}} = y^3 x -_{\frac{1}{3}}\right) = y^{--1}$, hoc est $\frac{1}{y}$, $B\left(= \frac{m}{n} AQ = -\frac{1}{3} \times \frac{1}{y} \times \frac{-aa}{yy}\right)$ $= \frac{aa}{3y^3}$ etc.

Exempl. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipsius $d + e$ $\left(\text{hoc est } \overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}\right)$ est $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4c^3}{81d^{\frac{5}{3}}} +$ etc. Nam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}$, $m = 4$, $n = 3$, $A\left(= P^{\frac{m}{n}}\right) = d^{\frac{4}{3}}$ etc.

Eodem modo simplices etiam potestates eliciuntur. Ut si quadrato-cubus ipsius $d + e$ $\left(\text{hoc est } \overline{d+e}|^{5} \text{ seu } \overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}\right)$ desideretur, erit juxta Regulam $P = d, Q = \frac{e}{d}$, $m = 5$ et $n = 1$, adeoque $A\left(= P^{\frac{m}{n}}\right) = d^5, B\left(= \frac{m}{n} AQ\right)$ $= 5d^4 e$, et sic $C = 10\, d^3 ee$, $D = 10\, dde^3$, $E = 5de^4$, $F = e^5$, et $G\left(= \frac{m - 5n}{6n}\ FQ\right) = 0$. Hoc est $\overline{d+e}|^{5} = d^5 + 5d^4 e + 10d^3 ee + 10dd\, e^3$ $+ 5de^4 + e^5$.

Quin etiam Divisio, sive simplex sit, sive repetita, per eandem Regulam perficitur. Ut si $\frac{1}{d+e}$ $\left(\text{hoc est } \overline{d+e}|^{-1} \text{ sive } \overline{d+e}|^{-\frac{1}{1}}\right)$ in seriem simplicium terminorum resolvendum sit, erit juxta regulam $P = d$, $Q = \frac{e}{d}, m = -1, n = 1$ et $A\left(= P^{\frac{m}{n}} = d^{-\frac{1}{1}}\right) = d^{-1}$ seu $\frac{1}{d}$, $B\left(= \frac{m}{n} A\, Q\right)$ $= -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d} = \frac{-e}{dd}$, et sic $C = \frac{ee}{d^3}, D = \frac{-e^3}{d^4}$ etc. Hoc est $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d}$ $- \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} +$ etc.

Sic et $\overline{d+e}|^{-3}$ (hoc est unitas ter divisa par $d + e$ vel semel per cubum ejus) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6\,ee}{d^5} - \frac{10\,e^3}{d^6} +$ etc.

Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{1}{3}}$ hoc est N divisum per radicem cubicam ipsius $d+e$ evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14\,e^3}{81\,d^{\frac{10}{3}}}$ etc.*)

Et $N \times \overline{d+e}|^{-\frac{3}{5}}$ (hoc est N divisum per radicem quadrato-cubicam ex cubo ipsius $d+e$ sive $\frac{N}{\sqrt{5: d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}$) evadit $N \times \frac{1}{d^{\frac{8}{5}}}$ $- \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52\,e^3}{125d^{\frac{18}{5}}}$ etc.

Per eandem Regulam Geneses potestatum, Divisiones per Potestates aut per Quantitates Radicales, et Extractiones Radicum altiorum in Numeris etiam commode instituuntur.

Extrationes Radicum Aequationum affectarum in Speciebus imitantur earum Extractiones iu numeris. Sed methodus Vietae et Oughtredi nostri huic negotio minus idonea est. Quapropter aliam excogitare adactus sum, cujus specimen exhibent sequentia Diagrammata, ubi dextra columna prodit substituendo in media columna valores ipsorum p, q, r etc. in sinistra columna expressos. Prius Diagramma exhibet resolutionem hujus numeralis aequationis $y^3 - 2y - 5 = 0$ et hic in supremis numeris pars negativa Radicis. subducta de parte affirmativa, relinquit absolutam Radicem 2,09455148, et posterius Diagramma exhibet resolutionem hujus literariae aequationis $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$.

$y^3 - 2y - 5 = 0$		$+ 2,10000000$
		$- 0,00544852$
		$2,09455148 = y$
$2 + p = y$	y^3	$+ 8 + 12p + 6pp + p^3$
	$- 2y$	$- 4 - 2p$
	$- 5$	$- 5$
	Summa	$- 1 + 10p + 6pp + p^3$
$+ 0,1 + q = p$	$+ p^3$	$+ 0,001 + 0,03q + 0,3qq + q^3$
	$+ 6pp$	$+ 0,06 \quad + 1,2 \quad + 6$
	$+ 10p$	$+ 1 \quad + 10$
	$- 1$	$- 1$
	Summa	$0,061 + 11,23q + 6,3qq + q^3$

*) Leibniz hat hier bemerkt: Hoc pulchrum, et hinc etiam elegantissimum compendium pro mea circuli dimensione ope transformationis facta. Et pro aliis transformationibus.

$-0{,}0054 + r = q$	$+q^3$	$-0{,}0000001 + 0{,}000r$ etc.
	$+6{,}3qq$	$+0{,}0001837 - 0{,}68$
	$+11{,}23q$	$-0{,}060642 + 11{,}23$
	$+0{,}061$	$+0{,}061$
	Summa	$+0{,}0005416 + 11{,}162r$
$-0{,}00004854 + s = r$		
$y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$		$\Big(a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131x^3}{512\,aa} + \frac{509x^4}{16384a^3}$ etc.
$+a + p = y$	y^3	$a^3 + 3aap + 3app + p^3$
	$+axy$	$+aax + axp$
	$+aay$	$+a^3 + aap$
	$-x^3$	$-x^3$
	$-2a^3$	$-2a^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	$+p^3$	$-\frac{1}{64}x^3 + \frac{3}{16}xxq$ etc.
	$+3\,app$	$+\frac{3}{16}axx - \frac{3}{2}axq + 3aqq$
	$+axp$	$-\frac{1}{4}axx + axq$
	$+4\,aap$	$-axx + 4\,aaq$
	$+aax$	$+aax$
	$-x^3$	$-x^3$
$+\frac{xx}{64a} + r = q$	$-3aqq$	$+\frac{3x^4}{4096a}$ etc.
	$+\frac{3}{16}xxq$	$+\frac{3x^4}{1024\,a}$ etc.
	$+\frac{1}{2}axq$	$-\frac{1}{128}x^3 - \frac{1}{2}axr$
	$+4\,aaq$	$+\frac{1}{16}axx + 4\,aar$
	$-\frac{65}{64}x^3$	$-\frac{65}{64}x^3$
	$-\frac{1}{16}axx$	$-\frac{1}{16}axx$
$+4\,aa - \frac{1}{2}ax\Big)$	$+\frac{131}{128}x^3 - \frac{15x^4}{4096a}$	$\Big(+\frac{131x^3}{512aa} + \frac{509x^4}{16384\,a^3}$

In priori Diagrammate primus terminus valoris ipsorum p, q, r in prima columna invenitur dividendo primum terminum summae proxime superioris per coefficientem secundi termini ejusdem summae (ut — 1 per 10,

aut 0,061 per 11,23) et mutando signum quoti. Et idem terminus eodem fere modo invenitur in secundo Diagrammate. Sed hic praecipua difficultas est in inventione primi termini radicis: id quod methodo generali perficitur. Sed hoc brevitatis gratia jam praetereo, ut et alia quaedam, quae ad concinnandam operationem spectant: neque enim hic compendia tradere vacat. Sed dicam tantum in genere, quod radix cujusvis aequationis semel extracta pro regula resolvendi consimiles aequationcs asservari possit, quodque ex pluribus ejusmodi regulis regulam generaliorem plerumque efformare liceat, et quod radices omnes, sive simplices sint sive affectae, modis infinitis extrahi possint, de quorum simplicioribus itaque semper consulendum est.

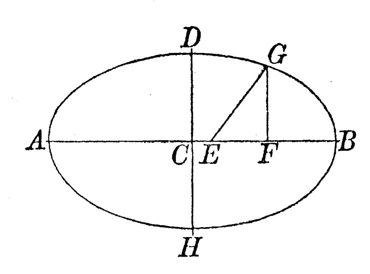
Quomodo ex aequationibus sic ad infinitas series reductis, areae et longitudines curvarum, contenta et superficies solidorum vel quorumlibet segmentorum figurarum quarumvis eorumque centra gravitatis determinantur, et quommodo etiam curvae omnes mechanicae ad ejusmodi aequationes infinitarum serierum reduci possint, indeque problemata circa illas resolvi perinde ac si geometricae essent, nimis longum foret describere. Sufficiat specimina quaedam talium Problematum recensuisse, inque iis brevitatis gratia literas A, B, C, D etc. pro terminis serici, sicut ab initio, nonnunquam usurpabo.

1. Si ex dato sinu recto vel sinu verso arcus desideretur: sit radix r et sinus rectus x eritque arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112\,r^6} +$ etc. hoc est $= x + \frac{1 \times 1 \times xx}{2 \times 3 \times rr} A + \frac{3 \times 3xx}{4 \times 5rr} B + \frac{5 \times 5xx}{6 \times 7rr} C + \frac{7 \times 7xx}{8 \times 9rr} D +$ etc.

Vel sit d diameter ac x sinus versus et erit arcus $= d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ etc. hoc est $= \sqrt{dx}$, in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40dd} + \frac{5x^3}{112ddd}$ + etc.

2. Si vicissim ex dato arcu desideretur sinus, sit radius r et arcus z, eritque sinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8} -$ etc. hoc est $= z - \frac{zz}{2 \times 3rr} A - \frac{zz}{4 \times 5rr} B - \frac{zz}{6 \times 7rr} C -$ etc; et sinus versus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7} +$ etc. hoc est $= \frac{zz}{1 \times 2r} - \frac{zz}{3 \times 4rr} A - \frac{zz}{5 \times 6rr} B - \frac{zz}{7 \times 8rr} C -$ etc.

3. Si arcus capiendus sit in ratione data ad alium arcum: esto diameter d, chorda arcus dati $= x$, et arcus quaesitus ad arcum illum datum ut n ad 1, eritque arcus quaesiti chorda $= nx + \frac{1 - nn}{2 \times 3dd}\, xxA$ $\frac{9 - nn}{4 \times 5dd}\, xxB + \frac{25 - nn}{6 \times 7dd}\, xxC + \frac{36 - nn}{8 \times 9dd}\, xxD + \frac{49 - nn}{10 \times 11dd}\, xxE +$ etc. ubi nota, quod cum n est numerus impar, series desinet esse infinita, et evadet eadem, quae prodit per vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per istum numerum n.



4. Si in axe alterutro AB Ellipseos ADB (cujus centrum C et axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG occurrens Ellipsi in G motu angulari feratur, et ex data area sectoris Elliptici BEG quaeratur recta GF quae a puncto G ad axem AB normaliter demittitur: esto $B = q$, $DC = r$, $EB = t$, ac duplum areae $BEG = z$: et erit $GF = \frac{z}{t} - \frac{9z^3}{6rrt^4} + \frac{10qq - 9q^t}{120r^4t^7}z^5 - \frac{280q^3 + 504qqt - 225qtt}{540r^6t^{10}}z^7$ *) $+$ etc. Sic itaque Astronomicum illud Kepleri problema resolvi potest.

5. In eadem Ellipsi, si statuatur $CD = r$, $\frac{CB}{CD} = c$ et $CF = x$, erit arcus Ellipticus

$$
\begin{array}{llllll}
DG = x + \frac{1}{6cc}x^3 & + \frac{1}{10rc^3}x^5 & + \frac{1}{14rrc^4}x^7 & + \frac{1}{18r^3c^5}x^9 & + \frac{1}{22r^4c^6}x^{11} & + \text{etc.} \\
 & \quad \frac{1}{40c^4} & - \frac{1}{28rc^5} & - \frac{1}{24rrc^6} & - \frac{1}{22r^3c^7} & \\
 & & + \frac{1}{112c^6} & + \frac{1}{48rc^7} & + \frac{3}{88rrc^8} & \\
 & & & - \frac{5}{1152c^8} & - \frac{5}{352rc^9} & \\
 & & & & + \frac{7}{2816c^{10}} &
\end{array}
$$

Hic numerales coefficientes supremorum terminorum $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{14} \text{etc.}\right)$ sunt in musica progressione, et numerales coefficientes omnium inferiorum

*) Nach Horsley (Newton. op. omn. Tom. I. p. 310) muß dieses Glied heißen: $-\frac{280q^3 + 225t^2q - 504q^2t}{5040r^6t^{10}}$

in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuo numeralem coefficientem supremi termini per terminos hujus progressionis $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$, $\frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$, $\frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$, $\frac{\frac{9}{6}n-9}{10}$ etc. ubi n significat numerum dimensionum ipsius c in denominatore istius supremi termini. E. g. ut terminorum infra $\frac{1}{22r^4c^6}$ numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipsius $\frac{1}{22r^4c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n-1}{2}$, hoc est in 1, et prodit $\frac{1}{22}$ (numeralis coefficiens termini proximi inferioris), dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$ sive in $\frac{n-3}{4}$ hoc est in $\frac{3}{4}$, et prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in ista columna. Atque ita $\frac{3}{88} \times \frac{\frac{5}{4}n-6}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ num. coeff. 4ti termini, et $\frac{5}{352} \times \frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum usque columnis praestari potest, adeoque valor ipsius DG per hanc Regulam pro lubitu produci.

Ad haec, si BF dicatur x, sitque r latus rectum Ellipseos et $e = \frac{r}{AB}$, erit arcus Ellipticus

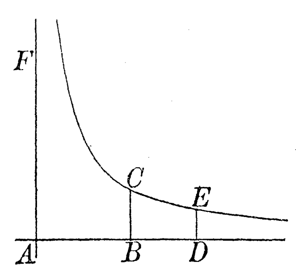
$$BG = \sqrt{rx} : \text{in}\; 1 + \frac{2 - \frac{3}{2}e}{3r}x, + \frac{-2 + 3e - \frac{5}{8}ee}{5rr}xx, + \frac{4 - 9e + \frac{23}{4}ee - \frac{7}{16}e^3}{7r^3}x^3, + \frac{-10 + 30e - \frac{123}{4}ee + \frac{91e^3}{8} - \frac{45}{128}e^4}{9r^4}x^4, + \text{etc.}$$

Quare si ambitus totius Ellipseos desideretur, biseca CB in F, et quaere arcum DG per prius theorema, et arcum GB per posterius.

6. Si vice versa ex dato arcu Elliptico DG quaeratur sinus ejus CF, tum dicto $CD = r$, $\frac{CBq}{CD} = c$ et arcu illo $DG = z$ erit

$$CF = z - \frac{1}{6cc}z^3 - \frac{1}{10rc^3}z^5 - \frac{1}{14rrc^4}z^7 - \text{etc.}$$
$$+ \frac{13}{120c^4} \quad + \frac{71}{420rc^5}$$
$$- \frac{493}{5040c^6}$$

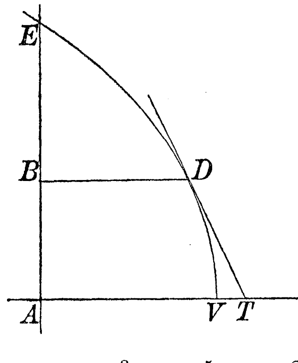
Quae autem de Ellipsi dicta sunt, omnia facile accommodantur ad Hyperbolam, mutatis tantum signis ipsorum c et e, ubi sunt imparium dimensionum.



7. Praeterea, si sit CE Hyperbola, cujus Asymptoti AD, AF rectum angulum FAD constituant, et ad AD erigantur utcunqne perpendicula BC, DE, occurrentia hyperbolae in C et E, et AB dicatur a, BC, b, et area BCED, z, erit

$$BD = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5} \text{ etc.}$$

ubi coefficientes denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus arithmeticae progressionis 1, 2, 3, 4, 5 etc. in se continuo; et hinc ex Logarithmo dato potest numerus ei competens inveniri.



8. Esto VDE Quadratrix, cujus vertex V, existente A centro, et AE semidiametro circuli, ad quem aptatur, et angulo VAE recto, demissoque ad AE perpendiculo quovis DB et acta Quadraticis tangente DT occurrente axi ejus AV in T: dic AV = a, et AB = x, eritque

$$BD = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} - \text{etc. et}$$

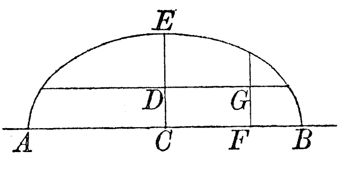
$$VT = \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} + \text{etc. et area AVDB}$$

$$= ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} - \text{etc.} \quad \text{Et arcus VD} = x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4}$$

$$+ \frac{604x^7}{893025a^6} + \text{etc.}$$ Unde vicissim ex dato BD, vel VT, aut area AVDB arcuve VD per resolutionem affectarum aequationum erui potest x seu AB.

9. Esto denique AEB Sphaeroides revolutione Elipseos AEB circa axem AB genita, et secta planis quatuor, AB per axem transeunte, DG

parallelo AB, CDE perpendiculariter bisecante axem et FG parallelo CE: sitque recta CB = a, CE = c, CF = x et FG = y; et Sphaeroideos segmentum CDFG dictis quatuor planis comprehensum erit:



$$+ 2cxy \quad - \frac{x}{3c}y^3 \quad - \frac{x}{20c^3}y^5 \quad - \frac{x}{56c^5}y^7 \quad - \frac{5x}{576c^7}y^9 \quad - \text{etc.}$$

$$- \frac{cx^3}{3aa} \quad - \frac{x^3}{18caa} \quad - \frac{x^3}{40c^3aa} \quad - \frac{5x^3}{336c^5aa} \quad - \text{etc.}$$

$$- \frac{cx^5}{20a^4} \quad - \frac{x^5}{40ca^4} \quad - \frac{3x^5}{160c^3a^4} \quad - \text{etc.}$$

$$- \frac{cx^7}{56a^6} \quad - \frac{5x^7}{336ca^6} \quad - \text{etc.}$$

$$- \frac{5cx^9}{576a^8} \quad - \text{etc.}$$

$$- \text{etc.}$$

Ubi numerales coefffcientes supremorum terminorum $(2, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{20}, -\frac{1}{56}, -\frac{5}{576}$ etc. in infinitum) producuntur multiplicando primum coefficientem 2 continuo per terminos hujus progressionis $-\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{1 \times 3}{4 \times 5}, \frac{3 \times 5}{6 \times 7}, \frac{5 \times 7}{8 \times 9}, \frac{7 \times 9}{10 \times 11}$ etc. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna descendentium in infinitum producuntur multiplicando continuo coefficientem supremi termini in prima columna per eandem progressionem, in secunda autem per terminos hujus $\frac{1 \times 1}{2 \times 3}, \frac{3 \times 3}{4 \times 5}, \frac{5 \times 5}{6 \times 7}, \frac{7 \times 7}{8 \times 9}$ etc., in tertia per terminos hujus $\frac{3 \times 1}{2 \times 3}, \frac{5 \times 3}{4 \times 5}, \frac{7 \times 5}{6 \times 7}, \frac{9 \times 7}{8 \times 9}$ etc., in quarta per terminos hujus $\frac{5 \times 1}{2 \times 3}, \frac{7 \times 3}{4 \times 5}, \frac{9 \times 5}{6 \times 7}$ etc., in quinta per terminos hujus $\frac{7 \times 1}{2 \times 3}, \frac{9 \times 3}{4 \times 5}, \frac{11 \times 5}{6 \times 7}$ etc., et sic in infinitum.

Et eodem modo segmenta aliorum solidorum designari, et valores eorum aliquando commode per series quasdam numerales in infinitum produci possunt.

Ex his videre est, quantum fines Analyseos per hujusmodi infinitas aequationes ampliantur: quippe quae, earum beneficio, ad omnia paene dixerim Problemata (si Numeralia Diophanti et similia excipias) sese extendit.

Non tamen omnino universalis evadit, nisi per ulteriores quasdam methodos eliciendi series infinitas. Sunt enim quaedam Problemata, in quibus non liceat ad series infinitas per divisionem vel extractionem radicum simplicium affectarumve pervenire. Sed quomodo in istis casibus procedendum sit, jam non vacat dicere, ut neque alia quaedam tradere, quae circa reductionem infinitarum serierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parcius scribo, quod hae speculationes diu mihi fastidio esse coeperunt, adeo ut ab iisdem jam per quinque fere annos abstinuerim.

Unum tamen addam: quod postquam Problema aliquod ad infinitam aequationem deducitur, possint inde variae approximationes in usum Mechanicae nullo fere negotio formari, quae per alias methodos quaesitae, multo labore temporisque dispendio constare solent. Cujus rei exemplo esse possunt Tractatus Hugenii aliorumque de Quadratura Circuli. Nam ut ex data arcus chorda A et dimidii arcus chorda B arcum illum proxime assequaris, finge arcum illum esse z, et circuli radium r; juxtaque superiora erit A (nempe duplum sinus dimidii z) $= z - \frac{z^3}{4 \times 6rr} + \frac{z^5}{4 \times 4 \times 120r^4} -$ etc. et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^5}{2 \times 16 \times 16 \times 120r^4} -$ etc. Duc jam B in numerum fictitium n et a producto aufer A, et residui secundum terminum $\left(\text{nempe } -\frac{nz^3}{2 \times 16 \times 6rr} + \frac{z^3}{4 \times 6rr}\right)$ eo ut evanescat, pone $= 0$, indeque emerget $n = 8$, et erit $8B - A = 3z - \frac{3z^5}{64 \times 120r^4} \pm$ etc., hoc est $\frac{8B - A}{3} = z$, errore tantum existente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ etc. in excessu. Quod est Theorema Hugenianum.

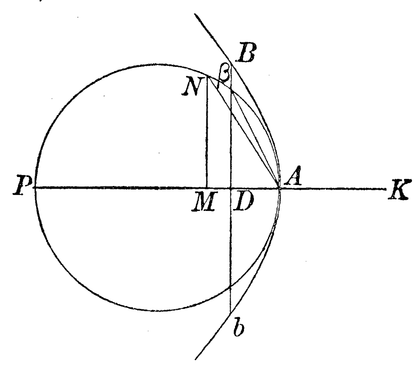
Insuper si in arcus Bb sagitta AD indefinite producta quaeratur punctum G, a quo actae rectae GB, Gb abscindant tangentem Ee, quam proxime aequalem arcui isti: esto circuli centrum C, diameter $Ak = d$ et sagitta $AD = x$ et erit DB $\left(= \sqrt{dx - xx}\right)$ $= d^{\frac{1}{2}} x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{5}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}}$ etc.; et

$AE\ (=AB) = d^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ + etc. Et $AE - DB : AD$ $::AE : AG$, quare $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12xx}{175d}$ — vel + etc. Finge ergo $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$, et vicissim erit $DG\left(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x\right) : DB :: DA : AE - DB$. Quare $AE - DB + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23x^{\frac{7}{2}}}{300d^{\frac{5}{2}}}$ + etc. Adde DB, et prodit $AE = d^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} = \frac{17x^{\frac{7}{2}}}{1200d^{\frac{5}{2}}}$ + etc. Hoc aufer de valore ipsius AE supra habito, et restabit error $\frac{16x^{\frac{7}{2}}}{525d^{\frac{5}{2}}}$ + vel — etc. Quare in AG cape AH quintam partem AD et $KG = HC$, et actae GBE, Gbe abscindent tangentem Ee, quam proxime aequalem arcui BAb, errore tantum existente $\frac{2 \times 16\ x^3}{525d^3} \sqrt{dx}$ + vel — etc., multo minore scilicet quam in Theoremate Hugenii. Quod si fiat $7\ AK : 3\ AH :: DH : n$, et capiatur $KG = CH - n$, erit error adhuc multo minor.

Atque ita si circuli segmentum aliquod BAb per Mechanicam designandum esset: primo reducerem aream istam in infinitam seriem, puta hanc $BbA = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}\ x^{\frac{3}{2}} - \frac{2x^{\frac{5}{2}}}{5d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36d^{\frac{5}{2}}}$ — etc.; dein quarerem constructiones mechanicas, quibus hanc seriem proxime assequerer: cujus modi sunt hae: Age rectam AB, et erit segm. $BbA = \overline{\frac{2}{3}AB + BD} \times \frac{4}{5}AD$ proxime, existente scilicet errore tantum $\frac{x^3}{70dd}\sqrt{dx}$ + etc. in defectu: vel proximius, erit segmentum illud (bisecto AD in F et acta recta BF) $= \frac{4BF + AB}{15} \times 4\ AD$, existente errore solummodo $\frac{x^3}{560dd}\sqrt{dx}$ + etc.: qui semper minor est quam $\frac{1}{1500}$ totius segmenti, etiamsi segmentum llud ad usque semicirculum augeatur.

Sic et in Ellipsi BAb, cujus vertex A, axis alteruter AK et latus rectum AP, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19\ AK - 21\ AP}{10\ AK} \times AD$; in Hyperbola vero

cape $PG = \frac{1}{2} AP + \frac{19 AK + 21 AP}{10 AK} \times AD$, et acta recta GBE abscindet tangentem AE, quam proxime aequalem arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodo arcus ille non sit nimis magnus.



Et pro area segmenti Hyperbolici BbA: in DP cape $DM = \frac{3ADq}{4AK}$, et ad D et M erige perpendicula Dβ, MN occurrentia semicirculo super diametro AP descripto, eritque $\frac{4 AN + A\beta}{15} \times 4 AD = BbA$ proxime; vel proximius erit $\frac{21AN + 4 A\beta}{75} \times 4AD = BbA$, si modo capitur $DM = \frac{5ADq}{7AK}$.*)

Hactenus Dn. Newtonus, quae ipsi mihi non vacabat transcribere. Vereor autem, ne Amanuensis meus saepicule fuerit hallucinatus, cum nonnisi perfunctorie et valde cursim relegere mihi licuerit. Tua sagacitas ipsius errores emendabit. Quando visum tibi fuerit respondere (quod ut ocyus fiat, precor) more solito literas mihi destinatas inscribi velim, nempe etc. Devincies me, si Nobilissimum Dn. Tschirnhause meo et Dn. Collinii nomine officiosissime salutes, ipsique dicas, has duas epistolas vos ambos spectare, et ab utroque vestrum responsionem expetere. Valete, et rem Mathematicam Philosophicamque augere pergite. Dabam Londini d. 26. Julii 1677.

P. S.

Ut Germanum hunc, Vratislaviensem, consiliis tuis juvare velis, impense oro. Nomen ipsius est Samuel Regius; vir videtur ob doctrinam et modestiam amore et omni officiorum genere dignus.

Sinas, Te moneam tui, quo Sc. Regiae obstrictus es, promissi de Machina tua Arithmetica ipsi mittenda. Velim profecto, Te Germanum, et dictae Societatis membrum, fidem datam liberare, et me isthac sollicitudine, quae, concivis nomine, non parum me augit, quantocius levare. Iterum vale, et huic libertati meae ignosce.

*) Soweit ist der Brief von einem Abschreiber geschrieben; das Folgende hat Oldenburg eigenhändig hinzugefügt.

XLIV.

Leibniz an Oldenburg.

Nach dem Manuskript in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

27. Aug. 1676.

Literae tuae, die 26. Julii datae, plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent, quam multa volumina spissa de his rebus edita. Quare Tibi pariter ac Clarissimis Viris, Newtono ac Collinio, gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum esse voluistis.

Inventa Newtoni ejus ingenio digna sunt, quod ex Opticis Experimentis et Tubo Catadioptrico abunde eluxit.

Ejusque methodus inveniendi Radices Aequationum et Areas figurarum per Series infinitas prorsus differt a mea: Ut mirari libeat diversitatem itinerum per quae eodem pertingere licet.

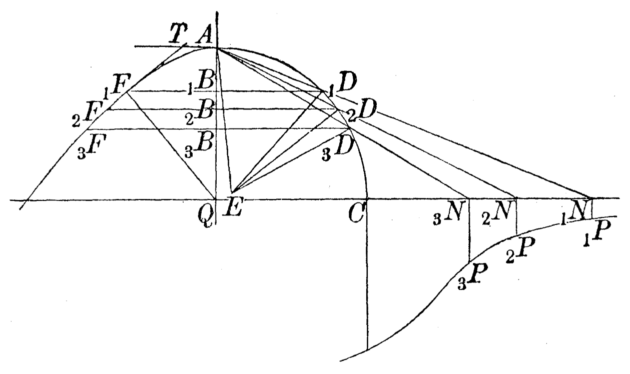
Mercator Figuras Rationales, seu in quibus Ordinatarum valor ex datis Abscissis rationaliter exprimi potest (ut scilicet Indeterminata Quantitas in vinculum non ingrediatur) quadravit, et ad Infinitas Series reducere docuit per Divisiones: Newtonus autem per Radicum Extractiones. Mea methodus Corollarium est tantum doctrinae generalis de Transformationibus, cujus ope Figura proposita quaelibet, quacunque Aequatione explicabilis, transmutatur in aliam analyticam aequipollentem, talem ut in ejus Aequatione ordinatae dimensio non ascendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam simplicem Dignitatem seu Infimum gradum. Ita fiet, ut quaelibet Figura vel per Extractionem radicis Cubicae vel Quadraticae, Newtoni more, vel etiam, methodo Mercatoris, per simplicem Divisionem, ad Series Infinitas reduci queat.

Ego vero ex his Transmutationibus simplicissimam ad rem praesentem delegi. Per quam scilicet unaquaeque Figura transformatur in aliam aequipollentem rationalem, in cujus aequatione Ordinata in nullam prorsus ascendit Potestatem: Ac proinde sola Mercatoris Divisione per Infinitam Seriem exprimi potest.

Ipsa porro generalis Transmutationum methodus mihi inter potissima Analyseos censenda videtur. Neque enim tantum ad Series Infinitas et ad Approximationes, sed et ad solutiones Geometricas aliaque innumera vix alioqui tractabilia inservit. Ejus vero Fundamentum vobis candide libereque scribo, persuasus quae apud vos habentur praeclara mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc est: Ut figura proposita rectis innumeris utcunque, modo secundum aliquam regulam sive legem ductis, resolvatur in partes; quae partes, aut aliae ipsis aequales, alio situ aliave forma reconjunctae, aliam componant figuram priori aequipollentem,

seu ejusdem areae, etsi alia longe figura constantem. Unde ad Quadraturas absolutas, vel hypotheticas Geometricas, vel serie infinita expressas Arithmeticas, jamjam multis modis perveniri potest.



Ut intelligatur, sit AQCDA. Ea, ductis rectis BD parallelis, resolvi potest in Trapezia, $_1B\ _2D$, $_2B\ _3D$, etc. Sed, ductis rectis convergentibus ED, resolvi potest in Triangula E_1D_2D, E_2D_3D etc. Si jam alia sit curva $A\ _1F\ _2F\ _3F$, cujus Trapezia $_1B\ _2F$, $_2B_3F$ sint Triangulis E_1D_2D, $E\ _2D\ _3D$ ordine respondentibus aequalia, tota figura $AE_3D\ _2D\ _1D\ A$ toti figurae $A\ _1F\ _2F\ _3F\ _3B\ A$ erit aequalis.

Quin etiam Trapezia Trapeziis conferendo fieri potest ut $_1N\ _2P$ vel quod eodem redit, Rectangulum $_1N\ _2N\ _2P$ sit aequale Trapezio respondenti $_1B_2D$, sive Rectaugulo $_1B\ _2B\ _2D$, tametsi recta $_1N\ _1P$ non sit aequalis rectae $_1B\ _1D$, modo sit $_1N\ _2N$ ad $_1B\ _2B$ ut $_1B_1D$ ad $_1N\ _1P$, quod infinitis modis fieri potest.

Quae omnia talia sunt ut cuivis statim ordine progredienti, ipsa natura duce, in mentem veniant, contineantque Indivisibilium Methodum generalissime conceptam, nec (quod sciam) hactenus satis universaliter explicatam. Non tantum enim Parallelae et Convergentes, sed et aliae quaecunque certa lege ductae, rectae vel curvae, adhiberi possunt ad resolutionem. Quanta autem et quam abstrusa hinc duci possint, judicabit qui methodi universalitatem animo erit complexus. Certum enim est omnes Quadraturas hactenus notas, absolutas vel hypotheticas, nonnisi exigua ejus specimina esse

Sed nunc quidem suffecerit applicationem ostendere ad id, de quo agitur, Series scilicet Infinitas, et modum Transformandi figuram datam in aliam aequipollentem rationalem, Mercatoris methodo tractandam. AQCA sit Quadrans Circuli, Radius $AQ = r$, Abscissa $A_1B = x$, Ordinata $_1B\ _1D = y$, Aequatio pro Circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta AD, producaturque donec ipsi QC etiam productae occurrat in $_1N$. Et Q_1N vocetur z. Et erit A_1B seu $x = \frac{2r^3}{r^2+z^2}$ et $_1P\ _1D$ sive $y = \frac{2zr^2}{r^2+z^2}$. Eodem modo, ducta $A_2D\ _2N$, si $Q_2N = z - \beta$ (posita scilicet $_1N_2N = \beta$) erit $A_2B = \frac{2r^3}{r^2 + z^2 - 2z\beta + \beta^2}$; et $A_2B - A_1B$ sive recta $_1B\ _2B$ erit

$\frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2} - \frac{2r^3}{r^2+z^2}$. Sive posita β infinite parva (post destructiones et divisiones) erit ${}_1B\,{}_2B = \frac{4r^3z\beta}{\boxed{2}\,\overline{r^2+z^2}}$. Habita ergo recta ${}_1B\,{}_1D$ et recta ${}_1B\,{}_2B$ habebitur valor Rectanguli ${}_1D\,{}_1B\,{}_2B$, multiplicatis eorum valoribus in se invicem; habebitur, inquam, $\frac{8r^5zz\beta}{\boxed{3}\,\overline{r^2+z^2}}$ pro valore Rectanguli ${}_1D\,{}_1B_2B$.

Sit jam Curvae ${}_1P_2P_3P$ etc. natura pro arbitrio assumpta talis, ut Ordinata ejus ${}_1N\,{}_1P$ (ex data abscissa Q_1N sive z) sit $\frac{8r^5z^2}{\boxed{3}\,\overline{r^2+z^2}}$. Ideo, quoniam ${}_1N_2N=\beta$, erit rectangulum ${}_1P\,{}_1N_2N$ etiam $\frac{8r^5z^2\beta}{\boxed{3}\,\overline{r^2+z^2}}$. Ac proinde aequale Rectangulo ${}_1D_1B_2B$, et spatium ${}_1P\,{}_1N_3N_3P_2P_1P$ aequale spatio Circulari respondenti ${}_1D_1B_3B_3D_2D_1D$. Est autem quaelibet Ordinata NP rationalis, ex data abscissa QN, quia posita $QN = z$, ordinata NP est $\frac{8r^5z^2}{\boxed{3}\,\overline{r^2+z^2}}$, sive $\frac{8r^5z^2}{r^6+3r^4z^2+3r^2z^4+z^6}$. Ergo ipsa per infinitam Seriem Integrorum exprimi potest dividendo. Et Spatium talibus Ordinatis comprehensum, aequipollens Circulari, infinita Serie numerorum Rationalium, Methodo Mercatoris quadrari potest. Quod cum facillimum sit, facere hic omitto. Neque enim elegantiae suae, sed Methodi Generalis explicandae causa, hoc exemplum assumpsi.

Ita si quis loco Circuli mihi dedisset Curvam, in qua ordinata ascendisset ad gradum Cubicum, potuissem eam reducere ad Curvam, in qua ordinata non assurrexisset ultra Quadratum, vel etiam ne quidem ad Quadratum.

Itaque semper sive Extractionibus Radicum Newtonianis (gradus cujuslibet dati) vel Divisionibus Mercatoris poterit cujuslibet Figurae spatium inveniri, interventu alterius Aequipollentis. Multum autem ad simplicitatem interest quid eligas.

Omnium vero possibilium Circuli et Sectoris Conici Centrum habentis cujuslibet per Series Infinitas quadraturarum simplicissimam hanc esse dicere ausim, quam nunc subjicio.

Sit QA_1F Sector, duabus rectis in Centro Q concurrentibus, et Curva Conica A_1F ad Verticem A sive Axis extremum perveniente comprehensus. Tangenti Verticis AT occurrat Tangens ${}_1FT$. Ipsam AT vocemus t, et Rectangulum sub Semilatere Recto in Semilatus Transversum sit Unitas. Erit sector Hyperbolae, Circuli, vel Ellipseos, per

Semilatus Transversum divisus, $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$ etc. signo ambigno $\pm$ valente $+$ in Hyperbola, $-$ in Circulo vel Ellipsi. Unde, posito Quadrato Circumscripto 1, erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ etc. Quae expressio, jam Triennio abhinc et ultra a me communicata amicis, haud dubie omnium possibilium simplicissima et maximeque afficiens mentem.

Unde duco Harmoniam sequentem:

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{63}\ \frac{1}{80}\ \frac{1}{99}\ \frac{1}{120} \text{ etc.} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3}\quad \frac{1}{15}\quad \frac{1}{35}\quad \frac{1}{63}\quad \frac{1}{99} \quad \text{etc.} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{8}\quad \frac{1}{24}\quad \frac{1}{48}\quad \frac{1}{80}\quad \frac{1}{120} \text{ etc.} = \frac{1}{4}$$

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{3}\quad \frac{1}{35}\quad \frac{1}{99} \text{ etc.} \\ \frac{1}{8}\quad \frac{1}{48}\quad \frac{1}{120} \text{ etc.} \end{matrix}\right\} \text{exprimit arcum} \left\{\begin{matrix} \text{Circuli ABCD} \\ \text{Hyperbolae aequilaterae CBEFC} \end{matrix}\right\} \text{Cujus Quadratum inscriptum est } \frac{1}{4}$$

Numeri 3, 8, 15, 24 etc. sunt Quadrati Unitate minuti.

Vicissim, ex Seriebus Regressuum pro Hyperbola hanc inveni. Si sit numerus aliquis Unitate minor $1 - m$, ejusque Logarithmus Hyperbolicus l, erit $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc.

Si numerus sit major Unitate, ut $1 + n$, tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodiit Regula, quae in Newtoni Epistola expressa est; scilicet erit $n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc.

Prior tamen celerius appropinquat. Ideoque efficio ut ea possim uti, etiam cum major est Unitate numerus $1 + n$. Nam idem est Logarithmus pro $1 + n$ et pro $\frac{1}{1 + n}$. Unde si $1 + n$ major Unitate, erit $\frac{1}{1 + n}$ minor Unitate. Fiat ergo $1 - m = \frac{1}{1 + n}$, ac inventa m, habebitur et $1 + n$, numerus quaesitus.

Quod regressum ex Arcubus attinet, incideram ego directe in Regulam, quae ex dato Arcu Sinum Complementi exhibet. Nempe Sinus Complementi $= 1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. Sed postea quoque deprehendi ex ea illam nobis communicatam pro inveniendo Sinu Recto qui est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3}$

$+ \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc., posse demonstrari. Quod tribus verbis sic fit. Summa Sinuum Complementi ad Arcum, seu omnium $1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. est $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc. Porro, Summa Sinuum Complementi ad Arcum (seu Arcui in locis debitis insistentium) aequatur Sinui Recto, ducto in Radium, ut notum est Geometris. Id est, aequatur ipsi Sinui Recto, quia Radius hic est Unitas. Ergo Sinus Rectus $= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc. Hinc etiam ex dato Arcu et Radio sine ulla prorsus aliorum notitia, haberi potest Area Segmenti Circularis duplicati: quae est $\frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{a^7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$ etc. Unde optime Segmentorum Tabula ad Gradus et Minuta etc. calculabitur.

Pro Trigonometricis autem operationibus percommoda mihi videtur haec expressio: Ut Sinus Complementi c ponatur $= 1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, quoniam, sola memoria retenta, omnibus casibus et operationibus, directis scilicet simul et reciprocis, sufficit, quod ideo fit, quoniam Aequatio $c = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ est Plana. Unde si vicissim quaeras Arcum, ex Sinu Complementi radix extrahi potest, adeoque fiet Arcus $a = \sqrt{6 - \sqrt{24\,c + 12}}$ exacte satis ad usum eorum qui in itineribus Tabularum commoditate carent, quia error aequationis non est $\frac{a^6}{720}$.

Innumera alia possent dici, quae his fortasse elegantia et exactitudine non cederent. Sed ego ita sum comparatus ut plerumque, Methodis generalibus detectis, rem in potestate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim ista omnia magnopere aestimanda sunt, nisi quod artem Inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quae obscuriora videbuntur, ea libenter elucidabo: Et illud quoque explicabo, quomodo hac methodo Aequationum quoque utcunque affectarum Radices per Infinitam Seriem dari possint, sine ulla Extractione, quod mirum fortasse videbitur.

Sed desideraverim ut Clarissimus Newtonus nonnulla quoque am-

plius explicet: ut, Originem Theorematis quod initio ponit: Item, Modum quo quantitates p, q, r in suis Operationibus invenit: Ac denique, Quomodo in Methodo Regressuum se gerat, ut, cum ex Logarithmo quaerit numerum. Neque enim explicat quomodo id ex Methodo sua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus Literas qua merentur diligentia legere, quoniam tibi e vestigio respondere volui. Unde non satis nunc quidem affirmare ausim, an nonnulla eorum quae suppressit, ex sola earum lectione consequi possum. Sed optandum tamen foret, ipsum ea potius supplere Newtonum, quia credibile est, non posse eum scribere, quin aliquid semper praeclari nos doceat Vir (ut apparet) egregiarum meditationum plenus.

Ad alia tuarum literarum venio, quae Doctissimus Collinius communicare gravatus non est. Vellem adjecisset appropinquationis Gregorianae linearis Demonstrationem. Credo tamen aliam haberi simpliciorem, etiam in infinitum euntem, quae fiat sine ulla Bisectione Anguli, imo sine supposita Circuli Constructione, solo Rectarum ductu.

Vellem Gregoriana omnia conservari. Fuit enim his certe studiis promovendis aptissimus. Caeterum ejus Demonstrationi editae de Impossibilitate Quadraturae Absolutae Circuli et Hyperbolae multa haud dubie desunt.

De Aequationum Radicibus Surdis Generalibus inveniendis, sive, quod idem est, tollendis Aequationum potestatibus intermediis, multa et ego meditatus sum, et jam Vere anni superioris Specimina Hugenio communicaveram Regularum Cardanicis similium. Seriem enim habebam ejusmodi Regularum in infinitum euntem, in quibus et Cardanica continebatur. Sed ultra gradum Cubicum non erant Generales: Perspexi tamen inde veram Methodum progrediendi longius. Quamquam multis adhuc opus sit artibus, quas excutiendas libentur ingeniosissimo Tschirnhausio relinquo, qui hic ad eadem quae ego habebam Specimina, imo et alia praeterea, etiam de suo pervenit.

Ex iis quae Collinius ait de Gregoriana Methodo, difficile non fuit nobis certo divinare in quo consistat ejus substantia.

Imaginariarum quantitatum in Realium Radicum expressiones ingredientium sublationem frustra puto sperari, imo quaeri. Neque enim illae ullo modo vel Calculis vel Constructionibus obsunt: Et verae Realesque sunt Quantitates, si inter se conjunguntur, ob destructiones virtuales. Quod multis elegantibus Exemplis et Argumentis deprehendi. Exempli gratia $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}} = \sqrt{6}$. Tametsi enim neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$ neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$

radix extrahetur, nec proinde sic destruetur imaginaria $\sqrt{-3}$, supponenda tamen est destructa esse virtualiter, quod actu appareret si fieri posset Extractio. Alia tamen via haec summa reperitur esse $\sqrt{6}$. Unde in Cubicis Binomiis ubi realitas ejusmodi formularum (tum cum Extractio ex singulis Binomiis fieri nequit) ad oculum ostendi non potest, mente tamen intelligitur. Quare frustra Cartesius aliique expressiones Cardanicas pro particularibus habuere. Si quis posset invenire Quadraturam Circuli, et ejus Partium, ex data Hyperbolae et ejus partium quadratura, is posset eas tollere, modo in ipsam Quadraturam Imaginariae illae non rursus ingrediantur.

Caeterum ex illis quas habeo meditationibus circa Radices aequationum Irrationales, necessario sequitur res satis paradoxa: Scilicet omnes Aequationes gradus Octavi, Noni, Decimi posse ad gradum Septimum reduci. Itaque et omnia Problemata ad Decimum gradum usque occurrentia possunt ad Septimum deprimi.

Horribiles Calculi subeundi erunt illi, qui in hoc Argumentum velut per vim irrumpet; sed facillimi ipsi, qui ante meditabitur: cum, ut praevideo, ipsa natura rei ducat ad compendia quaedam, per quae spes est Calculi magnam partem abscindi, remque elegantibus artificiis, Ingenii potius vi quam Calculi labore, transigi posse.

Sed si quis laborem non subterfugeret, eum docere possum Methodum Analyticam generalem infallibilem, per quam omnium Aequationum radices generales invenire liceret.

Verum meliora illis proponerem agenda, qui Calculo delectarentur. Consilium enim habeo Tabularum Analyticarum, quae non minoris futurae essent usus in Analysi, quam Tabulae Sinuum in Geometria Practica; imo, arbitror, qui paulum in iis calculandis versatus sit, eum progressiones reperturum in infinitum, quarum ope magna Tabulae pars sine labore continuari possit. Nihil est quod norim in tota Analysi momenti majoris. Nam in his Tabulis pleraque Problemata statim soluta haberentur, aut levi opera possent inde deduci.

Pendet negotium ex re longe majore, Arte scilicet Combinatoria generali ac vera, cujus vim ac potestatem nescio an quisquam hactenus sit consecutus. Ea vero nihil differt ab Analysi illa suprema, ad cujus intima, quantum judicare possum, Cartesius non pervenit. Est enim ad eam constituendam opus Alphabeto Cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus Alphabeti opus est Analysi Axiomatum. Sed non miror ista nemini satis considerata: quia plerumque facilia negligimus, et multa, quae clara videntur, assumimus. Quod quam diu faciemus, nunquam ad illud perveniemus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus summum, nec genus Calculi, etiam non - Mathematicis accommodati obtinebimus.

Optarim Cl. Pellium generalia sua Meditata, et illud speciatim quod memoras Cribrum Eratosthenis, non supprimere. Nam etsi omnia forte, quae destinarat, non absolverit, Meditata tamen ipsa, et consilia egregiorum Virorum non perire, publici interest. Utilia quoque futura sunt, quae de Sinuum Tabula ad Aequationes accommodanda habet. Item de Limitibus et Radicibus.

Quod dicere videmini, plerasque difficultates (exceptis Problematibus Diophanteis) ad Series Infinitas reduci, id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira et implexa, ut neque ab Aequationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt (ex multis aliis) Problemata methodi Tangentium inversae, quae etiam Cartesius in potestate non esse fassus est.

In tomo 3. Epistolarum una habetur ad Beaunium, in qua ad propositas a Beaunio, Curvas quasdam invenire conatur, quarum una est Ludus*) naturae, ut intervallum inter Tangentem ad (axem) directricem usque productam, et ordinatim applicatam ex Curva ad directricem sit semper idem, recta scilicet constans. Hanc curvam nec Cartesius nec Beaunius nec quisquam alius (quod sciam) invenit. Ego vero qua primum die, imo hora, coepi quaerere, statim certa Analysi solvi**). Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere desiderari potest consecutum, quamquam maximi momenti esse sciam. Ac de his quidem nunc satis.

Ego id agere constitui, ubi primum otium nactus ero, ut rem omnem Mechanicam reducam ad puram Geometriam, Problemataque circa Elateria et Aquas et Pendula et Projecta et Solidorum Resistentiam et Frictiones etc. definiam. Quae hactenus attigit nemo. Credo autem rem omnem nunc esse in potestate, ex quo circa Regulas Motuum mihi penitus perfectis demonstrationibus satisfeci; neque quicquam amplius in eo genere desidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex Axiomate Metaphysico pulcherrimo, quod non minoris est momenti circa Motum, quam hoc, Totum esse majus parte, circa Magnitudinem.

De Centro-barycis quoque singularem quendam aditum reperi ad novas ac plane a prioribus diversas contemplationes, in Geometria pariter ac Mechanica magno usui futuras. Haec ubi (Deo volente) absolvero, reliquum temporis, quod scilicet Philosophicis meditationibus destinare fas erit, Naturae indagationi debeo.

Tschirnhausius proximo Tabellione scribet.

---

*) Muß heißen „hujus". Vergl. den Brief Leibnizens an Conti vom 9. April 1716.

**) Siehe die Beilage.

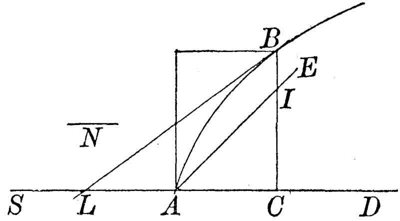
Beilage.

Jul. 1676. Methodus tangentium inversa.*)

In Tertio Tomo literarum Cartesii video eum credidisse methodum Fermatii de maximis et minimis non esse universalem, putat enim (pag. 362 epist. 63) non servire ad inveniendam tangentem curvae, cujus natura sit ut ex quovis puncto ejus ductae rectae ad quatuor puncta data aequentur rectae datae.

Mons. des Cartes lettre 71 partie 3 pag. 409 à Mons. de Beaune. Je ne croy pas qu'il soit possible de trouver generalement la converse de ma regle pour les touchantes, ny de celle dont se sert Mons. de Fermat, bienque la practique y soit en plusieurs cas plus aisée que la mienne, mais on en peut deduire a posteriori des theoremes qui s'etendent à toutes les lignes courbes qui s'experiment par une equation, en la quelle l'une des quantitez x ou y n'ait point plus de deux dimensions, encor que l'autre en eust mille. Il y a bien une autre façon qui est plus generale et a priori, à sçavoir par l'intersection de deux tangentes, la quelle se doit tousjours faire entre les deux points, où elles touchent la courbe, tant proches qu'on les puisse imaginer, car en considerant quelle doit estre cette courbe, a fin que cette intersection se fasse tousjours entre ceux points et non au deça ny au dela, on en peut trouver la construction. Mais il y a tout de divers chemins à tenir, et je les ay si peu practiquez que je n'en sçaurois encor faire un bon conte.

Mons. des Cartes parle avec un peu trop de presomtion de la posterité; il dit pag. 449 lettre 77, que sa regle pour resoudre generalement tous les problemes sursolides a esté sans comparaison la difficile à trouver de toutes les choses qui ont esté inventées jusqu'à present en Geometrie et qui le sera peut estre encor cy apres en plusieurs siecles, si ce n'est que je prenne moy meme la peine d'en chercher d'autres (comme si plusieurs siecles n'estoient capables de produire homme qui pût faire une chose qui ne paroist pas des plus considerables). pag. 459 la question des quatre globes propre à examiner si un homme sçait le calcul. C'est donc de Mons. des Cartes, mais comme elle est dans le livre, elle paroist bien prolixe.



Probleme de la methode inverse des touchantes, que Mons. des Cartes dit avoir resolu Tom 3. Ep. lettre 79 pag. 460. EAD angulus 45 grad. ABO curva, BL tangens, BC ordinata ad CL, ut linea N ad

*) Solvi una die duo problemata methodi tangentium inversac, quorum alternm nec solus solvit Cartesius, alterum ne ipse quidem fassus non posse. Bemerk. von Leibniz.

$BJ, CL = \frac{BC = yn}{BJ = y - x}, CL = t, t = \frac{ny}{y - x}, \frac{n}{t} = \frac{y - x}{y} = 1 - \frac{x}{y}, \frac{x}{y} = \frac{t - n}{t},$

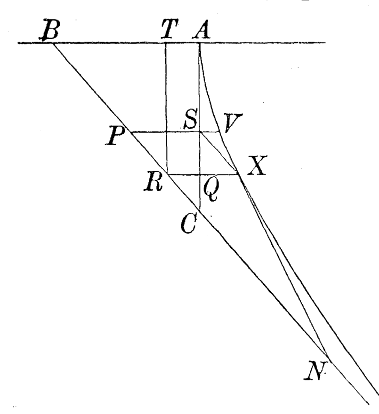
$\frac{t}{y} = \frac{\overline{dx}}{dy}$. Ergo $\frac{\overline{dx}}{dy} = \frac{n}{y - x}$, $\overline{dx}\, y - x\overline{dx} = \overline{dy}\, n$. Ergo $\int \overline{dx}\, y - \int \overline{x\overline{dx}} = n \int dy$,

porro $\int \overline{dy} = y$, $\int \overline{x\,\overline{dx}} = \frac{x^2}{2}$, et $\int \overline{\overline{dx}\, y}$ est area ACBA et quaeritur curva, in

qua area ABCA sit $\frac{x^2}{2} + ny$ seu $\frac{AC^2}{2} + n\,BC$. Rescindatur ab area hoc

$\frac{x^2}{2}$, id est triangulum ACI, debet reliquum AIBA aequari rectangulo ny.

Linea quam Beaunius Cartesio quaerendam proposuit, quae huc redibat, ut sit BC asymptotos curvae, BA axis, A vertex, AB, BC constantes, nam BAC est ad angulos rectos.



Sit ordinata RX, tangens XN, debetque esse RN semper constans seu aequalis ipsi BC, quaeritur natura curvae. Hic ita procedendum ego putem; sit alia ordinata PV, differens a priore RX recta SV, ducendo scilicet ipsi RN parallelam XS, erunt triangula SVX et RXN similia, RN $= t = c$ constanti, PR $= SX = \beta = \overline{dx}$, BR $= x$, RX $= y$, SV $= dy$, fiet $\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} = \frac{y}{t = c}$. Ergo $cy = \int \overline{y\overline{dx}}$ sive $c\overline{dy} = y\overline{dx}$.

Sit AQ vel TR $= z$ et sit AC $= f$, cum fuerit BC $= a$, fiet $\frac{AC}{BC} = \frac{f}{a} = \frac{TR}{BR}$ $= \frac{z}{x}$. Ergo $x = \frac{az}{f}$. Si $\overline{dx}$ constans, erit et $\overline{dz}$ constans. Ergo $c\overline{dy} = \frac{a}{f}\, y\overline{dz}$

vel $cy = \frac{a}{f}\int \overline{y\overline{dz}}$, $cy\,\overline{dy} = \frac{a}{f}\, y^2\, \overline{dz}$, ergo $c\,\frac{y^2}{2} = \frac{a}{f}\int y^2\, \overline{dz}$; habetur ergo et area figurae et momentum quodammodo (addendum enim aliquid ob obliquitatem) et $cz\,\overline{dy} = \frac{a}{f}\, yz\, \overline{dz}$, ergo erit $c \int z\,\overline{dy} = \frac{a}{f}\int \overline{yz\,\overline{dz}}$, $\frac{c\overline{dy}}{y} = \frac{a}{f}\,\overline{dz}$. Ergo c $\int \frac{\overline{dy}}{y} = \frac{a}{f} z$. Est autem ni fallor $\int \frac{\overline{dy}}{y}$ semper in potestate. Res tota eo redit ut inveniamus curvam, in qua redeat ordinata, fiat differentiis ordinatarum per abscissas divisis, ejusque figurae quadraturam. $d\overline{\sqrt{ay}} = \frac{1}{2\sqrt{ay}}$. Quae-

rendae ejusmodi figurae quarum ordinatae: $\frac{dy}{y}, \frac{dy}{y^2}, \frac{dy}{y^3}$, quemadmodum eas habeo quarum ordinatae ydy, $y^2 d\overline{y}$ etc. $\frac{\omega}{a} = \frac{d\overline{y}}{y}$, quoniam $d\overline{y}$ potest intelligi constans $= \beta$, hinc curva, in qua $\frac{\omega}{a} = \frac{d\overline{y}}{y}$, dabit $\omega y = a\beta$, quae foret hyperbola. Figura ergo, in qua $\frac{dy}{y} = z$, est hyperbola, quomodocunque explices y, at si y explices per φ^2, fiet $dy = 2\varphi$ et $\frac{2\varphi}{\varphi^2} = \frac{2}{\varphi}$. Jam $c\int\frac{dy}{y} = \frac{a}{f}z$, ergo $\frac{fc}{a}\int\frac{1}{y} = z$, quae est ad logarithmicam.

Ita solvimus omnia problemata methodi tangentium inversae, quae extant in tomo 3. Epistolarum Cartesii, quorum unum solvit ipse, ut ait pag. 460 Epist. 79 Tom 3; sed solutio non extat; alterum solvere tentavit, sed non potuit, fassus irregularem esse lineam et descriptione utendum esse, quae utique non est in humana potestate, imo nec angelica nisi aliunde constet ars describendi.

XLV.

Newton an Oldenburg.*)

Nach dem Manuscript in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Cantabr. Oct. 24. 1676.

Quanta cum voluptate legi Epistolas clarissimorum virorum D. Leibnitii et D. Tschirnhausii, vix dixerim. Perelegans sane est Leibnitii Methodus perveniendi ad Series Convergentes, et satis ostendisset ingenium Authoris, etsi nihil aliud scripsisset. Sed quae alibi per Epistolam sparsit suo nomine dignissima, efficiunt etiam ut ab eo speremus maxima. Diversitas modorum quibus eodem tenditur, eo magis placuit, quod mihi tres methodi perveniendi ad ejusmodi Series innotuerant, adeo ut novam nobis communicandam vix expectarem. Unam e meis prius descripsi; jam addo aliam, illam scilicet qua primum incidi in has Series; nam incidi in eas antequam scirem Divisiones et Extractiones radicum quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum est fundamentum Theorematis sub iuitio Epistolae prioris positi, quod D. Leibnitius a me desiderat.

*) Oldenburg hat bemerkt: Copied Nov. 4. 1676.

Sub initio studiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in opera celeberrimi Wallisii nostri, considerando Series, quarum intercalatione exhibet arcam Circuli et Hyperbolae, utpote quod in Serie Curvarum, quarum Basis sive Axis communis sit x, et ordinatim applicatae $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{5}{2}}$ etc. si areae alternarum, quae sunt x, $x-\frac{1}{3}x^3$, $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$, $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ etc. interpolari possent, haberemus areas intermediarum, quarum prima $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ est Circulus. Ad has interpolandas notabam, quod in omnibus primus terminus esset x, quodque secundi termini $\frac{0}{3}x^3$, $\frac{1}{3}x^3$, $\frac{2}{3}x^3$, $\frac{3}{3}x^3$ etc. essent in Arithmetica progressione; et proinde quod duo primi termini serierum intercalandarum deberent esse $x-\frac{\frac{1}{2}x^1}{3}$, $x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$, $x-\frac{\frac{5}{2}x^5}{3}$ etc.

Ad reliquas intercalandas considerabam, quod denominatores 1, 3, 5, 7 etc. erant in Arithmetica progressione, adeoque solae Numeratorum Coefficientes numerales restabant investigandae. Hae autem in alternis datis areis erant figurae potestatum numeri 11, nempe harum $\overline{11}|^0$, $\overline{11}|^1$ $\overline{11}|^2$, $\overline{11}|^3$, $\overline{11}|^4$, hoc est, primo 1, dein 1, 1; tertio 1, 2, 1; quarto 1, 3, 3, 1; quinto 1, 4, 6, 4, 1 etc.

Quaerebam itaque, quomodo in his Seriebus ex datis duabus primis figuris reliquae dirivari possent, et inveni, quod posita secunda figura, m, reliquae producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus seriei $\frac{m-o}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4}\times\frac{m-4}{5}$ etc. E. gr. sit (terminus secundus) $m=4$, et erit $4\times\frac{m-1}{2}$, hoc est 6, tertius terminus, et $6\times\frac{m-2}{3}$ hoc est 4, quartus, et $4\times\frac{m-3}{4}$ hoc est 1, quintus; et $1\times\frac{m-4}{5}$ hoc est 0, sextus, quo series in hoc casu terminatur. Hanc Regulam itaque applicui ad Series Interserendas, et cum pro Circulo secundus terminus esset $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, posui $m=\frac{1}{2}$ et prodierunt termini $\frac{1}{2}\times\frac{\frac{1}{2}-1}{2}$ sive $-\frac{1}{8}$, $-\frac{1}{8}\times\frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ sive $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{16}\times\frac{\frac{1}{2}-3}{4}$ sive $-\frac{5}{128}$, et

sic in infinitum. Unde cognovi, desideratam Aream segmenti Circularis esse: $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ etc.

Et eadem ratione prodierunt etiam interserendae areae aliquarum curvarum, ut et area Hyperbolae et ceterarum alternarum in hac Serie: $\overline{1+xx}|^{\frac{0}{2}}, \overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}, \overline{1+xx}|^{\frac{2}{2}}, \overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$ etc. Et eadem est ratio intercalandi alias series, idque per intervalla duorum pluriumve terminorum simul deficientium.

Hic fuit primus meus ingressus in has meditationes, qui e memoria sane exciderat, nisi oculos in adversaria quaedam ante paucas septimanas retulissem.

Ubi vero haec dediceram, mox considerabam terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$, $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}, \overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}, \overline{1-xx}|^{\frac{6}{2}}$ etc. hoc est 1, $1-xx$, $1-2xx+x^4$, $1-3xx+3x^4-x^6$ etc. eodem modo interpolari posse ac areas ab ipsis generatas: et ad hoc nihil aliud requiri quam omissionem denominatorum 1, 3, 5, 7 etc. in terminis exprimentibus areas, hoc est coefficientes terminorum quantitatis intercalandae, $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$, vel genenaliter $\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam multiplicationem terminorum hujus Seriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ etc. Adeo e. gr. $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ valeret $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ etc. et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$ valeret $1 - \frac{3}{2}xx + \frac{3}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6$ etc. et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{81}x^6$ etc.

Sic itaque innotuit mihi generalis Reductio Radicalium in infinitas Series per Regulam illam, quam posui initio Epistolae prioris, antequam scirem Extractionem Radicum.

Sed hac cognita non potuit altera me diu latere: nam, ut probarem has operationes, multiplicavi $1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6$ etc. in se, et factum est $1-xx$, terminis reliquis in infinitum evanescentibus per continuationem seriei Atque ita $1 - \frac{1}{3}xx - \frac{1}{9}x^4 - \frac{5}{84}x^6$ etc. bis in se ductum produxit etiam $1-xx$. Quod, ut certa fuerit harum conclusionum demonstratio, sic me manuduxit ad tentandum e converso, num hae Series, quas sic constitit esse Radices quantitatis $1-xx$, non possent inde extrahi more Arithmetico.

Et res bene successit. Operationis forma in Quadraticis Radicibus haec erat:

$$1 - xx \;(1 - \frac{1}{2}xx - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{o - xx}$$

$$- \; xx + \frac{1}{4}x^4$$

$$- \frac{1}{4}x^4$$

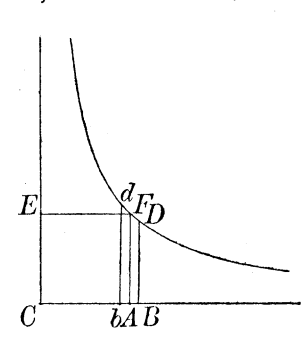
$$- \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{8}x^6 + \frac{1}{64}x^8$$

$$- \frac{1}{8}x^6 - \frac{1}{64}x^8$$

His perspectis neglexi penitus Interpolationem Seriernm, et has operationes tanquam fundamenta magis genuina solummodo adhibui. Nec latuit Reductio per Divisionem, res utique facilior.

Sed et Resolutionem Affectarum Aequationum mox aggressus sum, eamquc obtinui. Unde simul ordinatim applicatae, Segmenta Axium, aliaeque quaelibet Rectae ex Areis Curvarum vel Arcubus datis innotuere. Nam regressio ad haec nihil indigebat praeter Resolutionem Aequationum, quibus Areae vel Arcus ex datis rectis dabantur.

Eo tempore Pestis ingruens coegit me hinc fugere, ct alia cogitare: addidi tamen subinde condituram quandam Logarithmorum ex Area Hyperbolae, quam hic subjungo. Sit dFD hyperbola cujus Centrum C, Vertex F, et Quadratum interjectum CAFE = 1.



In CA cape AB, Ab hinc inde $= \frac{1}{10}$ sive 0. 1, et erectis perpendiculis BD, bd ad Hyperbolam terminatis, erit semisumma spatiorum AD et Ad $= 0.\,1 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7}$ etc. et semidifferentia $= \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ etc. quae reductae sic se habent,

0.1000000000000	0.0050000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	12500
1111	100
9	1
0.1003353477310	0.0050251679267

Horum summa 0.1053605156577 est Ad, et differentia 0.0953101798043 est AD. Et eadem ratione positis AB, Ab hinc inde = 0.2, obtinebitur Ad = 0.2231435513142, et AD = 0.1823215567939. Habitis sic Logarithmis Hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, 1.2, cum sit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$, et 0.8 et 0.9 sint minores Unitate: adde Logarithmos illorum ad duplum Logarithmi 1.2 et habebis 0.6931471805597, Logarithmum Hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde log 0.8, (siquidem sit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$) et habebis 2. 3025850929933, Logarithmum numeri 10: indeque per Additionem simul prodeunt Logarithmi numerorum 9 et 11; adeoque omnium primorum horum 2, 3, 5, 11 Logarithmi in promtu sunt. Insuper ex sola depressione numerorum superioris computi per loca decimalia, et Additione obtinentur Logarithmi decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02, ut et horum 0.998, 0.999, 1.001, 1.002. Et inde per additionem et subtractionem prodeunt Logarithmi primorum 7, 13, 17, 37 etc. qui una cum superioribus per Logarithmum numeri 10 divisi evadunt veri Logarithmi, in Tabulam inserendi. Sed hos postea propius obtinui.

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otiosus eo tempore perduxi. Nam tunc sane nimis delectabar inventis hisce. Sed ubi prodiit ingeniosa illa N. Mercatoris Logarithmotechnia (quem suppono sua primum invenisse) coepi ea minus curare, suspicatus vel eum nosse Extractionem Radicum aeque ac Divisionem Fractionum, vel alios saltem, divisione patefacta, inventuros reliqua, priusquam ego aetatis essem maturae ad scribendum. Eo ipso tamen tempore, quo liber iste prodiit, communicatum est per amicum D. Barrow (tunc Mathesos Professorem Cantab.) cum D. Collinio Compendium quoddam Methodi harum Serierum*) iu quo significaveram, Areas et Longitudines Curvarum omnium et Solidorum superficies et Contenta ex datis rectis, et vice versa ex his datis rectas determinari posse, et Methodum ibi indicatam illustraveram diversis seriebus. Suborta deinde inter nos Epistolari consuetudine D. Collinius, vir in rem mathematicam provehendam natus, non destitit suggerere, ut haec publici juris facerem: Et ante annos quinque cum suadentibus amicis consilium coeperam edendi Tractatum de Refractione Lucis et Coloribus, quem tunc in promtu habebam, coepi de his Seriebus iterum cogitare, et Tractatum de iis etiam conscripsi ut utrumque simul ederem. Sed ex occasione Telescopii Catadioptrici Epistola ad Te missa, qua breviter explicui

*) Es ist dies die Abhandlung Newton's: De Analysi per aequationes numero terminorum infinitas.

conceptus meos de Natura Lucis, inopinatum quiddam effecit, ut mei interesse sentirem ad te festinanter scribere de Impressione istius Epistolae. Et subortae statim per diversorum Epistolas (objectionibus aliisque refertas) crebrae interpellationes me prorsus a consilio deterruerunt, et effecerunt, ut me arguerem imprudentiae quod umbram captando eatenus perdideram quietem meam, rem prorsus substantialem.

Sub eo tempore Jacobus Gregorius ex unica quadam Serie e meis quam D. Collinius ad eum transmiserat, post multam considerationem (ut ad Collinium rescripsit) pervenit ad eandem Methodum, et Tractatum de ea reliquit, quem speramus ab amicis ejus editum iri. Siquidem pro ingenio, quo pollebat, non potuit non adjicere de suo nova multa, quae rei mathematicae interest ut non pereant. Ipse autem Tractatum meum non penitus absolveram, ubi destiti a proposito; neque in hunc usque diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars illa, qua decreveram explicare modum solvendi Problemata, quae ad Quadraturas reduci nequeunt, licet aliquid de Fundamento ejus posuissem. Ceterum in Tractatu isto Series Infinitae non magnam partem obtinebant.

Alia haud pauca congessi, inter quae erat Methodus ducendi Tangentes, quam solertissimus Slusius ante annos duos tresve tibi communicavit, de qua tu, suggerente Collinio, rescripsisti, eandem mihi etiam innotuisse. Diversa ratione in eam incidimus. Nam res non eget demonstratione, prout ego operor. Habito meo fundamento nemo potuit Tangentes aliter ducere, nisi volens de recta via deviaret. Quin etiam non hic haeretur ad Aequationes Radicalibus unam vel utramque Indefinitam Quantitatem involventibus utcunque affectas, sed absque aliqua talium Aequationum Reductione (quae opus plerumque redderet immensum) Tangens confestim ducitur. Et eodem modo se res habet in quaestionibus de Maximis et Minimis, aliisque quibusdam, de quibus jam non loquor. Fundamentum harum operationum, satis obvium quidem (quoniam jam non possum explicationem ejus prosequi), sic potius celavi: 6accdae 13 eff 7 i 319 n 4049 rr 459 t 12 vx.*) Hoc fundamento conatus sum etiam reddere speculationes de Quadratura Curvarum simpliciores, pervenique ad Theoremata quaedam generalia. Et ut candide agam, ecce primum Theorema. Ad**) curvam aliquam sit $dz^{\vartheta} \times \overline{e + fz^{\eta}}|^{\lambda}$ ordinatim applicata, termino abscissae seu basis z normaliter

*) Hoc est, Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, et vice versa. Interpretation von Wallis.

**) Leibniz hat hier am Rande des Manuscripts bemerkt:

$$\int \overline{dz}\ z^m \ \overline{\underline{|n|}\, e + fz^{\frac{h}{,}}},\quad \int \overline{dz\ z^m\ \omega^n} = \Theta,\ \omega = e + fz^{\frac{h}{\cdot}},\ d\omega = fh.\, z^{\frac{h-1}{\cdot}}\, dz,$$

insistens, ubi literae d, e, f denotant quaslibet quantitates datas, et ϑ, η, λ indices Potestatum sive Dignitatum quantitatum, quibus affixae sunt. Fac $\frac{\vartheta + t}{\eta} = r$, $\lambda + r = s$, $\frac{d}{\eta f} \times \overline{e + fz^{\eta}}|^{\lambda + 1} = Q$, et $r\eta - \eta = \pi$, et Area Curvae erit Q in $\frac{z^{\pi}}{s} - \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}} + \frac{r-2}{s-2} \times \frac{eB}{fz^{\eta}} - \frac{r-3}{s-3} \times \frac{eC}{fz^{\eta}}$ $+ \frac{r-4}{s-4} \times \frac{eD}{fz^{\eta}}$ etc. literis A, B, C, D etc. denotantibus terminos proxime antecedentes, nempe A terminum $\frac{z^{\pi}}{s}$, B terminum $- \frac{r-1}{s-1} \times \frac{eA}{fz^{\eta}}$ etc. Haec Series, ubi r fractio est vel numerus negativus, continuatur in infinitum: ubi vero r integer est et affirmativus, continuatur ad tot terminos tantum quot sunt unitates in eodem r, et sic exhibet Geometricam Quadraturam Curvae. Rem exemplis illustro.

Exempl. 1. Proponatur Parabola, cujus ordinatim-applicata sit $\sqrt{az}$. Haec in formam Regulae reducta, fit $z^0 \times \overline{o + az^1}|^{\frac{1}{2}}$: quare est $d = 1$, $\vartheta = o$, $e = o$, $f = a$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, Q

$$z = \overline{\omega - e : f}\,\boxed{1 : h} \text{ et } dz = \overline{d\omega : fh}\ \overline{\frac{\omega - e}{f}}\,\boxed{\frac{1-h}{h}} \text{ et}$$

$$\Theta = \int \overline{\frac{\omega - e}{f}\,\boxed{\frac{1-h+m}{h}}}\ \omega^{n}\, d\omega \ (\text{genauer} = \frac{1}{fh} \int \overline{\frac{\omega - e}{f}\,\boxed{\frac{1-h+m}{h}}}\ \omega^{n}\, d\omega)$$

Ita res reducta ad terminos simpliciores; itaque si sit $1 - h + m, : h = g$, fiet $\Theta = \int \frac{\omega - e}{f}\,\boxed{g}\,.\,\omega^{n}.\,d\omega$, unde si g sit integer, habetur solutio absoluta, quae videtur esse theorematis hic scripti origo. Si loco $z^{\frac{m}{\cdot}}$ affuisset $z^{m}\,\boxed{r}\,\overline{b + dz^{c}}$, prodiisset

$$\int, \frac{\omega - e}{f}\,\boxed{g}\,.\,\omega^{n},\ \boxed{r}\,\overline{b + d \cdot \frac{\omega - e}{f}\,\boxed{c : h}}. \text{ Ergo si } g = \text{rationali, tunc}$$

$\int dz\, z^{m}.\, \overline{b + dz^{\frac{c}{\cdot}}}|^{r}.\, \overline{e + fz^{h}}|^{n}$ reducitur ad aliquot finitas ω^{n}, $\overline{b + d.\,\frac{\omega - e}{f}\,\boxed{c : h}}$.

Haec maximi momenti. Si $h = 1$, fit g integer, posito m integro. Sed hinc nihil lucramur. Si faciamus $v = \boxed{n}\,\overline{e + f.z^{h}}$, fiet $v^{1:n} - e = f.z^{h}$ et $v^{\frac{1:n-1}{\cdot}}\, dv : nf$ $= h.\, z^{\frac{h-1}{\cdot}}\, dz$ et $z = \overline{v^{\frac{1:n}{\cdot}} - e, : f}\,\boxed{1:h}$ et $dz = \frac{dv}{hnf}.\, v^{\frac{1:n-1}{\cdot}}$ in $\overline{v^{\frac{1:n}{\cdot}} - e, : f}\,\boxed{\frac{1-h}{h}}$ et fit $\int dz.\ z^{m}\ \overline{e + fz^{\frac{h}{\cdot}}}|^{n}.\ \overline{b + dz^{c}}|^{r}$ et $dz.\, z^{m.}\, \overline{e + fz^{h}}$ etc. $= \frac{dv}{hnf}\, v^{\frac{1:n}{\cdot}}$ in $\overline{v^{1:n} - e, : f}\,\boxed{\frac{1-h+m}{h}}$ in v in $\overline{b + d\,\frac{v^{\frac{1:n}{\cdot}} - e}{f}\,\boxed{c}}\Big|^{r}$, ita revera, posito $\frac{1-h+m}{h}$ esse integrum, obtenta est depressio. Si h sit 1, quantitate sub irrationali contenta resoluta in plures divisores, et unum ex his irrationalem ponendo v, habetur depressio.

$= \frac{1}{a} \times \overline{az}|^{\frac{3}{2}}$, $\pi = o$. Et Area quaesita $\frac{1}{a} \times \overline{az}|^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$, hoc est $\frac{2}{3} z \sqrt{az}$. Et sic in genere, si cz^{η} ponatur ordinatim-applicata, prodibit Area $\frac{c}{\eta + 1} z^{\eta + 1}$.

Exempl. 2. Sit ordinatim-applicata $\frac{a^4 z}{c^4 - 2 cczz + z^4}$. Haec per Reductionem fit $a^4 z \times \overline{cc - zz}|^{-2}$ vel etiam $a^4 z^{-3} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-2}$. In priori casu est $d = a^4$, $\vartheta = 1$, $e = cc$, $f = -1$, $\eta = 2$, $\lambda = -2$, adeoque $r = 1$, $s = -1$, $Q = \frac{a^4}{-2} \times \overline{cc - zz}|^{-2}$, hoc est $= \frac{-a^4}{2cc - 2zz}$, $\pi = o$. Et Area curvae Q in $\frac{z^0}{-1}$, id est $= \frac{a^4}{2cc - 2zz}$. In secundo autem casu est $d = a^4$, $\vartheta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $\eta = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = \frac{a^4}{-2cc} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-1}$ id est $= \frac{-a^4 zz}{2c^4 - 2cczz}$, $\pi = o$. Et Area $=$ Q in $\frac{z^0}{-1}$, hoc est $= \frac{a^4 zz}{2c^4 - 2cczz}$. Area his casibns diversimode exhibetur, quatenus computatur a diversis finibus, quorum assignatio per hos inventos valores arearum facilis est.

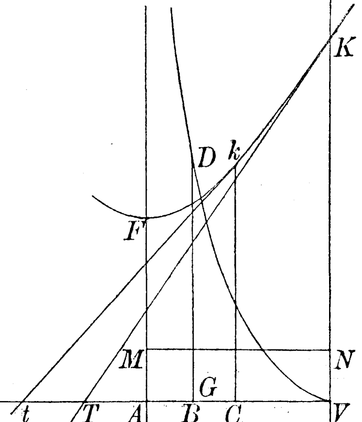
Exempl. 3. Sit ordinatim-applicata $\frac{a^5}{z^5} \sqrt{: bz + zz}$, hoc est, per Reductionem ad debitam formam, vel $a^5 z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b + z}|^{\frac{1}{2}}$, vel $a^5 z^{-4} \times \overline{1 + bz^{-1}}|$ Et erit in priori casu $d = a^5$, $\theta = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $\eta = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, adeoque $r = -\frac{7}{2}$ etc. Quare cum r non sit numerus affirmativus, procedo ad alterum casum: hic est $d = a^5$, $\vartheta = -4$, $e = 1$, $f = b$, $\eta = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$, adeoque $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = \frac{a^5}{-b} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$ seu $= -\frac{a^5 z + a^5 b}{bzz} \sqrt{zz + bz}$, $\pi = -2$. Et Area Q in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2} b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{z}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^0}{3\frac{1}{2} bb}$, hoc est $= \frac{-30 bb + 24 bz - 16 zz}{105 bb zz} \times \frac{a^5 z + a^5 b}{bzz} \sqrt{zz - bz}$.

Exempl. 4. Sit denique ordinatim-applicata

$\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{5 : c^3 - 3acc z^{\frac{2}{3}} + 3aac z^{\frac{4}{3}} - a^3 zz}}$. Haec ad formam Regulae reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$; indeque est $d = b$, $\vartheta = \frac{1}{3}$. $e = c$, $f = -a$, $\eta = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$

$r = 2$, $S = \frac{7}{5}$, $Q = \frac{3b}{-2a} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$, $\pi = \frac{2}{5}$, Et Area $= Q \times \overline{\frac{5z^{\frac{2}{3}}}{7} - \frac{5}{2} \times \frac{5c}{-7a}}$,

id est $-\frac{30\,abz^{\frac{2}{5}} + 75\,bc}{28\,aa} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$. Quod si res non successisset in hoc casu, existente r vel fractione vel numero negativo, tunc tentassem alterum casum purgando terminum $-az^{\frac{2}{3}}$ in ordinatim-applicata a coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$, hoc est, reducendo ordinatim-applicatam ad hanc formam $bz^{-\frac{1}{15}} \times \overline{-a + cz^{-\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Et si r in neutro casu fuisset numerus integer et affirmativus, conclusissem Curvam ex earum numero esse, quae non possunt Geometrice quadrari. Nam, quantum animadverto, haec Regula exhibet in infinitis Aequationibus Areas omnium Geometricam Quadraturam admittentium curvarum, quarum ordinatim-applicatae constant ex Potestatibus, Radicibus vel quibuslibet Dignitatibus Binomii cujuscunque: licet non directe, ubi index Dignitatis est numerus integer.*) At quando hujusmodi Curva aliqua non potest Geometrice quadrari, sunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum Conicis Sectionibus, vel saltem cum aliis figuris simplicissimis quibuscum potest comparari: Ad quod sufficit etiam hoc ipsum unicum jam descriptum Theorema, si debite concinnetur. Pro Trinomiis etiam et aliis quibusdam Regulas quasdam concinnavi. Sed in simplicioribus vulgoque celebratis Figuris vix aliquid relatu dignum reperi, quod evasit aliorum conatus, nisi forte Longitudo Cissoidis ejusmodi censeatur. Ea sic construitur.



Sit VD Cissois, AV Diameter Circuli, ad quem aptatur, V Vertex, AF Assymptotos ejus, ac DB perpendiculare quodvis ad AV demissum. Cum semiaxe AF = AV et semiparametro AG = $\frac{1}{3}$ AV, describatur Hyperbola FkK, et inter AB et AV sumta AC media proportionali, erigantur ad C et V perpendicula Ck et VK Hyperbolae occurrentia in k et K et agantur rectae KT et kt tangentes hyperbolam in iisdem K et k, et occurrentes AV in T et t, et ad AV constituatur rectangulum AVNM aequale spatio TKkt; et Cissoidis VD longitudo erit sextupla altitudinis VN. Demonstratio perbrevis est. Sed ad Infinitas Series redeo.

*) Die Worte licet non directe integer finden sich in dem Abdruck des Newton'schen Briefes im Commerc. epistol.

Qnamvis multa restent investiganda circa modos approximandi et diversa Serierum genera, quae possunt ad id conducere, tamen vix cum Dn. Tschirnhausio speraverim dari posse aut simpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi Quantitates ad hoc genus Serierum, de quo agimus, quam sunt Divisiones et Extractiones Radicum, quibus Leibnitius et ego utimur. Saltem non generaliora, quia pro Quadratura et εὐθύνσει curvarum ac similibus, nullae possunt dari Series ex hisce simplicibus terminis Algebraicis (unicam tantum Indefinitam Quantitatem involventibus) constantes, quas non licet hac Methodo colligere. Nam non possunt esse plures hujusmodi convergentes Series ad idem determinandum, quam sunt Indefinitae Quantitates, ex quarum Potestatibus Series conflentur; et ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate seriem novi colligere, et idem credo Leibnitio in potestate esse. Nam quamvis mea methodo liberum sit eligere pro conflanda serie quantitatem quamlibet indefinitam, a qua quaesitum dependeat, et methodus, quam ipse nobiscum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum, quibus opus commode deduci potest ad Fractiones, quae per solam divisionem evadant Series Infinitae; tamen aliae quaecunque Indefinitae Quantitates pro Seriebus conflandis adhiberi possunt per methodum istam, qua Affectae Aequationes resolvuntur, dummodo resolvantur in propriis terminis, hoc est conficiendo seriem ex solis terminis, quos aequatio involvit.

Praeterea non video, cur dicatur his Divisionibus et Extractionibus problemata resolvi per Accidens, siquidem hae operationes eodem modo se habeant ad hoc genus Algebrae ac vulgares operationes Arithmeticae ad Algebram vulgo notam. Quod autem ad Simplicitatem Methodi attinet, nolim Fractiones et Radicales absque praevia Reductione semper resolvi in Series Infinitas. Sed ubi perplexae quantitates occurrunt, tentandae sunt omnimodae Reductiones, sive id fiat augendo, minuendo, multiplicando vel dividendo quantitates indefinitas, sive per methodum transmutatoriam Leibnitii, aut alio quocunque modo, qui occurrat. Et tunc Resolutio in series per Divisionem et Extractionem optime adhibebitur. Hic autem praecipue nitendum est, ut Denominatores Fractionum et Quantitates in Vinculo Radicum reducantur ad quam paucissimas et minime compositas, et ad tales etiam, quae in seriem abeant citissime convergentem, etsi Radices neque convertantur in Fractiones neque deprimantur. Nam per Regulam initio alterius epistolae Extractio Altissimarum Radicum aeque simplex et facilis est ac Extractio radicis Quadraticae, vel Divisio, et series, quae per Divisionem eliciuntur, solent minime omnium convergere. Hactenus de Seriebus Unicam Indefinitam Quantitatem involventibus locutus sum: Sed

possunt etiam perspecta Methodo Series ex Duabus vel Pluribus assignatis Indefinitis Quantitatibus pro arbitrio confici. Quin etiam beneficio ejusdem methodi possunt series ad omnes figuras efformari, Gregorianis ad Circulum et Hyperbolam editis affines, hoc est, quarum ultimus terminus exhibebit quaesitam Aream. Sed calculum hic onerosiorem nolim lubens subire. Possunt denique Series ex Terminis Compositis eadem methodo constitui: quemadmodum si sit $\sqrt{: aa - ax + \frac{x^3}{a}}$ ordinatim-applicata curvae alicujus; pono $aa - ax = zz$ et ex binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extracta radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$ etc. cujus Seriei omnes termini quadrari possunt per Theorema jam ante descriptum. Sed hoc minoris facio, quod ubi series simplices non sunt satis tractabiles, aliam nondum communicatam methodum habeo, qua pro libitu acceditur ad quaesitum. Ejus fundamentum est commoda, expedita, generalis solutio hujus Problematis: Curvam Geometricam describere quae per data quotcunque puncta transibit. Docuit Euclides descriptionem Circuli per Tria data puncta; potest etiam Conica Sectio describi per Quinque data puncta, et Curva Trium Dimensionum per Septem data puncta (adeo ut in potestate habeam descriptionem omnium Curvarum istius ordinis, quae per Septem tantum Puncta determinantur). Haec statim Geometrice fiunt nullo Calculo interposito. Sed superius Problema est alterius generis. Et quamvis prima fronte intractabile videatur, tamen res aliter se habet. Est enim fere ex pulcherrimis, quae solvere desiderem.

Seriei a D. Leibnitio pro Quadratura Conicarum Sectionum propositae affinia sunt Theoremata quaedam, quae pro Comparatione Curvarum cum Conicis Sectionibus in Catalogum dudum retuli. Possum utique cum Sectionibus Conicis Geometrice comparare Curvas omnes (numero infinities infinitas), quarum ordinatim-applicatae sunt

$$\frac{dz^{\eta-1}}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\frac{1}{2}\eta-1}}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{\frac{3}{2}\eta-1}}{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{: e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}} \text{ vel } dz^{\eta-1} \times \sqrt{: e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1}}{\sqrt{: e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{\sqrt{e + fz^{\eta} + gz^{2\eta}}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1} \times \sqrt{e + fz^{\eta}}}{g + hz^{\eta}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1} \times \sqrt{e + fz^{\eta}}}{g + hz^{\eta}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\eta-1}}{g + hz^{\eta} \times \sqrt{e + fz^{\eta}}} \text{ vel } \frac{dz^{2\eta-1}}{g + hz^{\eta} \times \sqrt{e + fz^{\eta}}} \text{ etc.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{\frac{e + fz^{\eta}}{g + hz^{\eta}}} \text{ vel } dz^{\eta-1} \times \sqrt{\frac{e + fz^{\eta}}{g + hz^{\eta}}} \text{ etc.}$$

Hic d, e, f, g significant quasvis datas Quantitates cum suis signis + et — affectas; z Axem vel Basim curvae, et η, 2η, $\frac{1}{2}\eta - 1$, $\frac{3}{2}\eta - 1$, $\eta - 1$, $2\eta - 1$ Jndices Potestatum vel Dignitatum z, sive sint affirmativi vel negativi, sive integri vel fracti; et singula Bina Theoremata sunt duo Primi termini Seriei in infinitum progredientis. In tertio et quarto 4 eg debet esse non majus quam ff, nisi e et g sint contrarii signi. In caeteris nulla est limitatio. Horum aliqua (nempe Secundum, Tertium, Quartum, Quintum et Decimum-tertium) ex Areis duarum Conicarum Sectionum conjunctis constant. Alia quaedam (ut Novum, Decimum, et Duodecimum) sunt aliter satis Composita. Et omnia quidem in continuatione Progressionum cito evadunt compositissima, adeo ut vix per transmutationem figurarum, quibus Gregorius et alii usi sunt, absque alio fundamento inveniri posse putem. Ego equidem haud quicquam generale in his obtinere potui, antequam abstraherem a contemplatione Figurarum, et rem totam ad simplicem considerationem solarum ordinatim-applicatarum reducerem. Sed cum haec et hisce generaliora sint in potestate, non dubitabitur, credo, de Binomialibus longe facilioribus, quae in his continentur, et prodeunt ponendo tantum literam aliquam e vel f vel g = 0, et $\eta = 1$ vel 2; etsi series, in quas ista resolvantur, non posuerim in Epistola priori, nedum forte computaverim, intentus non in omnia particularia enumeranda, sed in illustrandam Methodum per unam et alteram in singulis rerum generibus instantiam quae ad ostendendam ejus generalitatem sufficere videbatur.

Caeterum haec Theoremata dant Series plus quam uno modo. Nam primum si ponatur f = 0 et $\eta = 1$, evadit $\frac{d}{e + gzz}$; unde prodit series nobis communicata. Sed si ponatur 2eg = ff et $\eta = 1$, inde tandem obtinemus hanc Seriem $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ etc. pro longitudine Quadrantalis Arcus, cujus chorda est Unitas, vel, quod perinde est, hanc $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255}$ etc. pro longitudine dimidii ejus. Et has forte, quia aeque simplices sunt ac alterae et magis convergunt, non repudiabitis. Sed ego rem aliter aestimo. Illud enim melius, quod utilius est, et Problema minori labore solvit. Sic, quamvis haec aequatio $x^3 - x = 1$ appareat simplicior

hacce $yy - 2y\sqrt{\frac{21}{25} - \sqrt{20}} = \sqrt{20}$, tamen in confesso est, posteriorem revera simpliciorem esse, propterea quod Radicem ejus y Geometra facilius eruit. Et ob hanc rationem Series pro obtinendis Arcubus Circuli, vel (quod eodem recidit) pro obtinendis Sectoribus Conicarum Sectionum pro optimis habeo, quae componuntur ex potestatibus Sinuum. Nam si quis vellet per simplex computum hujus Seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} +$ etc. colligere longitudinem Quadrantis ad Viginti figurarum loca decimalia, opus esset 5000000000 terminis Seriei circiter, ad quorum Calculum Milleni Anni requirerentur. Et res tardius obtineretur per Tangentem 45 grad. Sed adhibito Sinu recto 45 grad. Quinquaginta quinque vel Sexaginta termini hujus seriei $\sqrt{\frac{1}{2}} \times \overline{1 + \frac{1}{12} + \frac{3}{160} + \frac{5}{896}}$ etc. sufficerent, quorum computatio Tribus ut opinor vel Quatuor Diebus absolvi posset. Et tamen hic non est optimus modus computandi totam Peripheriam. Nam series ex sinu recto triginta graduum vel ex sinu verso sexaginta graduum conflata, multo citius dabit Arcum suum, cujus sextuplum vel duodecuplum est tota Peripheria. Neque majori labore eruitur area totius Circuli ex segmento, cujus sagitta est quadrans diametri. Ejus computi specimen, siquidem ad manus est, visum fuit apponere; et una adjungere aream Hyperbolae, quae eodem calculo prodit.

Posito Axe transverso $= 1$ et sinu verso seu Segmenti sagitta $= x$, erit Semi-segmentum $\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolae}\\ \text{Circuli}\end{array}\right\} = x^{\frac{1}{2}}$ in: $\frac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}$ etc. Haec autem Series sic in infinitum producitur; sit $2x^{\frac{3}{2}} = a$, $\frac{ax}{2} = b$, $\frac{bx}{4} = c$, $\frac{3cx}{6} = d$, $\frac{5dx}{8} = e$, $\frac{7ex}{10} = f$ etc. et erit Semi-segmentum $\left.\begin{array}{l}\text{Hyperbolae}\\ \text{Circuli}\end{array}\right\} = \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ etc. eorumque semi-summa $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11}$ etc. et semi-differentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13}$ etc. His ita praeparatis suppono $x = \frac{1}{4}$, quadrantem nempe Axis, et prodit $a \left(= \frac{1}{4}\right) = 0.25$; $b\left(= \frac{ax}{2} = \frac{0.25}{1 \times 8}\right) = 0.03125$; $c\left(= \frac{bx}{4} = \frac{0.03125}{2 \times 8}\right) = 0.001953125$; $d\left(= \frac{3cx}{6} = \frac{0.001953125}{8}\right) = 0.000244140625$. Et sic procedo usque dum venero

ad terminum depressissimum, qui potest ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11 etc. respective divisos dispono in duas Tabulas, ambiguos cum primo in unam, et negativos in aliam, et addo ut hic vides:

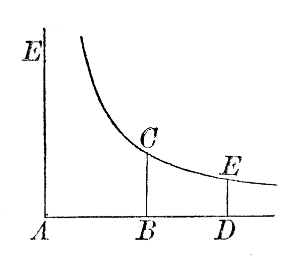
0.0833333333333333	0.0002790178571429
62500000000000	34679066051
271267361111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	0.0002825719389575
1	
0.0896109885646618	

Tunc a priori summa aufero posteriorem et restat 0.0893284166257043 Area Semi-segmenti Hyperbolici. Addo etiam easdem summas, et aggregatum aufero a primo termino duplicato 0.1666666666666666 et restat 0.0767731061630473 Area Semi-segmenti Circularis. Huic addo Triangulum istud quo completur in Sectorem, hoc est, $\frac{1}{32}\sqrt{3}$ seu 0.0541265877365274 et habeo Sectorem Sexaginta graduum 0.1308996938995747, cujus sextuplum 0.7853981633974482 est Area totius Circuli, quae divisa per $\frac{1}{4}$, quadrantem Diametri, dat totam Peripheriam 3.1415926535897928. Si alias artes adhibuissem, potui per eundem numerum terminorum seriei pervenisse ad multo plura loca figurarum, puta Viginti quinque aut amplius; sed animus fuit hic ostendere, quid per simplex seriei computum praestari posset. Quod sane haud difficile est, cum in omni opere multiplicatores ac divisores magna ex parte non majores quam 11 et nunquam majores quam 41 adhibere opus sit.

Per seriem Leibnitii, etiam si ultimo loco dimidium termini adjiciatur et alia quaedam similia artificia adhibeantur, potest computum produci ad multas figuras: ut et ponendo summam terminorum $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \frac{1}{25} - \frac{1}{31} + \frac{1}{33}$ etc. esse ad totam seriem $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ etc. ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus usus videtur

esse, quando vel conjungitur cum duabus aliis persimilibus et citissime convergentibus Seriebus, vel sola adhibetur ad computandum arcum 30 graduum, posita Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim Series illa evadit $1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 9} - \frac{1}{7 \times 27} + \frac{1}{9 \times 81}$ etc. quae cito convergit; vel si conjunges cum aliis seriebus, pone circuli Diametrum $= 1$ et $a = \frac{1}{2}$ etc. et area totius circuli erit $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} +$ etc. $+ \frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11}$ $-$ etc. $+ \frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9}$ etc. Hic consideravimus series, quatenus adhibentur ad computandum totum circulum. Sed quando computandae sunt partes ejus, tunc quaelibet series habet proprium usum, et in suo genere optima est. Si datur Tangens satis parva vel satis magna, non recurrendum erit ad Sinum aliquem, ut inde computetur Arcus, neque vice versa. Series dato congruens est aequatio pro solvendo proprio Problemate.

Credo Cl. Leibnitium, dum posuit seriem pro determinatione Cosinus ex Arcu dato, vix animadvertisse Seriem meam pro determinatione Sinus Versi ex eodem Arcu, siquidem haec idem sunt. Neque observasse videtur morem meum generaliter usurpandi literas pro quantitatibus cum signis $+$ et $-$ affectis, dum dividit hanc seriem $\frac{z}{6} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} +$ etc. Nam cum area Hyperbolica BE hic significata per z sit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex una vel altera parte ordinatim-applicatae BC; si area illa in numeris data sit l, et l substituatur in serie pro z, orietur vel $+ \frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3 6^4}$ etc. vel $- \frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ etc. prout l sit affirmativa vel negativa. Hoc est, posito $a = 1 = b$, et l logarithmo Hyperbolico, numerus ei correspondens erit $1 + \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ etc. si l sit affirmativus, et $1 - \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ etc. si l sit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum quae alias in nimiam molem crescerent. Nam v. g. illud unicum Theorema, quod supra posui pro Quadratura Curvarum, resolvendum esset in triginta duo Theoremata, si pro Signorum varietate multiplicaretur.



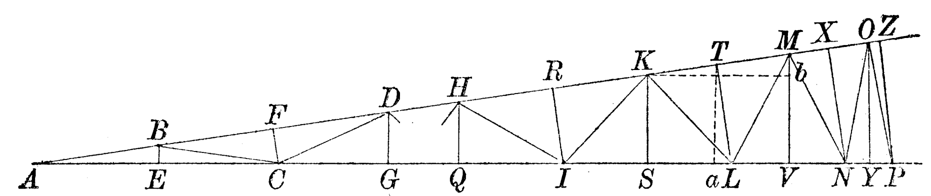
Praeterea, quae habet Vir Clarissimus de Inventione Numeri Unitate majoris per datum Logarithmum Hyperbolicum ope Seriei $\frac{1}{1} - \frac{11}{1 \times 2} + \frac{1^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{1^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} +$ etc. potius quam ope Seriei $\frac{1}{1} + \frac{11}{1 \times 2} + \frac{1^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4} +$ etc. nondum percipio. Nam si unus terminus adjiciatur amplius ad Seriem posteriorem quam ad priorem, posterior magis appropinquabit. Et certe minor est labor computare unam vel duas primas figuras adjecti hujus termini, quam dividere Unitatem per prodeuntem Logarithmum Hyperbolicum ad multa figurarum loca extensum, ut inde habeatur Logarithmus Hyperbolicus quaesitus. Utraque igitur Series (si duas dicere fas sit) officio suo fungatur. Potest tamen $\frac{1}{1} + \frac{1^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{1^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ etc. series ex dimidia parte terminorum constans optime adhiberi, siquidem haec dabit semi-differentiam duorum numerorum, ex qua et rectangulo dato uterque datur. Sic et ex Serie $1 + \frac{11}{1 \times 2} + \frac{1^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ etc. datur semi-summa numerorum, indeque etiam Numeri. Unde prodit relatio Serierum inter se, qua ex una data dabitur altera.

Theorema de Inventione Arcus ex dato Cosinu, ponendo radium 1, Cosinum c, et arcum $\sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$, minus appropinquat quam prima fronte videtur. Posito quidem sinu verso v, error erit $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194}$ + etc. Potest fieri ut $120 - 27v$ ad $120 - 17v$, ita chorda $(\sqrt{2v})$ ad Arcum, et error erit tantum $\frac{61 v^3 \sqrt{2v}}{44800}$ circiter, qui semper minor est quam $5\frac{1}{4}$ minuta secunda, dum arcus non sit major quam 45 grad., et singulis etiam bisectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{a^7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$ etc. applicari posset ad computationem tabulae Segmentorum, ut observat Vir Clarissimus. Sed res optime absolvitur per Canonem Sinuum. Utpote, cognita Quadrantis Area, per continuam Additionem nonae partis ejus habebis Sectores ad singulos Decem Gradus in Semicirculo; deinde per continuam Additionem decimae partis partis hujus habebis Sectores ad Gradus; et sic ad decimas partes graduum et ultra procedi potest. Tunc radio existente, ab unoquoque Sectore

et ejus complemento ad 180 gradus aufer dimidium communis Sinus Recti et relinquentur Segmenta in Tabulam referenda. Caeterum quamvis Series hic non prosint, in aliis tamen locum obtinent; et quoniam hoc ad earum usum spectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Constructionem Logarithmorum non aliunde peti debere, credetis forte ex hoc simplici processu, qui ab istis pendet. Per methodum supra traditam quaerantur Logarithmi Hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02: id quod fit spatio unius et alterius horae. Dein divisis Logarithmis quatuor posteriorum per Logarithmum numeri 10, et addito Indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 98, 99, 100, 101, 102 in Tabulam inserendi. Hi per dena intervalla interpolandi sunt, et exibunt Logarithmi omnium Numerorum inter 980 et 1020, et omnibus inter 980 et 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus constructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium Primorum Numerorum et eorum multiplicium minorum quam 100: ad quod nihil requiritur praeter Additionem et Subtractionem. Siquidem sit $\sqrt[10]{\frac{9984 \times 1020}{9945}} = 2$, $\sqrt[4]{\frac{8 \times 9963}{984}} = 3$, $\frac{10}{2} = 5$, $\sqrt{\frac{98}{2}} = 7$, $\frac{99}{9} = 11$, $\frac{1001}{7 \times 11} = 13$, $\frac{102}{6} = 17$, $\frac{998}{4 \times 13} = 19$, $\frac{9936}{16 \times 27} = 23$, $\frac{986}{2 \times 17} = 29$, $\frac{992}{32} = 31$, $\frac{999}{27} = 37$, $\frac{984}{24} = 41$, $\frac{989}{23} = 43$, $\frac{987}{21} = 47$, $\frac{9911}{11 \times 17} = 53$, $\frac{9971}{13 \times 13} = 59$, $\frac{9882}{2 \times 81} = 61$, $\frac{9849}{3 \times 49} = 67$, $\frac{994}{14} = 71$, $\frac{9928}{8 \times 17} = 73$, $\frac{9954}{7 \times 18} = 79$, $\frac{996}{12} = 83$, $\frac{9968}{7 \times 16} = 89$, $\frac{9894}{6 \times 17} = 97$. Et habitis sic Logarithmis omnium numerorum minorum quam 100, restat tantum hos etiam semel atque iterum per dena intervalla interpolare. Constructionis Tabulae Sinuum, a qua pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum est continua Additio dati Anguli ad se ipsum vel ad alium



datum. Utpote in Angulo Addendo BAE inscribantur HJ, JK, KL, LM, MN, NO, OP etc. aequales radio AB, et ad opposita latera demittantur perpendicula BE, HQ, JR, KS, LT, MV, NX, OY etc. Et Angulorum HJQ, JKH, KLJ, LMK, etc. differentiae erunt angulus A; Sinus HQ, JR, KS etc. et Cosinus JQ, KR, LS, etc. Detur

jam aliquis eorum LMK et ceteri sic eruentur. Ad SV et MV demitte perpendicula Ta et Kb, et (propter similia triangula ABE, TLa, KMb, ALT, AMV etc.) erit AB . BE : : TL . La $\left(=\frac{SL-LN}{2}\right)$: : KT $\left(=\frac{1}{2}KM\right)$. $\frac{1}{2}$M $\left(=\frac{MV-KS}{2}\right)$. Et AB. AE : : KT. Sa $\left(=\frac{SL+LV}{2}\right)$: : TL. Ta $\left(=\frac{KS+MV}{2}\right)$. Unde dantur Sinus et Cosinus KS, MV, SL, LV. Et simul patet ratio continuandi progressiones. Nempe AB . 2 AE : : LV. TM + MX : : MX . VN + NY etc. : : MV . TL + XN : : XN . MV + OY etc. vel AB . 2BE : : LV. XN − TL : : MV. TM − MX : : MX. OY − MV : : XN . VN − NY etc. Et retro AB. 2AE : : LS . KT + RK etc. Pone ergo AB = 1, et fac BE × TL = La . AE × KT = Sa . Sa − La = LV . 2AE × LV − TM = MX etc. Sed nodus est inventio Sinus aut Cosinus Anguli A. Et hic subveniunt Series nostrae: Utpote cognita ex superioribus Quadrantalis Arcus longitudine 1.57079 etc., et simul Quadrato ejus 2. 4694 etc., divide quadratum hoc per quadratum numeri exprimentis rationem 90 graduum ad Angulum A: et quoto dicto z, tres vel quatuor termini hujus seriei $1-\frac{z}{2}+\frac{zz}{24}-\frac{z^3}{720}-\frac{z^4}{40320}$ etc. dabunt Cosinum istius anguli A. Sic primo quaeri postest Angulus 5 graduum et inde Tabula computari ad Quinos gradus, ac deinde interpolari ad Gradus vel Dimidios gradus per eandem methodum. Nam non convenit progredi per nimios saltus. Duae tertiae partes Tabulae sic computatae dant reliquam tertiam partem per Additionem vel Subtractionem more noto. Siquidem posito KT Cosinu 60 graduum, sit AE = SV et BE = Mb. Tunc ad decimas et centesimas partes graduum pergendum est per aliam methodum, substitutis tamen prius Logarithmis Sinuum inventorum, si ejus generis Tabula desideretur.

Ad computum Tabularum Astronomicarum Kepleri, posui fundamentum quoddam in altera Epistola. Ejus seriei tres primi termini et aliquando duo sufficiunt. Sed ad diversas partes Ellipseos diversae ejusmodi Series aptari debent: vel potius tales series computandae sunt, quae ex data Area Sectoris Elliptici BGE immediate exhibeant aream Sectoris Circuli, cujus Angulus est BEG, Radius CB. Et habitis hisce, computum earum ad duos, tres, vel forte quatuor terminos beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quam solita Resolutio tot Triangulorum in aliis Hypothesibus: imo forte minus grave, si Series prius debite concinnentur, siquidem unus Logarithmus e Tabula petitus determinet omnes istos terminos, addendo ipsum et ejus multiplices ad Logarithmos datarum Coefficientium in promtu habitos. Quae de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri possunt, ubi ratiocinia

Geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has Series computare triginta vel viginti aut forte pauciores terminos Tabulae in debitis distantiis, siquidem termini intermedii facile interseruntur per Methodum quandam, quam in usum Calculatorum fere hic descripsissem. Sed pergo ad alia.

Quae Cl. Leibnitius a me desiderat explicanda, ex parte supra descripsi. Quod vero attinet ad Inventionem terminorum p, q, r in Extractione Radicis Affectae, primum p sic eruo. Descripto angulo recta BAC, latera ejus BA, AC divido in partes aequales et inde normales erigo distribuentes angulare spatium in aequalia parallelogramma vel quadrata, quae concipio denominata esse a dimensionibus duarum indefinitarum specierum, puta x et y, regulariter ascendentium a termino A, prout vides in Fig. 1 inscriptas: ubi y denotat Radicem extra-

B

x^4_*	x^4y	x^4y^2	x^4y^3	x^4y^4	x^4y^5	x^4y^6
x^3_*	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	$x^3y^4_*$	x^3y^5	x^3y^6
x^2	x^2y	$x^2_*y^2$	x^2y^3	x^2y^4	x^2y^5	x^2y^6
x	xy	xy^2	xy^3	xy^4	xy^5_*	xy^6
0	y	y^2	y^3	y^4	y^5	y^6_*

A C

B

*						
*				*		
		*				
					*	
						*

D A E C

hendam et x alteram indefinitam quantitatem, ex cujus potestatibus Series conficienda est. Deinde cum Aequatio aliqua proponitur, parallelogramma singulis ejus terminis correspondentia insignio nota aliqua: et Regula ad duo vel forte plura ex insignitis parallelogrammis applicata, quorum unum sit humillimum in columma sinistra juxta AB, et alia ad Regulam dextrorsum sita, caeteraque omnia non contingentia Regulam supra eam jaceant, seligo terminos Aequationis per parallelogramma contingentia Regulam designatos, et inde quaero quantitatem Quotienti addendam. Sic ad extrahendam Radicem y ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$, parallelogramma hujus terminis respondentia signo nota aliqua *, ut vides in Figura 2. Dein applico Regulam DE ad inferiorem e locis signatis in sinistra columma, eamque ab inferioribus ad superiora dextrorsum gyrare facio, donec alium similiter vel forte plura e reliquis signatis locis coeperit attingere, videoque loca sic attacta esse x^3, xxyy et y^6. E terminis itaque $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$ tanquam Nihilo aequalibus (et insuper si placet reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$ ponendo $y = v\sqrt{ax}$) quaero valorem y et invenio quadruplicem $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$ et $-\sqrt{2ax}$, quorum quem-

libet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout e radicibus quampiam extrahere decretum est. Sic Aequatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam resolvebam in priori Epistola, dat $- 2a^3 + aay + y^3 = 0$ et inde $y = a$ proxime. Cum itaque a sit primus terminus valoris y, pono p pro caeteris omnibus in infinitnm, et substituo $a + p$ pro y. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullae, sed ex iis, credo, D. Leibnitius se proprio Marte extricabit). Subsequentes vero termini q, r, s etc. eodem modo ex aequationibus secundis, tertiis, caeterisque eruuntur, quo primus p e prima, sed cura leviori, quia caeteri valores y solent prodire dividendo terminum involventem iufimam potestatem indefinitae quantitatis x per Coefficientem radicis p, q, r aut s.

Intellexisti, credo, ex superioribus Regressionem ab Areis Curvarum ad Lineas Rectas fieri per hanc Extractionem Radicis Affectae.

Sed duo alii sunt modi, quibus idem perficio. Eorum unus affinis est Computationibus quibus colligebam approximationes sub finem alterius Epistolae, et intelligi potest per hoc exemplum. Proponatur Aequatio ad Aream Hyperbolae $z = x + \frac{xx}{2} + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ etc. Et partibus ejus multiplicatis in se emerget $zz = xx + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$ etc. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$ etc. $z^4 = x^4 + 2x^5$ etc. $z^5 = x^5$ etc. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$ et restat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$ etc. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$ et fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$ etc. Aufero $\frac{1}{24}z^4$ et restat $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}x^5$ etc. Addo $\frac{1}{120}z^5$ et fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quam proxime, sive $x = z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ etc.

Eodem modo Series de una Indefinita Quantitate in aliam transferri possunt. Quemadmodum si posito r radio circuli, x sinu recto arcus z et $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ etc. longitudine arcus istius, atque hanc Seriem a Sinu recto ad Tangentem vellem transferre: quaero longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}$ et reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8r^4} +$ etc. Vocetur haec quantitas t. Colligo potestates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$ etc., t^5

$= x^5 + \text{etc.}$ Aufero autem t de z et restat $z - t = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{10} - \text{etc.}$ Addo $\frac{1}{3}t^3$ et fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 + \text{etc.}$ Aufero $\frac{1}{5}x^5$ et restat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$ quam proxime. Quare est $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 - \text{etc.}$ Sed si quis in usus Trigonometricos me jussisset exhibere expressionem Arcus per Tangentem, eam non hoc circuitu, sed directa methodo quaesivissem.

Per hoc genus Computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus constantes: et Radices affectarum Aequationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc posteriorem usum adhibeo potius Methodum in altera Epistola descriptam tanquam generaliorem et (Regulis pro Elisione superfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam. Pro Regressione vero ab Areis ad Lineas rectas, et similibus, possunt hujusmodi Theoremata adhiberi.

Theorema 1. Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ etc. et vicissem erit

$$y = \frac{z}{a} - \frac{bzz}{a^2} + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4$$
$$+ \frac{3a^2c^2 - 21\,abbc + 6\,aabd + 14\,b^4 - a^3e}{a^9}z^5$$

etc. Ex. gr. proponatur Aequatio ad Aream Hyperbolae $z = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \text{etc.}$ Et substitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d et $\frac{1}{5}$ pro e, vicissim exsurgit $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}Z^4 + \text{etc.}$

Theorema 2. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 + \text{etc.}$, et vicissim erit

$$y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3bb - ac}{a^7}z^5 + \frac{8\,abc - aad - 12b^3}{a^{10}}z^7$$
$$+ \frac{55b^4 - 55\,abbc + 10aabd + 5\,aac^2 - a^3e}{a^{13}}z^9 + \text{etc.}$$

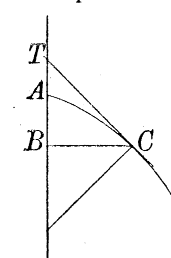
Ex. gr. proponatur Aequatio ad Arcum Circuli $z = y + \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6}$ etc. Et substitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d etc. orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \text{etc.}$

Alterum modum regrediendi ab Areis ad Lineas rectas celare statui.

Ubi dixi omnia pene Problemata solubilia existere, volui de iis praesertim intelligi circa quae Mathematici se hactenus occuparunt vel saltem in quibus Ratiocinia Mathematica locum aliquem obtinere possunt: Nam alia sane adeo perplexis conditionibus implicata excogitare liceat, ut non satis comprehendere valeamus, et multo minus tantarum computationum onus sustinere quod ista requirerent. Attamen ne nimium dixisse videar, inversa de Tangentibus Problemata sunt in potestate, aliaque illis difficiliora. Ad quae solvenda usus sum duplici Methodo, una concinniori, altera generaliori. Utramque visum est impraesentia literis transpositis consignare, ne propter alios idem obtinentes, institutum in aliquibus mutare cogerer. 5accdae 10effh 12i 4l 3m 10n 60qqr 7s 11t 10v 3x : 11ab 3cdd 10eaeg 10ill 4m 7n 6o 3p 3q 6r 5s 11t 7vx, 3acae 4egh 6i 4l 4m 5n 8oq 4r 3s 6t 4v, aaddaeeeeeeiiimmnnooprrrsssssttuu.*)

Inversum hoc Problema de Tangentibus, quando Tangens inter punctum contactus et axem Figurae est datae longitudinis, non indiget his Methodis; est tamen Curva illa Mechanica, cujus determinatio pendet ab Area Hyperbolae. Ejusdem generis est etiam Problema, quando pars Axis inter Tangentem et Ordinatim-applicatam datur longitudine. Sed hos casus vix numeraverim inter ludos naturae. Nam quando in Triangulo Rectangulo**), quod ab illa Axis parte et Tangente ac Ordinatim-applicata constituitur, relatio duorum quorumlibet laterum per Aequationem quamlibet definitur, Problema solvi potest absque mea Methodo generali; sed ubi pars Axis ad punctum aliquod positione datum terminata ingreditur Vinculum, tunc res aliter se habere solet.***)

*) So findet sich diese Stelle in dem Abdruck des Newtonschen Briefes im Commerc. epist. Nach Wallis bedeuten diese Zeichen: Una Methodus consistit in extractione fluentis quantitatis ex aequatione simul involvente fluxionem ejus: altera tantum in assumptione Seriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua caetera commode derivari possunt, et in collatione terminorum homologorum aequationis resultantis ad eruendos terminos assumptae Seriei.



**) Leibniz hat hier dazwischen geschrieben: TBC und folgendes am Rande bemerkt: TB,t BC,y AB,x, TB aequ. $\frac{\overline{dx}}{\overline{dy}}y$. Sit t aequ. $y^{(v)}$, fiet $\overline{dx}$ aequ. $\frac{y^{(v)}\,\overline{dy}}{y}$ seu x aequ. $\int\frac{y^{(v)}\,\overline{dy}}{y}$, $\frac{TC}{y}$ aequ. $\frac{\sqrt{\overline{dx}^2+\overline{dy}^2}}{y}$ Pone TC aqu. y, succedet ex Quadraturis.

***) Leibniz hat hier bemerkt: Imo tunc etiam succedit, quod si TB detur ad x seu sit $x^{(v)}$, fiet $x^{(v)} : y :: \overline{dx} : \overline{dy}$. Ergo $\frac{\overline{dx}}{x^{(v)}}$ aequ. $\frac{\overline{dy}}{y}$.

Communicatio Resolutionis Affectarum Aequationum per Methodum Leibnitii pergrata erit, juxta et Explicatio quomodo se gerat, ubi Indices potestatum sunt Fractiones, ut in hac Aequatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, aut Surdae Quantitates, ut in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}|^{\sqrt{(3)^{\frac{2}{3}}}} = y$ ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant Coefficientes ipsius x, sed indices Potestatum seu Dignitatum ejus, et $\sqrt{(3)^{\frac{2}{3}}}$ indicem Dignitatis binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea methodo patet; aliter descripsissem.

Sed meta tandem prolixae huic Epistolae ponenda est. Literae sane Excellentissimi Leibnitii valde dignae erant, quibus fusius hocce Responsum darem. Et volui hac vice copiosior esse, quia credidi amoeniora tua negotia severiori hocce scribendi genere non debere a me crebro interpellari.

Tui studiosissimus
Js. Newton.

XLVI.

Collins an Newton.

Nach dem Abdruck in Wallis' Op. Tom. III. p. 646 sq.

Aderat hic D. Leibnitius per unam Septimanam in mense Octobris, in reditu suo ad Ducem Hannoverae, cujus literis revocatus erat in ordine ad quandam Promotionem.

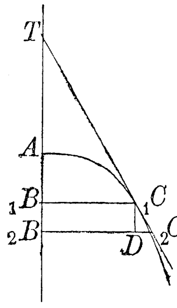
Dum aderat, impertivit mihi scripta quorum spero me tibi Apographa propediem missurum. Allocutus sum eum de duobus assertis D. Jacobi Gregorii, quorum prius est in literis suis, 15. Febr. 1671 viz. „Quod attinet ad methodum meam pro inveniendis Radicibus omnium „Aequationum: una series exhibet nonnisi Unam Radicem. Sed pro „quaque Radice possunt esse Series numero infinitae. Est autem indus„triae opus pro inchoanda Serie, et judicando, quam illa respicit Ra„dicem.“ Posterius est in literis suis, 17. Jan. 1672. „Unica (saltem „optima) Methodus Universalis, quam hactenus novi, pro inveniendis „Radicibus aequationum, est Series infinita. Potest exhiberi una, quae „inserviat Cubicis Aequationibus omnibus. Alia pro omnibus Biqua„draticis. Alia pro omnibus Supersolidis. Et credo, Tabulas hujusmodi

„Serierum fore methodum omnium optimam, pro sublevando taedio in ex-
„quirendo quaesitas Radices.“

Dicit Leibnitius, se posse et velle consilia impertire pro obtinendis ejusmodi seriebus, absque Speciosa Extractione radicum Aequationum Affectarum, modo quis velit laborem illum obire. Et consequenter ad hoc (postquam ego D. Bakerum ipse nominaveram) literis ejus ad D. Oldenburgium, datis Amstelodami $\frac{18}{28}$ Novemb. 1676, haec scribit:

„Rogo a me officiosissime Cl. Newtonum salutes, atque ei significes, „Hugeninm mihi asseverasse, captum a se aliquoties Experimentum „Duorum Speculorum planorum Metallicorum, quae rite juncta, etiam „exhausto aere in Recipiente non sunt dilapsa, nec proinde ea de re dubi„tari debere.

„D. Collinio haec quaeso communica. Dixit ille mihi D. Bakerum, „doctum admodum et industrium apud vos Analyticum, utilibus consiliis „exequendis parem esse. Elegi ego unum prae reliquis utile et facile. „Nimirum, Methodus Tangentium a Slusio publicata nondum rei fasti„gium tenet. Potest aliquid amplius praestari in eo genere, quod maxi„mi foret usus ad omnis generis Problemata: etiam ad meam (sine Ex„tractionibns Aequationum) ad Series reductionem. Nimirum, posset „brevis quaedam calculari circa Tangentes Tabula eousque continuanda, „donec progressio Tabulae apparet, ut eam scilicet quisque, quousque „libuerit, sine calculo continuare possit. Fundamentum calculi hic „exponam, ejusque simul Exemplum dabo.



„In figura adjecta sit A_1B vel A_2B aequ. x, ${}_1B_1C$ vel „${}_2B\ {}_2C$ sit y, quae duae quantitates Indeterminatae. Sint „aliae Determinatae a, b, c, d, e, f, et sit Aequatio ex„primens relationem inter x et y talis: $ax^2 + ay^2 + cyx$ „$+ dx + ey + f$ aequ. 0, quae aequatio in suo gradu „(quadratico scilicet) generalissima est, omnibusque Ex„emplis applicari potest pro varia literarum determina„tarum explicatione, cum etiam ipsi 0 (sive nihilo) vel „terminis ipso nihilo minoribus (seu negativis) quoque „applicari possit.

„Jam $\frac{BC}{TB}$ vocetur z. Posito TC esse Tangentem, erit (per metho„dum Tangentium vel Huddenii vel Slusii) $-$ z aeq. $\frac{2ax + cy + d}{2by + cx + e}$, ut „exponenti statim patebit.

„Verum id nondum est ultimum, quod in eo genere fieri potest aut „debet. Non ex hoc valore ipsius z invento potest tolli alterutra in-

„determinatarum x vel y et inveniri relatio ipsius z ad solam re-„manentem. Tollamus y et quaeramus relationem z ad x.

„Tollemus autem y ex inventa Aequatione ope datae Aequationis. „Nam ex data aequatione fiet y aeq. $\frac{-ax^2 - dx - f}{by + cx + e}$. Ponendo (compendii „causa) $-ax^2 - dx - f$ aeq. p, et $cx + e$ aeq. q, et $2ax + d - cxz - ez$ „aeq. r, et $2bx - c$ aeq. s, habebimus duos ipsius y valores, unum y aeq. „$\frac{p}{by + q}$, alterum y aeq. $\frac{r}{s}$. Quos duos valores inter se aequando, fiet ps „aeq. $bry + qr$, et ex hac aequatione novum habebimus valorem y aeq. „$\frac{ps - qr}{br}$, quem aequando praecedenti y aeq. $\frac{r}{s}$, habebitur aequatio, in „qua sublata est litera y, nempe ps^2 aeq. $br^2 + qrs$. Et in locum lite-„rarum p, q, r, s, substituendo valores assumptos aequationemque ordi-„nando, prodibit

$$\begin{array}{llllll}
3bc^2 & +6bce & -12abc & +4ab^2 & +3be^2 & \\
\quad x^2z^2 & \quad xz^2 & \quad x^2z & \quad x^2 & \quad z^2 & \\
4ab^2 & +4b^2d & -\ c^3 & +3ac^2 & +4b^2f & \\
-8abc & +4abd & -4bdc & +bd^2 & & \\
-4bcd\ xz & +2ace\ x & -\ ce^2\ z & +cde & \text{aequ. } 0 & \\
-3c^2e & +2c^2d & -4bcf & +fc^2 & &
\end{array}$$

„Quae est aequatio quaesita, exprimens relationem z ad solam x. „Quae novissima est, neque ab ulla litera amplius purgari potest.

„Idem optarim fieri in sequente gradu, assumpta aequatione gx^3 „$+ hy^3 + lx^2y + mxy^2 + ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f$ aeq. 0 eodemque „modo quaerendo ipsius z ad x relationem.

„Quodsi in aliquot gradibus, quousque commodum, continuaretur, „haberemus Tabulam Tangentium Analyticam usus maximi, tum ad alia „multa, tum ad meam Aequationum per Series resolutionem.

„Rectius initio scripsissem $a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + g = 0$, „ut servato eodem ordine, postea pergi possit in sequente gradu ad „hanc formam $a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2 + gx^2y + hxy^2 + lx^3 + my^3$ „aeq. 0, et sic porro.

„Amstelodami cum Huddenio locutus sum, cui negotia civilia tem-„pus omne eripiunt. Est enim ex numero 12 urbis Consulum, qui sub-„inde imperium obtinent. Nuper consul Regens erat, nunc Thesaurarii „munus exercet. Praeclara admodum in ejus Schedis superesse certum „est. Methodus Tangentium a Slusio publicata dudum illi fuit nota. „Amplior ejus Methodus est, quam quae a Slusio fuit publicata. Sed et „Quadratura Hyperbolae Mercatoris ipsi jam Anno 1662 innotuit. Hac-„tenus Leibnitius."

D. Baker est indefatigabilis industriae Vir, qui lubenter in se

suspiciet laborem Calculi, qui censebitur utilis. Sed credo eum in Methodo Tangentium vix satis peritum, quam puto in scriptis hactenus editis nondum esse demonstratam. Si itaque tu dignaberis ipsi impertire Consilia tua hac in re, hoc promovebit opus.

Bakerus huc imprimendam misit Exercitationem suam de Continue-proportionalibus, aliamque cui Titulus: Cardanus Promotus.

Narrat mihi D. Loggan (Chalcographus) quod Effigiem tuam delineavit ille in ordine ad sculpturam, quae praefigenda sit libro tuo de Lumine, Coloribus, Dioptricis etc. quem edendum intendis. Qua de re desideramus esse certiores. Sum etc. Lond. 5 Martii $167\frac{6}{7}$.

P. S. Exemplar Epistolae tuae (quatuor schedarum) nondum est ad D. Leibnitium missum, sed intra septimanam est quidam hinc profecturus Hanoveram, qui tum illud, tum libros quosdam laturus est.

Beilage.

Leibniz pflegte, wenn er mit bedeutenden Männern zusammengetroffen war, den Inhalt der Unterredung aufzuschreiben. Unter seinen Manuscripten findet sich ein Blatt, auf dem der folgende Inhalt seiner Unterredung mit Hudde angemerkt ist:

Huddius mihi ostendit se jam anno 1662 habuisse quadraturam Hyperbolae, quam deprehendi esse illam ipsam quam Mercator quoque de suo invenit et publicavit. Ostendit mihi Epistolam ad quendam van Duck ni fallor Leidam ea de re scriptam. Ejus methodus tangentium Slusiana in eo est amplior, quod etiam, quemadmodum in simplici aequatione, quamlibet progressionem Arithmeticam adhibere potest, cum Slusius aliique tantum una uti possint. Hinc possunt constructiones reddi simplices, dum pro arbitrio tolluntur termini. Hoc etiam servire potest ad facilius tollendam literam aliquam, ita enim plurimae habentur omnigenaeque aequationes ad tollendum aptae.

$$\begin{array}{llll}
x^3 + & px^2 + & qx & r \sqcap 0 \\
y & y & y & \\
 & y^2 & y^2 & \\
 & & y^3 & \\
\hline
3x^2 + & 2px + & qx & 0 \\
 & 2yx^2 + & yx & \\
 & & + y^2x &
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
x^2 + xy + y^2 + x + y + a \sqcap 0 \\
2x\overline{dx} + x\overline{dy} + 2y\overline{dy} + \overline{dx} + \overline{dy} \sqcap 0 \\
y\overline{dx} \\
-\frac{t}{y} \sqcap -\frac{\overline{dx}}{\overline{dy}} \sqcap \frac{+x + 2y + 1}{y + 2x + 1}
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
 & 1 & 0 & -1 \\
 & +x^2 & +xy & +y^2 \\
 & +x & +1 & \\
 & +a & & \\
 & 0 & 1 & 2 \\
\hline
 & y^2 & yx & x^2 \\
 & y & 1 & \\
 & a & & \\
 & 0 & 1 & 2 \\
\text{vel} & 2 & 1 & 0
\end{array}$$

Quod notaveram de Numeris Triangularibus pro tribus radicibus aequalibus, et pyramidalibus pro quatuor, id ipse dudum innotuit, imo etiam generalius

	−1	0	1	2	3	4	5	6	ubi notandum crescere numerum
−3	−1	0	0	1	3	6	10	15	ipsorum 0, quod praeclari est
−4	−1	0	0	0	1	4	10	20	usus ad destruendum.

Habet et regulas multiplicandi aequationes ita ut non determinentur tantum ad radices aequales, sed et ad radices arithmetice crescentes, vel geometrice vel alia progressione utentes.

Habet Huddius elegantissimam duarum curvarum extra et intra circulum descriptionem, quae sunt quadrabiles, et per ipsas tam prope invenitur vera circuli area, ut ope dodecagoni in sex ciphris tantum tres desint unitates seu $\frac{3}{100{,}000}$.

Habet et methodum inveniendi radices reales aequationis partim reales partim impossibiles habentis ope alterius aequationis totidem habentis radices reales, quot prior habebat ex realibus et imaginariis mixtas.

Elegans habebat specimen inveniendi summas serierum per subtractiones Geometricae progressionis repetitas. Nimirum subtrahit progressiones Geometricas quarum summae sunt etiam progressionis Geometricae, atque ita summa summarum haberi potest; atque ita habetur summa seriei. Praestitit hoc in serie, cujus numeratores sunt Arithmetici et nominatores geometrici, ut $\frac{1}{1}\ \frac{2}{4}\ \frac{3}{8}\ \frac{4}{16}$. Tres habet series, qualis Wallisiana, pro interpolationibus circuli. Ait non esse plures, illa puto methodo.

Potest et quadraturas irrationalium statim scribere persaepe, ut et Tangentes, non tollendo irrationales aut fractiones etc.

Während seines Aufenthalts in Holland machte Leibniz die folgende Zusammenstellung:

Novembr. 1676.

Calculus Tangentium differentialis.

$d\overline{x} = 1 \quad d\overline{x^2} = 2x \quad d\overline{x^3} = 3x^2$ etc.

$$d\overline{\tfrac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2} \quad d\overline{\tfrac{1}{x^2}} = -\frac{2}{x^3} \quad d\overline{\tfrac{1}{x^3}} = -\frac{3}{x^4} \text{etc.}$$

$$d\overline{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ etc.}$$

Ex his colligitur regula generalis haec pro differentiis ac summis simplicium potestatum

$$\overline{dx^e} = e, x^{e-1} \text{ et contra } \int\overline{x^e} = \frac{x^{e+1}}{e+1}.$$

Unde $d\frac{1}{x^2}$ seu $\overline{dx^{-2}}$ erit $-\,2x^{-3}$ seu $-\frac{2}{x^3}$

et $d\sqrt{x}$ seu $\overline{dx^{\frac{1}{2}}}$ erit $\frac{1}{2}\,x^{-\frac{1}{2}}$ seu $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{x}}$.

Sit $y = x^2$, et erit $\overline{dy} = 2x\overline{dx}$, ergo $\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} = 2x$.*)

Quae ratiocinatio est generalis, nec refert quae sit progressio ipsarum x. Eodemque modo generalis regula ita stabit: $\frac{\overline{dx^e}}{\overline{dx}} = ex^{e-1}$ et vicissem $\int\overline{x^e\overline{dx}} = \frac{x^{e+1}}{e+1}$.

Sit aequatio quaelibet v. g.
$ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 = 0$ et pro y scribendo $y + \overline{dy}$ ac pro x similiter $x + \overline{dx}$**), fiet omissis omittendis alia aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} ay^2 + byx + cx^2 + f^2x + g^2y + h^3 = 0 \\ \hline a2\overline{dy}\,y + by\overline{dx} + 2cx\overline{dx} + f^2\overline{dx} + g^2\,\overline{dy} \\ \quad + bx\overline{dy} \\ \hline a\,\overline{dy}^2 + b\overline{dx}\overline{dy} + c\overline{dx}^2 = 0 \end{array}\right\} = 0$$

Quae est regulae a Slusio publicatae origo. Eam vero ita in infinitum amplificabimus: Sint literae quotcunque, et ex iis composita formula, verbi gratia ex literis tribus sit formula:

$$ay^2 \;\; bx^2 \;\; cz^2 \;\; fyx \;\; gyz \;\; hxz \;\; ly \;\; mx \;\; nz \; p \; = 0$$

Unde fiet alia aequatio:

$$\begin{array}{ccccccccc} ay^2 & bx^2 & cz^2 & fyx & \text{simi-} & ly & mx & \text{simi-} & p \\ \hline 2a\overline{dy}\,y & 2b\overline{dx}\,x & 2c\overline{dz}\,z & fy\overline{dx} & \text{liter} & l\overline{dy} & m\overline{dx} & \text{liter} & \\ & & & fx\overline{dy} & & & & & \\ \hline a\overline{dy}^2 & b\overline{dx}^2 & c\overline{dz}^2 & f\overline{dx}\,\overline{dy} & & & & & \end{array}$$

Unde patet eadem methodo haberi tangentia superficierum plana, et alioqui nihil referre an non ipsae literae x, y, z aliquam habeant cognitam relationem, ea enim postea substitui potest.

---

*) Am Rande des Manuscripts hat Leibniz bemerkt: Praeclara haec observatio est ad calculum meum differentiarum, si sit $b, \overline{y\overline{dx} + x\overline{dy}} +$ etc. $= 0$, fore $\overline{bxy} + \int$ etc. $= 0$, et ita de caeteris. Videndum, quid de h^3 faciendum. Ad istos calculos melius faciendos poterit aequatio $ay^2 + byx + cx^2 +$ etc. transmutari in aliam alia curvae relatione, et comparabitur proveniens, alio differentiarum calculo, cum eo quod per istum prodit.

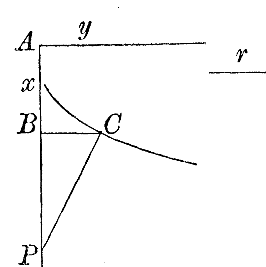
**) Leibniz hat am Rande bemerkt: Alterutra ex his $\overline{dx}$ vel $\overline{dy}$ pro arbitrio explicari potest, adhibita aequatione nova, et alterutra harum $\overline{dx}$ vel $\overline{dy}$ sublata, et x scilicet vel y aliter per quantitates explicanda. Verum non puto id esse, quia catalogus omnium curvarum quadrabilium prodire debet, alterutram sumendo constantem.

Hinc praeclare serviet eadem methodus, etsi compositae fractiones aut irrationales calculum ingrediantur, nec opus est earum tollendarum causa caetera exaltari, cum potius ipsarum differentiae separatim inveniri ac substitui possint: deinde cum methodus tangentium publicata non nisi tunc procedat, cum ordinatae parallelae sunt, ista et ad tangentes et alias quascunque, imo illas quoque relationes accommodari potest, quae sunt ordinatarum ad curvarum portiones aut in quibus angulus ordinatarum certa lege mutatur. Caeterum speciatim operae pretium erit rem ad irrationales ac fractiones compositas accommodare.

$d\sqrt{a+bz+cz^2}$, ponatur $a+bz+cz^2 = x$, et $\frac{d\sqrt{x}}{d\bar{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, jam $\frac{d\bar{z}}{d\bar{x}} = b+2cz$: ergo $d\sqrt[2]{a+bz+cz^2} = \frac{b+2cz}{2\sqrt{a+bz+cz^2}}$.

Sumta aequatione duarum literarum x, y pro curva, et determinata aequatione ad tangentes, tolli potest alterutra ipsarum x et y, ita ut restet altera tantum una cum $d\bar{x}$ et $d\bar{y}$, quod per omnes casus calculari operae pretium est.

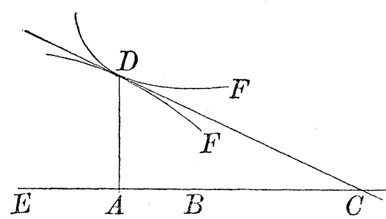
Datis tribus literis, ut x. y, z, et valore ipsius $d\bar{z}$ ope ipsius x vel y (vel etiam utriusque) expresso, habebitur denique aequatio tangentium, in qua erit etiam tantum alterutra harum x et y et duae $d\bar{y}$, $d\bar{x}$; aliquando et ipsa z non poterit tolli. Hoc etiam per omnes casus assumti valoris ipsius $d\bar{z}$ deduci potest, eodem modo plures adhuc literae assumi possunt. Et conjunctis in unum calculis universalibus omnibus, universalissimus ex ipsis fiet. Caeterum assumptio plurimarum literarum usum habere potest ad methodi tangentium inversae problemata ope quadraturarum solvenda. Ut si propositum sit problema solvere, in quo summa rectarum CB, BP sit data seu $y + \frac{y d\bar{y}}{d\bar{x}} = xy$, fiet $d\bar{x} + d\bar{y} = x d\bar{x}$ seu $x + y = \frac{x^2}{2}$. Ita habemus curvam, in qua summa earum CB + BP (in constantem r) aequatur rectangulo ABC.



Um die Tangentenmethode mittelst der Differentialrechnung mit den Methoden de Sluze's und Hudde's, die so oft von Leibniz erwähnt werden, vergleichen zu können, mögen diese, wie sie ursprünglich veröffentlicht wurden, hier mitgetheilt werden (sieh. Commercium epistol. Joan. Collins et aliorum de Analysi promota, Ausgabe von Biot und Lefort, Paris 1856, pag. 193 ff. und pag. 272 ff.).

Die Methode de Sluze's ist in zwei Briefen an Oldenburg, datirt Leodii $167\frac{2}{3}$ 17 Jan. und Leodii 1673 3 Maij enthalten. Beide Briefe sind in den Philosoph. Transact. veröffentlicht. Es ist von Interesse, zugleich die sich daran knüpfenden Briefe Oldenburg's und Newton's in Betracht zu ziehen. In dem ersten Brief, der die Grundlage seiner Methode enthält, schreibt de Sluze: Methodum meam ducendarum ad curvas quaslibet Geometricas tangentium mitto ad Te, et virorum doctissimorum R. Societatis censurae submitto. Brevis mihi visa est ac facilis, quippe quam puer αγεωμετρητος doceri possit, et quae absque ullo calculi labore ad omnes omnino lineas extendatur: malo tamen aliis talem videri quam mihi, cum in rebus nostris caecutire plerumque soleamus.

Data sit quaelibet curva DF cujus puncta omnia referantur ad rectam quamlibet datam EAB per rectam DA, sive EAB sit diameter seu alia quaelibet, sive etiam aliae simul lineae datae sint, quae vel quarum potestates aequationem ingrediantur, parum id refert.



In aequatione analytica, facilioris explicationis causa, DA perpetuo dicatur v, BA y. EB vero et aliae quantitates datae consonantibus exprimantur. Tum supponatur ducta DC, tangens curvam in D, et occurrens EB productae, si opus sit, in puncto C; et CA perpetuo quoque dicatur a. Ad inveniendam AC vel a haec erit Regula generalis:

1. Rejectis ab aequatione partibus, in quibus y vel v non invenitur, statuantur ab uno latere omnes in quibus est y, et ab altero illae in quibus habetur v, cum suis signis + vel —. Hoc dextrum, illud sinistrum latus facilitatis causa vocabimus.

2. In latere dextro praefigatur singulis partibus exponens potestatis, quam in illis obtinet v, seu quod idem est, in illam ducantur partes.

3. Fiat idem in latere sinistro, praeponendo scilicet unicuique illius parti Exponentem potestatis quam in illa habet y. Sed et hoc amplius: unum y in singulis partibus vertatur in a.

Aio aequationem sic reformatam modum ostendere ducendae Tangentis ad punctum D datum. Cum enim eo dato pariter datae sint y et v, et caeterae quantitates, quae consonantibus exprimuntur, a non poterit ignorari.

Auf diesen Brief antwortet Oldenburg den 29. Januar $167\frac{2}{3}$: Statui,

Deo dante, prima occasione Methodum ipsam, prout Epistola tua continetur, Transactionibus Philosophicis inserere. Non ingratum interea fuerit accipere quae Doctissimus noster Newtonus, in Academia Cantabrigiensi Mathematum Professor, de eodem argumento ad D. Collinium nostrum, qui te summopere et jugiter colit, nuper perscripsit in haec verba:

„Non parum me juvat intelligere, Mathematicos exteros in eandem mecum incidisse ducendi Tangentes methodum. Qualem eam esse „conjiciam, ex hoc exemplo percipies. Pone „CB applicatam ad AB in quovis angulo „dato terminari ad quamvis Curvam AC, „et dicatur AB x et BC y, habitudoque inter x et y exprimatur qualibet aequatione, „puta $x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3 = 0$, qua ipsa determinatur Curva. Regula ducendi Tangentem haec est: multiplica aequationis terminos per quamlibet progressionem arithmeticam juxta dimensiones y, „puta

$$x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3;$$
0 1 0 0 2 3

ut et juxta dimensiones x, „puta

$$x^3 - 2xxy + bxx - bbx + byy - y^3.$$
3 2 2 1 0 0

Prius productum erit Numerator, et posterius divisum per x Denominator Fractionis, quae exprimet longitudinem BD, ad cujus extremitatem D ducenda est Tangens „CD: est ergo longitudo $BD = \frac{-2xxy + 2byy - 3y^3}{3xx - 4xy + 2bx - bb}$.*)"

Hactenus Newtonus, quae ideo nunc perscribo, ut cum novissimis tuis comparare possis.

Die Antwort de Sluze's ist datirt Leodii 3. Maij 1673: De clarissimi viri [Newtoni] Methodo nihil aliud dicere possum, nisi mihi videri meam esse, qua nempe tot ante annos usus sim, et cujus ope flexus curvarum contrarios ac Problematum limites ostendi tum in Miscellaneis**) meis, tum etiam in literis, si recte memini, olim ad Te datis. Qua via in illam inciderit et quomodo illam demonstret vir doctissimus, ab ipso intelligere poteris: ego sane paucis, ut alias ad Te scripsi, et vulgo notis Lemmatibus rem absolvo; atque, ut candide Tecum agam, ecce ipsa Lemmata:

1. Differentia duarum dignitatum ejusdem gradus, applicata ad

*) Vorstehendes ist wörtlich entlehnt aus Newton's Brief an Collins 10. December 1672.

**) Renati Francisci Slusii Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas per circulum et per infinitas hyperbolas, vel ellipses, et per quamlibet exhibitae, ac problematum omnium solidorum effectio per easdem curvas. Accessit pars altera de Analysi, et Miscellanea. Leodii Eburonum 1668. 4.

differentiam laterum, dat partes singulares gradus inferioris ex binomio laterum, ut $\frac{y^3 - x^3}{y - x} = y^2 + yx + x^2$. Legitur hoc apud plerosque et facile ostenditur.

2. Tot sunt partes singulares ex binomio in gradu quolibet, quot unitates habet Exponens dignitatis immediate superioris; tres nimirum in Quadrato, quatuor in Cubo etc. Et hoc vulgo notum.

3. Si quantitas eadem applicatur ad duas alias, quarum ratio data sit, Quotientes erunt reciproce in eadem ratione data. Quod quidem evidens est vel cuilibet Arithmeticae candidato.

His Lemmatibus methodus mea demonstratur: nec multum temporis Tibi erit impendendum, ut demonstrationem ex illis concinnes, cum eo ordine a me disposita sint, qui ad illam quasi manu ducit. Plura scribere me vetat temporis brevitas. Vale, meque ut soles ama.

Die Priorität der Tangentenmethode de Sluze's wurde von Newton anerkannt, wie aus dem folgenden Briefe Collins' an Newton, datirt 18. Juni 1673, hervorgeht. Quod ad Slusii Methodum de Tangentibus spectat, erat ea ab ipso bene intellecta, cum suum de Mesolabio librum edidit. Sed noluit tunc publici juris facere, eo quod nollet Amico suo Angelo Riccio praevenire. Qui tamen postea (declinans ipse studia mathematica) petebat a Slusio ut vellet eam edere. Ille autem, cum non vacaret ea de re fuse scribere, pollicitus est eam D. Oldenburgio transmittere, ut Transactionibus Philosophicis insereretur. Ante vero quam huc appulerit, scribebam ego ad Te, ut intelligerem quid ea de re tu noveris. Tuumque responsum cum D. Oldenburgio communicabam, ut ipse D. Slusio transmitteret. Ut sciat ipse, rem eam esse apud Anglos cognitam, utut forte non tam diu nec tam mature, ut ipsi fuerit. —

Die Tangentenmethode Hudde's ist enthalten in einem Schreiben an van Schooten, datirt 21. November 1659. Das Journal litéraire de La Haye, Juillet et Août 1713, giebt eine Übersetzung derselben aus dem Holländischen. Hudde schreibt: Je me souviens que nous fûmes interrompus dans le temps que j'avois commencé de vous expliquer ma Méthode des Tangentes. Je vais vous décrire toute cette Méthode en peu de mots.

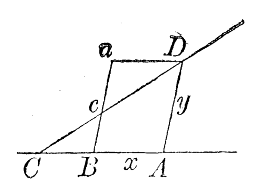
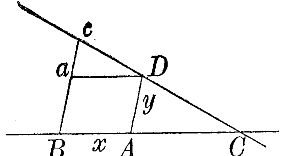


Fig. 1 et 2. Soit D un point dans la courbe, ABC une ligne menée à discretion, B un point pris au hasard dans cette ligne, DA une ligne faisant un angle quel qu'il soit avec la ligne ABC. De plus, soit Bca parallèle à AD et Da parallèle à AB. Enfin, soit BA = x



et AD $= y$. Voici l'opération pour trouver la tangente CD.

Régle générale.

Rangez tous les termes de l'équation qui exprime la nature de la courbe, de manière qu'ils soient $= 0$ et ôtez de cette équation toutes les fractions qui ont x ou y dans leurs diviseurs. Multipliez le terme dans lequel y a le plus de dimensions par un nombre pris à discrétion, ou même par 0, et multipliez le terme dans lequel y a une dimension de moins, par le même nombre diminué d'une unité, et continuez de même à l'égard des autres termes de l'équation. De même multipliez par un nombre pris à volonté ou par 0 le terme où x a le plus de dimensions: le terme où x a une dimension de moins, doit être multiplié par le même nombre moins l'unité, et ainsi des autres. Quand on divise le premier de ces produits par le second, le quotient multiplié par $-x$ est AC. Au contraire, si on divise le second de ces produits par le premier, le quotient multiplié par $-y$ sera $=$ ac.

Exemple.

Soit l'équation qui exprime la nature de la courbe

$$ay^3 + xy^3 + b^2y^2 - x^2y^2 - \frac{x^3}{2a}y^2 * + 2x^4 - 4ab^3 = 0$$

1. Multip. par 1.	$+1.$	$0.$	$0.$	$0.$	$-1.$	$-2.$	$-2.$	ou par une
2. Multip. par 0.	$+1.$	$0.$	$+2.$	$+3.$		$+4.$	$0.$	autre progr.
1. Produit	$ay^3 + xy^3$					$-4x^4$	$+8ab^3$	Arith.

2. Produit $\quad + xy^3 \quad - 2x^2y^2 - \frac{3x^2}{2a}y^2 \quad + 8x^4$

$$\text{par conséq. AC} = \frac{ay^3 + xy^3 - 4x^4 + 8ab^3}{+ xy^3 - 2x^2y^2 - \frac{3x^3}{2a}y^2 + 8x^4} \text{ par } -x$$

$$\text{et} \qquad ac = \frac{+ xy^3 - 2x^2y^2 - \frac{3x^3}{2a}y^2 + 8x^4}{ay^3 + xy^3 - 4x^4 + 8ab^3} \text{ par } -y.$$

On voit par cette méthode:

1. Que de mener une tangente par un point donné dans la courbe n'est qu'un problème simple;

2. Que non seulement on peut trouver un nombre infini de différentes constructions pour mener une tangente, mais qu'on peut même suivre un nombre infini de routes différentes, qui donnent chacune un nombre infini de constructions pour ce problème. C'est ce qui paroît quand on considère que les deux produits qu'on emploie dépendent, chacun en particulier, d'une progression arithmétique prise à volonté:

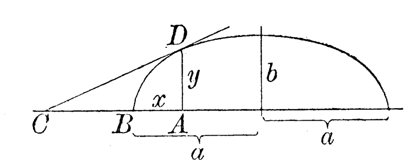
et on voit cette verité encore plus clairement quand on fait réflexion que la ligne AC, le point B et l'angle A peuvent être pris à discrétion. Sans compter combien toutes ces constructions peuvent encore en donner d'autres par l'addition, la soustraction, la multiplication, la division et l'extraction de racine;

3. Pour trouver quelqu'une des constructions les plus simples, il faut employer une progression arithmétique dans laquelle 0 entre, il faut multiplier par 0 le terme qui a le plus de membres, ou qui est le plus difficile à construire. C'est ce qu'on a observé dans l'exemple précédent, lorsqu'on a mis premièrement 0 sous yy, et, en second lieu, sous le terme où x ne se trouve point;

4. Quand dans l'équation y n'est que dans un terme, et que ce terme n'a qu'un seul membre, on peut exprimer AC et ac par une expression dans laquelle y n'entre point; c'est la même chose à l'égard de x. Pour cet effet, il faut multiplier par 0 dans la progression le terme dans lequel y ou x se trouve.

Exemples.

Ellipse.

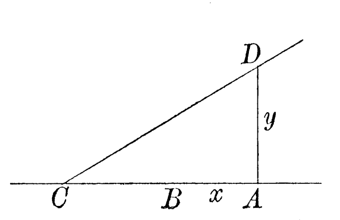


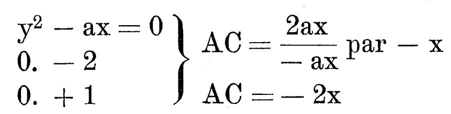
$$
\begin{array}{cccc}
y^2a^2 & * & -2ab^2x & +b^2x^2 = 0 \\
0. & -1. & -2. & -2. \\
0. & 0. & +1 & +2
\end{array}
$$

$$\mathrm{AC} = \frac{+4ab^2x - 2b^2x^2}{-2ab^2x + 2b^2x^2} \text{ par } -x$$

ou bien $\mathrm{AC} = \dfrac{+2a - 1x}{a - 1x}$ par x, c'est à dire $AF - AE = AB - AC$

Parabole.

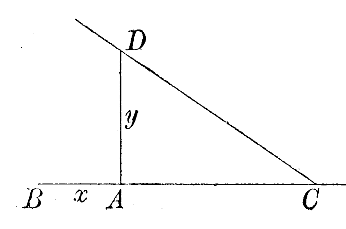




$$
\left.\begin{array}{l}
y^2 - ax = 0 \\
0. \ -2 \\
0. \ +1
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\mathrm{AC} = \dfrac{2ax}{-ax} \text{ par } -x \\
\mathrm{AC} = -2x
\end{array}
$$

On voit dans cet exemple la vérité de la construction générale que le Père Mersenne attribue à M. Fermat, et qui regarde les différentes sortes de Paraboles.

Hyperbole.



$$
\left.\begin{array}{l}
xy - ab = 0 \\
0. -1 \\
0. -1
\end{array}\right\}
\begin{array}{l}
\mathrm{AC} = \dfrac{ab}{ab} \text{ par } -x \\
\mathrm{AC} = -x.
\end{array}
$$

En cinquième lieu. On voit aisément comment on peut trouver sans peine les équations les plus abrégées pour mener,

par un point donné hors d'une courbe, une tangente ou une perpendiculaire à cette courbe.

Je vous prie, Monsieur, que ce que je vous envoie reste secret, et que vous ne disiez pas, même à qui que ce puisse être, qu'on a trouvé rien de semblable. Il faut que mes meilleures inventions ne soient connues que de mes plus intimes amis, ou qu'elles le soient de tout le monde.

XLVII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Epistolam tuam utramque, unam Amstelodami, alteram Hannoverae datam, rite accepi. Procrastinavi hactenus ad Te scribere, quod nollem ea periclitari, quae ad te transmittenda mihi suppetuut, quorum e numero literae sunt Newtonianae, non minus argumento graves quam scripto prolixae. Si quidem intellexero, prodromum hunc ad te recte delatum esse (quem sub Dni. Scroteri involucro expedio) fidentius, quae penes me sunt, curare ad te potero. Qnantocius igitur si placet, rescribas, nec ulla utaris inscriptione alia, quam ad Grubendolium, ut nosti, quoties scil. per tabellionem ordinarium me invisis.

Quid causae sit, quod Spinosae non tradidisti literas meas, divinare equidem non possum. Quas velis demonstrationes Metaphysicas, quae a te lectae et examinatae in literis tuis Amstelodamensibus dicuntur, non intelligo, cum earum Authorem subticueris.

Dnus. Balduinus, Saxo Dresdensis, dono nuper misit Regi nostro, ceu Fundatori Soc. Regiae, nec non ipsi Societati, Phosphorum suum, qui soli vel candelae expositus, lucem ita imbibit, ut eam in tenebris reddat. Experimentum tum in Aula nostra, tum apud Societatem Regiam peractum, felicissime successit, induxitque coetum illum Philosophicum, ut Inventorem in Sociorum suorum altum cooptaverit. Fama fert, Kunckelium quendam invenisse aliud quoddam Phosphori genus, quem Noctilucam appellat, qui non modo prioris ad instar in obscuro lucet, sed et per vices fulgurat, et vim urendi inextinguibilem habet. Dissertationem de eo edidit Kirchmayerus, Professor Witenbergenis, quam vidimus, sed cui vix fidem adhibemns, cum manus nostrae in rebus Physicis oculatae sint, nec nisi quod viderint, credant. Tu, si quid hujus

rei inaudiveris, quid veri subesse putes, significare ne graveris, oro. Postquam hisce responderis, fasciculum satis tumentem accipies, qui hujus brevitatem levitatemque et prolixitate et momento compensabit. Vale et a Dom. Boylio, qui te valde amat, plurimum salve. Dabam Londini d. 22 Febr. 1677.

Aquae Rabelii vulnerariae fama adhuc integra est. Illa quam vobis oblatam esse scribis, ex eadem forte materia parata est.

Mons. Scroter dit, que dans peu de temps il ira en Allemagne, et qu'il verra Hannover. Ditez donc, s'il vous plait, si ie dois bailler la grande lettre de Newton, et le reste, que i'ay pour vous.

XLVIII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek in Hannover.

Rumpo tandem moram, quam ex eo nexui, quod verebar, epistolam Newtonianam hic inclusam et mihi inscriptam, extra periculi aleam non esse, si per tabellionem ordinarium transmitteretur. Nunc demum occasio se obtulit, eam cum reculis quibusdam Schroederianis, quae navi Anglica Hamburgum, atque inde per ministrum Hanoveranum Hanoveram curandae sunt, transmittendi. Solenniter promisit Guilielmus Schroederus, se parem hujus fasciculi cum suismet rebus curam habiturum. Quamprimum ad manus tuas pervenerit, certiorem me fieri de eo velim, responsionem tuam Amstelodamo vel Antverpia Londinum mittendo, eamque ut soles ad Grubendolium, citra ullum alium titulum, inscribendo. Mitto tibi apographum literarum Newtoni, autographum ad memet directum mihi reservans. Tanta id ipsum cura relegi, quantam occupationes meae confertissimae patiebantur. Ad alia nunc distrahitur Newtonus ab iis, qui Leodii, Francisco Lino succenturiati, novam ipsius de Lumine et coloribus Theoriam vehementer insectantur: qua de re brevi plura accipies, ni rationes meas male subduxi. Nihil hac vice de Collinio apud te commemoro, quum Te omnino satiatum iri pro tempore prolixa hac Newtoni epistola autumem. Nec de aliis a te quaesitis fusius nunc agam, cum id alii scriptioni reservaverim, quam forte laudatus Schroeterus ipse, intra paucas septimanas Hannovera transiturus, secum feret. Verbo duntaxat innuam, Ignivorum

Anglum, Parisiis nunc commemorantem, certo quodam medicamento os et viscera sua munire, cujus virtute retusa, medicinam suam iterare toties quoties debet. Bondii de longitudine Tractatus tanti nominis mensuram haud implet. De Tschirnhusio nihil omnino accepi, ex quo Lutetia Parisiorum discessit. Gaudeo, in re telescopica laborare Goltinium. Quas lentes, a Parisiensi Borellio elaboratas, exploravimus, sic satis probamus. Multa et ingentia nobis promittuntur a Germanis quibusdam circa Phosphoros et Noctilucas, nec spes deest, quin fidem datam, saltem quoad rei summam, sint liberaturi. Nuper in Soc. Regiam cooptavimus Dn. Balduinum, qui Phosphori sui specimen pulcherrimum, thecae deauratae inclusum, Serenissimo Regi nostro, ceu Soc. Regiae Fundatori, nec non Societati ipsi, dono transmiserat, insigni effectu conspicuum.

Illustris Boylius et doctissimus Collinius plurimam tibi salutem dicunt. Prior semper aliquid molitur novi, et jam imprimis circa Poros et Figuras corporum occupatum se videt. Posterior brevi ad te nonnulla scribet, quae forte non displicebunt.

Fere memoria exciderat, me nuper vidisse et appendisse magnetem parvulum, qui cum nonnisi 13 grana penderet, suummet pondus centies et quadragesies novies me coram sustinere potuit. Thesauro quovis hunc lapillum preciosiorem censeo.

Vale et Tui studiosissimum amare perge. Dabam Londini d. 2. Maji 1677.

P. S.

Non obstante tam enormi prolixitate petiit Dn. Collinius, ut sequentia haec prioribus subjicerem, nempe:

1. Non nisi post sex mensium lapsum secundum Volumen Algebraicum Dni. Kersy praelo commissum iri: sperare se proinde, Clarissimi Freniclii opus interea proditurum, quod suppeditaturum nobis credit complures breves intermediatasque responsiones in istis inventi novi Fermatiani Problematibus: quod ipsum licet et hic praestitum a viro quodam docto fuerit, non tamen ipse nos hactenus edocuit, qua methodo. Addit, nos percipere, Fermatum, Wallisium et Kersium, omnes (consiliis haud communicatis) in idem Theorema incidisse, dividendi sc. summam duorum Cuborum in duos Cubos, neminem vero eorum posse beneficio ejus invenire parvos illos numeros, quos Dn. Freniclius nobis dedit in quadam epistola sua in Wallisii Commercio Epistolico.

2. Narrationi illi de Constructione ad dividendum Aequationem Biquadraticam in duas Quadraticas, subjungit idem Collinius: Hoc praestari citra opem Aequationis Cubicae, quando Biquadratica aequatio

sit per multiplicationem duorum quadraticorum: Subtilitatem consistere ait in determinando, quando id fieri possit absque ope Aequationis ejusmodi Cubicae, et quando non item.

3. Ad Cartesii solutionem Problematis Pappi ait idem Virum quendam doctum in Operatione sive Processu Problematis, semper eam continebat intra duas Aequationes quadraticas, quae multiplicatae per se invicem producebant Aequationem illam biquadraticam, quae solvebat Problema, poteratque dividi in duas Aequationes Quadraticas citra opem Cubicae.

Jungo hic summam eorum, quae destinantur secundo volumini Algebraico, quod meditantur Angli lingua vernacula, eamque mitto Anglice, prout acceperam ab amico satis compertum habens, Te linguam hanc satis callere ad haec intelligendum.

Vale iterum atque iterum etc.

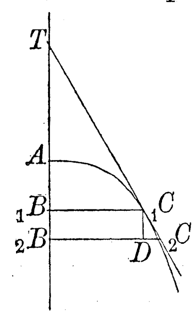
XLIX.

Leibniz an Oldenburg.

Nach dem Manuscript in der Königl. Bibliothek in Hannover.

Accepi hodie literas tuas diu expectatas cum inclusis Newtonianis sane pulcherrimis, quas plus semel legam cum cura ac meditatione, quibus certe non minus dignae sunt quam indigent. Nunc pauca quae festinante oculo obeunti incidere e vestigio annotabo.

Egregie placet quod descripsit, qua via in nonnulla sua elegantia sane Theoremata inciderit, et quae de Wallisianis Interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hac ratione obtinetur harum Interpolationum Demonstratio, cum res antea (quod sciam) sola Inductione niteretur, tametsi pars eorum per Tangentes sit demonstrata.



Cl. Slusii methodum Tangentium nondum esse absolutam Celeberrimo Newtono assentior. Et jam a multo tempore rem Tangentium longe generalius tractavi, scilicet per Differentias Ordinatarum. Nempe T_1B (intervallum Tangentis ab Ordinata in Axe sumtum) est ad ${}_1B_1C$ Ordinatam, ut ${}_1CD$ (differentia duarum Abscissarum A_1B, A_2B) ad D_2C (differentiam duarum Ordinatarum ${}_1B_1C$, ${}_2B_2C$). Nec refert quem angulum faciant Ordinatae ad Axem. Unde patet, nihil aliud esse

invenire Tangentes, quam invenire Differentias Ordinatarum, positis differentiis Abscissarum (seu ${}_1B_2B \sqcap {}_1C_2D$), si placet, aequalibus. Hinc nominando imposterum $\overline{dy}$ differentiam duarum proximarum y (nempe A_1B et A_2B) et $\overline{dx}$ seu D_2C differentiam duarum proximarum x (prioris ${}_1B_1C$, posterioris ${}_2B_2C$) patet $\overline{dy^2}$ esse $2y\overline{dy}$ et $\overline{dy^3}$ esse $3y^2\overline{dy}$ etc. et ita porro. Nam sint duae proximae sibi (id est differentiam habentes infinite parvam) scilicet A_1B y et A_2B $y + \overline{dy}$. Quoniam ponimus $\overline{dy^2}$ esse differentiam quadratorum ab his duabus rectis, Aequatio erit $\overline{dy^2} \sqcap y^2 + 2y\overline{dy} + \overline{dy}|^2 - y^2$, seu omissis $y^2 - y^2$, quae se destruunt, item omisso quadrato quantitatis infinite parvae (ob rationes ex methodo de Maximis et Minimis notas) erit $\overline{dy^2} \sqcap 2y\overline{dy}$. Idemque est de caeteris potentiis. Hinc etiam haberi possunt differentiae quantitatnm ex diversis indefinitis in se invicem ductis factarum ut $\overline{dyx}$ erit $\sqcap y\overline{dx} + x\overline{dy}$ et $\overline{dy^2x} \sqcap 2xy\overline{dy} + y^2\overline{dx}$. Hinc si sit aequatio $a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2$ etc. $\sqcap 0$, statim habetur Tangens Curvae, ad quam est ista Aequatio. Nam ponendo $A_1B \sqcap y$ et $A_2B \sqcap y \mp \overline{dy}$ (scilicet quia ${}_1B_2B$ seu ${}_1CD \sqcap \overline{dy}$) itemque ponendo ${}_1B_1C \sqcap x$ et ${}_2B_2C \sqcap x + \overline{dx}$ (scilicet quia ${}_2CD \sqcap \overline{dx}$) et quia eadem aequatio exprimit quoque relationem inter A_2B et ${}_2B_2C$, quae eam exprimebat inter A_1B et ${}_1B_1C$, tunc in aequatione illa pro y et x substituendo $y + \overline{dy}$ et $x + \overline{dx}$ fiet:

$$\left.\begin{array}{l}
a + by + cx + dyx + ey^2 + fx^2 + gy^2x + hyx^2 \text{ etc.} \\
\hline
+ b\overline{dy} + c\overline{dx} + dy\overline{dx} + 2ey\overline{dy} + 2fx\overline{dx} + 2gxy\overline{dy} + 2hxy\overline{dx} \text{ etc.} \\
\qquad + dx\overline{dy} \qquad + gy^2\overline{dx} + hx^2\overline{dy} \text{ etc.} \\
\hline
+ d\overline{dx}\,\overline{dy} + e\overline{dy}|^2 + f\overline{dx}|^2 + g\overline{dy}|^2x + h\overline{dx}|^2y \\
\qquad + 2gy\overline{dy}\,\overline{dx} + 2hx\overline{dx}\,\overline{dy} \text{ etc.} \\
\qquad + g\overline{dx}\,\overline{dy}|^2 + h\overline{dy}\,\overline{dx}|^2
\end{array}\right\} \sqcap 0$$

ubi abjectis illis quae sunt supra primam lineam, quippe nihilo aequalibus per aequationem praecedentem, et abjectis illis quae sunt infra secundam, quia in illis duae indefinite parvae in se invicem ducuntur, hinc restabit tantum aequatio haec: $\begin{array}{l} b\overline{dy} + c\overline{dx} + dy\overline{dx} \\ \qquad\qquad dx\overline{dy} \end{array}$ etc. $\sqcap 0$, quicquid scilicet reperitur inter lineam primam et secundam. Et mutata aequatione in rationem seu analogiam, fiet

$$\frac{-\overline{dy}}{\overline{dx}} \sqcap \frac{c + dy + 2fx + gy^2 + 2hxy \text{ etc.}}{b + dx + 2cy + 2gxy + hx^2 \text{ etc.}}$$ id est $\left(\text{quia } \frac{-\overline{dy}}{\overline{dx}} \text{ seu } \frac{-{}_1B_2B \text{ seu } -{}_1CD}{D_2C} \sqcap \frac{-T_1B}{{}_1B_1C}\right)$ erit $\frac{c + dy \text{ etc.}}{b + dx \text{ etc.}} \sqcap \frac{-T_1B}{{}_1B_1C}$. Quod coincidit cum Regula Slusiana ostenditque eam statim occurrere hanc methodum intelligenti.

Sed methodus ipsa (priore) nostra longe est amplior. Non tantum enim adhiberi potest, cum plures sunt liberae indeterminatae quam y

et x (quod saepe fit maximo cum fructu) sed et tunc utilis est, cum interveniunt irrationales, quippe quae eam nullo morantur modo, neque ullo modo necesse est irrationales tolli, quod in methodo Slusii necesse est, et calculi difficultatem in immensum auget. Quod ut appareat, tantum utile erit in irrationalitatibus simplicioribus rem explanare. Et primum sit in simplicissimis generaliter. Si sit aliqua potentia, ut radix x^z, erit $d\overline{x^z} \sqcap z\overline{x}|^{z-1}\, d\overline{x}$. Si z sit $\frac{1}{2}$ seu si x^z sit $\sqrt[2]{x}$, erit $d\overline{x^z}$ seu hoc loco $d\overline{\sqrt[2]{x}} \sqcap \frac{1}{2}\, x^{-\frac{1}{2}}\, d\overline{x}$ seu $\frac{d\overline{x}}{2\sqrt{x}}$, ut notum aut facile demonstrabile. Sit jam Binomium, ut $\sqrt[3]{a + by + cy^2}$ etc., quaeritur $d\overline{\sqrt[3]{a + by + cy^2}}$, seu $d\overline{x^z}$ posito $\frac{1}{3} \sqcap z$, et $a + by + cy^2$ etc. $\sqcap$ x. Est autem $d\overline{x} \sqcap bd\overline{y} + 2cyd\overline{y}$ etc. Ergo $d\overline{x^z}$ seu $\frac{d\overline{x}}{3x^{\frac{2}{3}}}$ erit $\sqcap \frac{bd\overline{y} + 2cy\,d\overline{y} \text{ etc.}}{3 \times \overline{a + by + cy}|^{\frac{2}{3}}}$. Eadem methodus adhiberi potest, etsi Radices iu Radicibus implicentur. Hinc si detur aequatio valde intricata, ut $a + bx \sqrt[2]{y^2 + b\sqrt[3]{1 + y}} + hyx^2 \sqrt[3]{y^2 + y\sqrt[2]{1 - y}} \sqcap 0$ ad aliquam Curvam, cujus Abscissa sit y, AB, ordinata x, BC, tunc Aequatio proveniens, utilis ad inveniendam Tangentem TB, statim sine calculo scribi poterit, et haec erit

$$bd\overline{x}\ \sqrt[2]{y^2 + b\sqrt[3]{1 + y}}$$

$$+ \frac{bx}{2\sqrt[2]{y^2 + b\sqrt[3]{1 + y}}} \frown \overline{\overline{2yd\overline{y} + \frac{bd\overline{y}}{3 \times \overline{1 + y}|^{\frac{2}{3}}}}}\ d^{-}$$

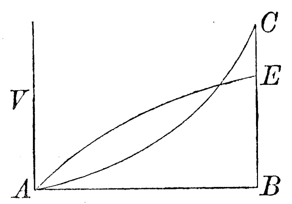
$$+ \frac{hyx^2}{2\sqrt[2]{y^2 + y\sqrt{1 - y}}} \frown \overline{2yd\overline{y} + d\overline{y}\,\sqrt[2]{1 - y} + \frac{y \frown -dy}{2\sqrt[2]{1 - y}}}$$

$$\begin{matrix} + 2hxyd\overline{x} \\ + hx^2 d\overline{y} \end{matrix} \frown \sqrt[2]{y^2 + y\sqrt{1 - y}} \sqcap 0$$

seu mutando Quotientem hanc inventam in Analogiam, erit $\frac{-d\overline{y}}{ad\ d\overline{x}}$ id est $\frac{-T_1B}{ad_1B_1C}$ ut omnes provenientis aequationis termini per $d\overline{x}$ multiplicati, ad omnes ejusdem terminos per $d\overline{y}$ multiplicatos. Ubi sane mirum et maxime commodum evenit, quod $d\overline{y}$ et $d\overline{x}$ semper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem Slusiana omnes ordine irratio-

nales tollendas esse nemo non videt. Arbitror quae celare voluit Neutonus de Tangentibns ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento quadraturas quoque reddi faciliores, me in ea sententia confirmat; nimirum semper figurae illae sunt quadrabiles quae sunt ad Aequationem differentialem. Aequationem Differentialem voco talem qua valor ipsius $d\bar{x}$ exprimitur, quaeque ex alia derivata est, qua valor ipsius x exprimebatur. Exempli causa, sit AB ⊓ y, EB ⊓ ω, ponatur

$$\omega \sqcap \frac{b + cy + dy^2 + cy^3 \text{ etc.}}{z\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \frac{e}{4}y^4 \text{etc.}}}$$

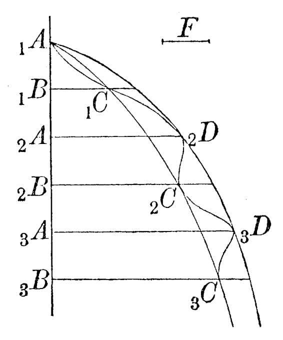


quaeritur Quadratura figurae ABEA (quamquam forte saepe tale Trilineum non sit proditurum, quale hoc schemate depinximus, sed curva habitura asymptoton). Describatur alia curva AC, talis ut BC sit

$\sqrt[z]{1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \frac{e}{4}y^4 \text{etc.}}$ et Rectangulum sub recta AV repraesentante Unitatem constructionis, et sub ordinata nova BC aequabitur figurae ABEA. Ejusmodi Theoremata condi possunt infinita, imo pleraque sub generalissimis quibusdam complecti licet. etc. significat nihil referre sive hae series producantur sive ubilibet finiantur. Unde patet hanc unicam Regulam pro infinitis figuris quadrandis servire, diversae plane naturae ab iis quae hactenus quadrari solebant.

Pulcherrimae sunt illae series Neutonianae, quae ex Infinitis in finitas degenerant, qualis illa est, quam exhibet pro Extractione Radicum binomii, aut ejus Quadratura. Quod si id in generali illa Aequationis Affectae indefinitae Extractione, cum sit $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc. et y fit: $\frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^3}$ etc. vel $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4}$ etc. idem praestari posset, ut scilicet liceret inter extrahendum radices ex aequationibus vel binomiis invenire radices rationales finitas, quando eae insunt, vel etiam irrationales; tunc dicerem Methodum Serierum infinitarum ad summam perfectionem esse productam. Opus esset tamen praeterea discerni posse varias aequationis ejusdem Radices; item necesse esset ope Serierum discerni aequationes Possibiles ab Impossibilibus. Quod si haec nobis obtinuerit Vir in his studiis maximus, atque effecerit, scilicet ut possimus Seriem Infinitam convertere in Finitam, quando id fieri potest, aut saltem agnoscere ex quanam finita sit deducta, tunc in methodo Serierum Infinitarum quae Divisione atque Extractione inveniuntur, vix quicquam amplius optandum restabit. Haec si quisquam mortalium, certe Neutonus praestare poterit. Eadem credo opera efficietur, ut ex mul-

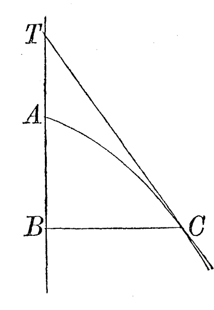
tis Seriebus Infinitis possimus deligere maxime naturales, quales haud dubie illae erunt, quae ita erunt comparatae, ut cum fieri potest, atque opus est, degenerent iu Finitas. Atque ita egregie apparebit Methodum Extractionum per Series Infinitas, minime Indirectam, sed maxime Naturalem esse. Problema est perelegans, cujus meminit, Curvam describere, quae per data quaecunque transeat Puncta. Huddenins mihi Amstelodami dixit, posse se Curvam describere Analyticam seu certa Aequatione uniformi constantem, quae faciei hominis cujusdam noti lineamenta designet. Caeterum quaerendum est, an hoc Neutonus intelligat de Punctis Infinitis, ut si sit Axis $A_1B_2A_2B_3A$ etc. in infinitum productus, et duae datae curvac infinitae Analyticae, una $A_1C_2C_3C$ etc. altera A_2D_3D etc. Si ponamus A_1B, $_1B_2A$, $_2A_2B$, $_2B_3A$ etc. inter se et datae cuidam quantitati F aequales, quaeritur an dari possit Curva Analytica seu Aequationis capax, quae in infinitum producta transeat (alternis) per puncta $_1C$, $_2D$, $_2C$, $_3D$, $_3C$ etc. Fermatius alicubi scribit se Methodum habere per quam Curva inveniri possit, cujus proprietas specifica data non pertineat ad Unum Punctum, ut vulgo fit, cum Ordinatae referuntur ad partes Axis, sed ad Duo quaelibet simul, vel etiam ad Tria quaelibet simul etc.



Quae de variis Seriebus suis ac nostris examinandis atque inter se comparandis dicit Clarissimus Neutonus, in ea me immergere non audeo, antequam in gratiam cum Analysi rediero, nam harum rerum vestigia in animo meo prope nunc obliterata sunt. Agnosco interim pulcherrima et utilissima ab eo annotari. Elegantissima et minime expectata est via, qua seriem meam $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$ etc. deducit ex sua.

Quod ait, Problemata Methodi Tangentium inversae esse in potestate, hoc arbitror ab eo intelligi per Series scilicet Infinitas. Sed a me ita desiderantur, ut Curvae exhibeantur Geometrice, quatenus id fieri potest, suppositis (minimum) quadraturis. Exempli causa cycloidem deprehendit Hugenius sui ipsius Evolutione describi; difficile autem fuisset, credo, solvere hoc Problema: Invenire Curvam, quae sui ipsius Evolutione describitur. Nec refert quod istius curvae descriptio quadraturam Circuli supponit. Et hoc Problema etiam ex eorum est numero, quae voco Methodi Tangentium Inversae. Ita inter Methodos Tangentium Inversas Generales est, Invenire Curvam Analyticam cujus Longitudines sint Areis datae Figurae, curva Analytica comprehensae, proportionales (contrarium enim dudum possumus.)

Quod Problema arbitror non esse Insolubile, et videtur non contemnendum, facilius enim est Lineam quam Spatium organice metiri. Et reducta Spatiorum dimensione ad dimensionem Linearum, solis Filis in rectum extensis Mechanica fieri poterit constructio; et Spatia poterunt in data ratione secari instar Linearum rectarum. Cum ait Neutonus, inventionem Curvae, quando Tangens vel Intervallum Tangentis et Ordinatae in Axe sumtum est recta constans, non indigere his Methodis, innuit credo se intelligere Methodum Tangentium Inversam generalem in potestate esse per Methodos Serierum Appropinquativas; in hoc vero casu speciali non opus esse Seriebus. Ego vero Methodum quaerebam quae accurate Curvam quaesitam exhibeat (saltem ex suppositis Quadraturis) et cujus ope ejus Aequationem si quam habet, aut aliam primariam proprietatem possumus invenire. Quod ait Problemata, in quibus datur relatio inter duo latera Trianguli TBC, semper posse solvi,*) id verum est, at ex meis quoque artibus fluit, ac saepe ne quadraturis quidem accitis, simplici Analytica Aequatione praestari potest. Ut si BC posita x, sit TB $\sqcap$ $bx + cx^2 + dx^3$, quaeraturque qualisnam sit haec Curva quae hanc tangentium habet proprietatem, id est quaenam sit Aequatio relationem exprimens inter AB seu y et BC seu x, ajo eam fore $y \sqcap bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} \ldots$



Si fuisset TB $\sqcap$ $a + bx + cx^2 + \ldots.$, opus fuisset Quadratura Hyperbolae ad inveniendam Curvam quaesitam. Generaliter autem quomodocunque datur relatio inter duo ex lateribus hujus Trianguli, quod ego Characteristicum (ob crebros usus) vocare soleo, semper suppositis Quadraturis Figurarum Analyticarum haberi potest Curva quaesita. Quod tamen nescio an praeter Neutonium praestiturus sit quisquam. Mea methodo res unius lineolae calculo peragitur ac demonstratur. Sed et infinitis casibus rem praestare possum, tametsi ipsa y ingrediatur in ipsius TB expressionem, ut si sit TB $\sqcap$ $bx + cx^2 + dx^3 + \ldots - y$**),

*) In dem vorhandenen Entwurfe hatte Leibniz hier geschrieben: ut si sit TB $\sqcap$ $a + bx + cx^2$, seu $\frac{\overline{dy}}{dx} \sqcap \frac{a + bx + cx^2}{x}$ etc. id verum est, nam posita $\overline{dx}$ constante quod a nobis pendet, fiet $y \sqcap \int \overline{\frac{a + bx + cx^2}{x}}$ seu $\int \frac{a}{x} + bx + \frac{cx^2}{3}$ etc. Diese, wie die folgenden Stellen, wo Leibniz Integralrechnung anwendet, hat er eingeschlossen, wahrscheinlich zum Zeichen, daß sie in der Abschrift des Briefes auszulassen wären. Offenbar wollte er Newton in seine Bezeichnungsweise nicht einweihen.

**) Muß vielleicht heißen: TB $\sqcap$ $b + cx + dx^2 + \ldots - y$.

fiet Aequatio Curvae $yx \sqcap bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3} + \ldots$ *) Itaque si habeatur valor ipsius TA ex BC, haberi poterit Curva.**)

Quod vero addit Clarissimus Neutonus, non aeque rem procedere, si detur relatio ipsius TB ad partem Axis seu ad AB vel y, ad hoc respondeo, mihi aeque facile esse invenire Curvae naturam vel aequationem, si detur relatio ipsius TB ad AB, quam si, ut ipse requirit, detur relatio ad BC. Generalem vero Methodum Tangentium Inversam nondum quod sciam habemus.

Sunt et alia Problematum genera, quae hactenus in potestate non habeo, quorum ecce Exempla: Sint duae aequationes $x^y + y^x \sqcap xy$ et $x^x + y^y \sqcap x + y$; duae sunt Incognitae x, y, duaeque ad eas inveniendas Aequationes; quaeritur valor tam unius quam alterius literae. Talia Problemata vel in Numeris vel in Lineis solvere difficillimum arbitror; si tamen de Appropinquationibus agatur, puto posse iis satisfieri. Si quam huic difficultati lucem afferre potest Neutonus, pro ea qua pollet ingenii vi, multum Analysin promovebit. Analysis quoque Diophantea seu solutio Problematum in Numeris Rationalibus nondum perfectionem nacta videtur.

Haec annotavi festinans atque inter legendum; ad reliqua majore otio opus est. Interea Celeberrimum Neutonum quaeso officiosissime a me soluta, et post actas maximas gratias eum roga, ut communicet continuationem harum Serierum, nempe posita $z \sqcap ay + bz^2 + cy^3 + dy^4$ etc. ait fore $y \sqcap \frac{z}{a} - b\frac{z^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$ etc. vel [si sit $z \sqcap ay + by^3$

---

*) Wie oben steht hier: quia $\int \overline{x\overline{dy} + y\overline{dx}} \sqcap yx$.

**) Wie oben steht hier: si $\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} \sqcap \frac{a + by + cy^2 + dy^3 \text{ etc.}}{x}$ fiet $x\overline{dy} \sqcap a\overline{dx} + by\overline{dx} + cy^2\overline{dx}$; scribamus $x\overline{dy} + y\overline{dx} \sqcap a\overline{dx} + by\overline{dx} + cy^2\overline{dx}$, fiet $xy \sqcap \frac{x}{+ 1y\overline{dx}} + \int \frac{\overline{by\overline{dx} + cy^2\overline{dx}}}{1y\overline{dx}}$, $\frac{\overline{dx}}{x} \sqcap \frac{1}{a + by + cy^2 + dy^3}\overline{dy}$, posito $\overline{dy} \sqcap 1$ seu y arithmetice progredientibus fiet $\overline{dx}\frac{1}{x} \sqcap \frac{1}{a + by + cy^2 + dy^3}\overline{dy}$ seu arca Hyperbol. $\sqcap \int \overline{\frac{1}{a + by \text{ etc.}}}$. Hinc ergo quandocunque valor ipsius TB habetur ex data AB sola, problema semper solubile: $\frac{\overline{dy}}{\overline{dx}} \sqcap \frac{by \sqcap BT}{x \sqcap BC}$. Ergo $\frac{1}{by}\overline{dy} \sqcap \frac{1}{x}\overline{dx}$, ubi mirabile est, duabus quadraturis Hyperbolicis hoc loco solvendam esse rem aliunde manifestam, est enim aequatio ad aliquam paraboloidum, scilicet si $b \sqcap 1$, fiet $y \sqcap x$, generaliter autem fiet $y \sqcap x^b$, si $\frac{1}{by}\overline{dy} \sqcap \frac{1}{x}\overline{dx}$.

$+ cy^5 + \text{etc.}]\ y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5$ etc. Et si qua alia in promtu habet Theoremata nonnihil generalia, quoniam ad Calculum contrahendum plurimum serviunt. Quod si eorum Originem sive Demonstrationem addet, tanto magis obligabit. Velim etiam nosse an per extractiones in seriebus discernere possit Aequationes Possibiles ab Impossibilibus, nam si generalis ejusmodi extractio procederet, sequeretur nullam Aequationem fore Impossibilem. Item, quomodo inveniat diversas ejusdem aequationis Radices, ita ut ex pluribus radicibus eam possit invenire quam quaerimus, item an tales habeat Series quarum ope extrahendo aequationis radices inveniantur valores Finiti quando tales insunt. Denique quid sentiat de Resolutione Aequationum, quales paulo ante posui, ut $x^y + y^x \sqcap xy$, et $x^x + y^y \sqcap x + y$, ubi scilicet Incognita ingreditur in Exponentem. Oblitus eram dicere, pulchram mihi videri Cissoidis extensionem in Rectam quam Neutonus invenit, ex supposita Quadratura Hyperbolae; ego mihi videor eodem modo etiam metiri posse Curvam Hyperbolae Aequilaterae, sed nondum omnis, neque Curvam Ellipseos, quantum memini.

Antequam finiam, adjiciam usum pulcherrimum Serierum, qui imprimis Collinio nostro non erit ingratus. Scis magnam esse difficultatem circa extrahendas Radices ex Binomiis Cubicis, quando eas ingreditur quantitas imaginaria orta ex Radice Quadratica Negativae quantitatis ut $\underbrace{\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}}_{M} + \underbrace{\sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}}}_{N}$, ubi utraque quantitas M et N est singulatim impossibilis, summa autem ut alibi ostendi, est quantitas possibilis et realis, aequalis cuidam quaesitae z. Ut vero ea eruatur et ut extrahatur Radix, nempe ut inveniatur $\frac{z}{2} + e\sqrt[2]{-b^2} \sqcap \sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}$ et $\frac{z}{2} - e\sqrt[2]{-b^2} \sqcap \sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}}$ (unde fit $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}} + \sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}} \sqcap z$) non potest adhiberi methodus Schotenii Geometriae Cartesianae subjecta, quia opus est ad eam, ut valor ipsius $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}$ exhibeatur saltem approximando, quod notis methodis impossibile est. Quis enim valorem ipsius $\sqrt[2]{-b^2}$ prope verum dabit? necesse est enim invenire $b\sqrt{-1}$. Quis autem exprimet $\sqrt{-1}$ appropinquando? Scripsi olim Collinio me remedium invenisse, quod etiam ad omnes gradus superiores valeat. Id ecce hic uno verbo. Ex binomio $\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{-b^2}}$ extraho Radicem per Seriem Infinitam,

sive per Theorema Neutonianum, sive etiam more meo priore, instituendo calculum secundum naturam cujusque gradus, cum scilicet nondum Theorema generale abstraxissem: quae radix ponatur esse $1 + m\sqrt{-b^2} + n + p\sqrt{-b^2}$ etc. Extrahatur jam et radix ex binomio altero $\sqrt[3]{a - \sqrt[2]{-b^2}}$; fiet illa $+ 1 - m\sqrt{-b^2} + n - p\sqrt{-b^2}$ etc. ut facile demonstrari potest ex calculo. Ergo addendo haec duo extracta destruuntur Imaginariae quantitates, et fiet $z \sqcap 2l - 2n$ etc. Quae sunt eae seriei portiones in quibus nulla reperitur imaginaria. Invento ergo Valore ipsius z quantum satis est propinquo, quemadmodum Schotenius postulat, reliqua Methodo Schoteniana, perinde ac in aliis binomiorum extrahendorum generibus transigentur.

21. Junii 1677.

L.

Leibniz an Oldenburg.

Nach dem Manuscript in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Nuperas meas credo acceperis. Nunc istas mature summitto, ne facilitate Dn. Newtoni abutamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quaedam suae Epistolae loca explicaret, nempe, quomodo invenisset Theoremata, quod posito $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc. fit $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5} z^3$, vel [si sit $z \sqcap ay + by^3 + cy^5$ etc.] erit $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5$ etc. Nunc vero, relectis ejus literis, video id facile non tantum ex ejus Extractionibus derivari, sed et altera illa methodo sub finem literarum ejus exposita inveniri, qua me quoque aliquando usum in veteribus meis schedis reperio, sed cum in exemplo, quod forte in manus meas sumpseram, nihil prodiisset elegans, solita impatientia eam porro adhibere neglexisse.

Difficultatem moveram in praecedentibus literis circa Aequationes Impossibiles, quarum Radices Possibiles videntur inveniri per series Infinitas. Necdum vero illa sublata est, et meretur res excuti diligentius.

Illud tamen video, si in Aequatione data $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ etc, literae z et y sint indeterminatae, tunc Aequationem semper esse Possi-

bilem: sed si z esset determinata, rursusque in ipsis a vel b etc. lateret Aequatio, posset esse Impossibilis, et tamen per seriem generalem aliqua prodire videretur Radix possibilis. Cujus difficultatis solutionem, re diligenter expensa, reperiri posse arbitror: sed nunc in ista accuratius inquirere non licet. Meretur autem explicari, tum quomodo ex seriebus agnosci possit, aequationes esse Impossibiles (quanquam id alias satis facile inveniatur), tum quomodo dignoscantur diversae Radices.

Praeter ea quae in superiore Epistola notavi, scilicet Methodum Tangentium Inversam et Geometricam (saltem suppositis Curvarum Analyticarum quadraturis) et alia id genus, deest nobis circa quadraturas, ut scire certe possimus, annon quadratura figurae alicujus propositae reducatur ad quadraturam Circuli aut Hyperbolae. Nam pleraeque figurae, hactenus tractatae, ope alterutrius quadrari potuerunt. Quod si demonstrari potest (ut arbitror) quasdam figuras non esse quadrabiles nec per Circulum nec per Hyperbolam, restat ut alias quasdam figuras primarias altiores constituamus, ad quarum quadraturam reducantur caeterae omnes, quando id fieri potest. Hoc quamdiu non fit, haeremus; et saepe per Seriem Infinitam particularem quaerimus, quod ad Circuli aut Hyperbolae aut aliam notioris figurae quadraturam reduci poterat.

Crediderat Gregorius, dimensionem Curvarum Hyperbolae et Ellipseos non pendere a quadratura Circuli aut Hyperbolae. Ego vero reperi aliquam speciem curvae Hyperbolicae, quam ex data ipsius Hyperbolae quadratura metiri possum. De caeteris nondum mihi liquet.

Hannoverae 12. Julii 1677.

LI.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Scripsi ad Te die 2. Maji novissimi, literisque meis inserui Apographum prolixae satis epistolae a Cl. Newtono ad me datae, et fasciculum hunc Dno. Schrotero commisi, qui sancte pollicebatur, se eum, una cum reculis quibusdam suis, Hamburgum indeque Hannoveram transmittendis, fideliter ad Te curaturum. Spero, eum fidem datam liberasse, istumque adeo thesaurum Newtonianum (sic mihi eximium illud scriptum vocare fas sit) ad manus tuas rite pervenisse. Nunc

mitto tibi per Sambinum, Heidelbergam contendentem, non modo jactatum, spem tamen fallens, Bondii Inventum de Longitudine, sed et Tractatum Andersonii de Tormentorum bellicorum Usu et Effectis, exspectatione quoque nostra multum inferiorem. Comitatur hos libros libellus Darii, compendifactus, de Foenore tum simplici tum composito, una cum Appendice, quae Aequationum affectarum solutionem in numeris, per approximationem, Logarithmorum beneficio praestandam docere satagit. Haec omnia Tibi mitto Collinii nostri nomine, qui una mecum virtutem et doctrinam tuam in magno ponit pretio. Adjeci epistolam Anglice scriptam, quae Experimenta quaedam continet, curate a nostratibus pronuper sumpta, quaeque forte ad Projectilium Theoriam rite condendam non parum conferre poterunt.

Quoad Vernicem, quam a Collinio descriptam desideras, ait ille, parandae ejus modum in Evelini nostri Sylva et Pomona extare, qui liber cum forte ad manum tibi non sit, locum illum pagella hic seorsim juncta exscribendum curavi.

Rubelii liquor vulnerarius etiamnum famam suam inter ingenuos tuetur, quamvis a malevolis et invidis artis Medicae professoribus passim exploratur.

Quicquid illud fuerit, quod in Arte Chrysopoetica pollicitus fuerit Sch^us^, nihil hactenus ab eo praestitum novimus. Jam assiduus fere comes est Imperatorici ad Aulam hanc Ablegati, qui nummum nobis monstrat, in aurum ex mercurio ni fallor Viennae conversum, non tamen (quod nonnulli mirantur) in aurum purissimum, cum nonnisi 23 caratorum bonitatem obtineat.

Nescio, quid causae sit quod Transactiones nostras a Schultzio non accepisti. Puto tamen, Martinum nostrum eas singulis mensibus Hamburgum curare. Invenies in iis, quidquid tum nostrates, tum Casinus et Hevelius de cometa nupero observata dedere. Continere se non potuit Cassinus a deducenda Theoria sua Cometica, antehac exposita, ex apparentium Cometae hujus locorum intervallis, quae laudatus Hervelius in literis suis posterioribus mihi communicaverat. Fortassis et hanc partem proximis Transactionibus inseram, quae tamen non nisi mense Septembri proximo in lucem emittentur, cum hoc feriarum aestivarum tempore Bibliopola meus imprimere haec acta tergiversetur.

Necdum hic appulit eorum ullus, qui Phosphoros se possidere venditant. Lubentes videremus substantiam illam, quam penes Dn. Craftium esse significasti, cum oppido rarum sit et eximium, corpus aliquod factitium secum perpetuo gestare lucem, et in tenebras translatum statim eam expromere, quin imo per aliquot annos vim lucendi retinere. Audivi interim, primum hujus Phosphori Inventorem degere

Hamburgi, a quo dictus Craftius ejus parandi artem (hactenus tamen non nisi imperfecto) hauserit.

Facile credo, Te in Aula isthac novum variis modis distrahi. Dabis tamen operam, spero, ut quae apud vos et per Germaniam totam in re philosophica geruntur mature edoceamur: quod facile a Te fieri posse ob Serenissimi Principis vestri ingenium curiosissimum et pansophicum (cui obsequium cultumque meum humillime defero) maxumopere laetor.

Galli nuper Tractatum edidere de Architectura Navali, edituri alium de Arte Naves gubernandi. Jesuita Chales de Millet, Cursus Mathematici Author, opus nuper evulgavit de Arte Navigandi, et Dn. Felibienus aliud de Architectura civili. Dantisco nuper accepi libellum de Frigore, a quodam Conrado non male conscriptum, quamvis paucissima nova vel quoad doctrinam vel quoad experimenta continentem, lectu tamen jucundum et ingenio excitantem.

Grevius noster, qui hactenus feliciter in Malpighio incubuit Anatomiae Plantarum, nuper Anatomen animalium Comparatam aggressus est, atque examinatis jam 15 vel 16 Quadrupedum intestinis eorumque differentiis variis probe inter se collatis, de eorum usibus doctam sane Dissertationem coram Societate Regia instituit, Ruminationis, inter alia, methodo solidius quam hactenus factum tradita.

Dn. Boylius plurimam Tibi salutem dicit. Is, quamvis complura sub incude habeat, hactenus tamen ambigit, cuinam ex tot argumentis materiae primas in excudendo tribuere debeat.

Oxoniensis quidam, Dn. Plot vocatus, in lucem nuper emisit Historiam naturalem Oxoniensis Provinciae seu Specimen quoddam Consilii quod init, de Historia Naturali omnium Angliae provinciarum condenda. In dicta Oxoniensi historia notavit conscripsitque omnia, quae in comitatu illo circa Naturam, Artes et Antiquitatem, ipse cum plurium virorum solertium ope observare potuit. Putatur id peregisse magna cura et fide, multique animum induxere, opus hoc tam feliciter coeptum cohortationibus et opibus suis promovere. Ego ad plerosque amicos meos transmarinos jam scripsi, quid hac in re apud nos jam sit praestitum, eosque sollicitavi, ut hoc exemplo simile quid, in suis quique regionibus, aggredi, atque hac ratione symbolam suam ad Universalis historiae Naturae structuram excitandam conferre velint. Confido penitus, Vir Clarissime, Te non latitaturum post principia, sed viribus eo annixurum, ut similis Historia amplissimarum, quae Serenissimis Luneburgi et Brunsvici Principibus subjacent, ditionum concinnetur, cui Sapientissimos Doctissimosque juxta ac Bellicosissimos illos Heroas authoritatum et facultatum suarum partem generose et strenue collaturos esse persua-

sissimum habeo. Multa sine dubio in Sylva Hercynia occurrunt notatu dignissima, cujus partem insignem laudatissimi illi Duces possident. Dolendum profecto esset, semper ea debere a philosophantium cognitione abdi, nec in lucem protrahi, ut dignam Promptuarii naturae partem faciant. Sat viro ingenuo et ingenioso dictum, cui hanc rem sollicitandam summa animi contentione committo. Vale et ab omnibus amicis communibus, tui studiosissimis, plurimum salve.

Dabam Londini d. 12. Julii 1677.

LII.

Leibniz an Oldenburg.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Novissimas meas accepisse TE credo, tametsi necdum responderis, nec vestra quae per Martinum petieram acta philosophica comparuerint. Quae de Phosphoro quaesieras, illis satisfacere non poteram tunc quidem, nondum enim illum quem vocas noctilucam videram, quem heri demum fortuna mihi visendum obtulit. Nimirum Dn. Joh. Daniel Craft, cujus in libello Elsholtii de quatuor Phosphoris mentionem factam credo vidisti, in Hollandiam et Angliam negotiorum quorundam causa tendens, ad me invisit, et rem sane mirabilem videndam obtulit. Materia est quae in liquida vel sicca forma haberi potest, et non lucet tantum noctu, et quibus rebus affricta est, lucem quandam subitaneam communicat, sed et vitreo Vasculo inclusa subinde fulgurat, et quosdam velut fluctus luminis attollit. Plane diversi est generis a Balduiniano phosphorus iste, nam hic lucem hausit a sole aut die, ille secum gestat et in tenebris statim expromit. Certum est particulam biennio integro servatam vim lucendi nondum amisisse. Nec dubium est, si frustum satis grande haberetur, luminis perpetui aut certe valde diuturni diu desiderati usum praestare posse.

Historiam inventi tibi tradam qualem a Craftio accepi. Autor ejus est quidam Germanus Craftio amicus, qui rem ex parte Kunckelio communicavit. Kunckelius dissimulato primo inventore sese ejus autorem tulit, et per Kirchmaierum, professorem Witebergensem, id egit ut nomen suum scripto publico innotesceret. Kirchmaierus ergo, quicquid ea de re habet, a Kunckelio habet. Craftio non Kunckelius tantum,

sed et primus inventor innotuit. Craftius autem refert Kunckelianum neque si efficaciam nec si elaborandi facilitatem spectes, primogenito illi Phosphoro, cujus mihi efficaciam ostendit, conferri posse.

Sed haec ipse Tibi uberius exponet, rogavi enim ut ubi in Angliam venerit, te adire velit, persuasus gratissimam Tibi fore notitiam Viri in rebus naturalibus et mechanicis egregie versati, et omnia ad usum quendam referentis, te vero rogo, ut vicissem ei omnia amici officia exhibere velis, quibus dignissimum experieris.

Literas grandiusculas quas mihi destinaveras nondum accepi, sed avide expecto. Vale.*)

LIII.

Oldenburg an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

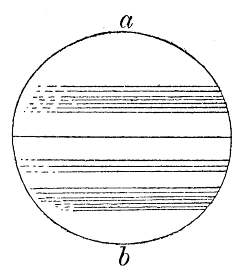
Ex quo tempore ad te scripsi per Dnum. Sambinum Heidelbergensem, quem etiam Dno. van der Heck commendavi, ut scil. fasciculum meum ipsi pro te traditum Hanoveram summa cura expediret, binas a Te literas accepi, quae utraeque de prolixa illa Dni. Newtoni Epistola, antehac ad te missa, cogitationes tuas aperiunt. Non est, quod dicti Newtoni vel etiam Collinii nostri responsum tam cito ad eas expectes, cum et urbe absint et variis aliis negotiis distineantur. Scire interim te velim, me in supradicto fasciculo inclusisse Bondium de Longitudine, et Andersonium de Projectilibus, et Darium de Faenore compendifacto; nec non Flamstedianae epistolae apographum de Experimentis Arcu factis, juncta etiam methodo Colliniana Vernicis parandae. Nunc tibi per Dn. Schröterum ultima mea Acta philos. mitto, cum priorum Te jam factum esse participem confidam.

Necdum visus est in his nostris oris Dn. Craftius, cujus Phosphorii gemini videndi mirum nos desiderium incessit. Aemulatio quaedam ipsum inter et Kirchmaierum intercedere videtur, quam dirimi ipsa autopia discuperem. De hoc argumento lator harum fusius haud dubie tecum colloquetur, qui nunc Viennam se properare ait, novi Principis Zinzendorfii honoribus litaturus.

Accepi nuper a Dno. Cassino literas, quas magni facio. Post-

*) Ohne Ort und Datum.

quam enim notaverat Satellitum Jovis configurationes pro mensibus Augusto et Septembri hujus anni, promiseratque se brevi reliquas hujus anni configurationes daturum, adjecit situm principalis maculae Jovis ad eos dies, quibus adjecta hora observari commode potest. Haec illa macula est, ex cujus restitutionibus inter se comparatis Revolutiones Jovis circa axem proprium periodum deduxit horarum 9. 54', deinde subtilius h. 9. 55' 52", quando motus Jovis apparens congruit medio, estque min. 5' in consequentia. Paulo quippe tardius restitui maculam ait, cum motus Jovis apparens in Consequentia velocior est; paulo citius, quando motus hic Jovis in consequentia tardior est, vel stationarius, aut retrocedit. Hanc porro maculam hoc anno rursus in conspectum venire ait, quae duobus praecedentibus delituit: quam occultationis et apparitionis vicem jam saepius a se observatam asserit. Scil. cum annis 1665 et 1666 apparuerit, ab anno 1667 ad an. 1672 frustra quaesita est: Initio autem anni 1672 rursus apparuit eodem in situ Jovialis disci quo fuerat olim observata, et ad easdem horas, quas numeri Cassiniani postulabunt. Sed A. 1675 rursus evanuit delituitque usque ad mensem Julii anni hujus. Nunc iterum conspicua est eadem figura, eodemque loco Jovialis disci quo prius et easdem horas per dictos Cassini numeros praemonstratas. Talis autem est, juxta Cassinum, Jovialis disci prospectus, quando illa ad medium itineris sui in disco Jovis apparente pervenit. Tres hic conspiciuntur obscurae Zonae jacentes in situ parallelo motui Jovis circa axem proprium, cujus polus Australis circa a, borealis circa b, schemate per telescopium inverso; Macula autem principalis Zonae Australis parti boreali adjacet.



Ano. 1675, quo macula principalis disparuit, interstitium lucidum in Zonam borealem et mediam disruptum esse affirmat Cassinus in plures partes, parvas insulas in fluvio referentes: Mox insulas lucidas prorsus evanuisse adjicit, et ex duabus obscuris Zonis, media et boreali, semoto interstitio una latior conflata est, quam iterum hoc anno medio interstitio lucido in duas distinctam esse animadvertit. Notandum vero ait, eandem distinctionem hoc factam anno, quo Jovialium satellitum systema respectu nostri inversum est, semicirculis eorum superioribus, qui totum sexennium ad Austrum vergebant; nunc versis ad Boream, et e converso juxta ea, quae superiori anno in diariis praedixerat. Quam Jovialis mundi Cataestrophon dignam existimavit, quae Regiae Societati communicaretur. Ideoque et ego dignam censui, quam Tibi, Societatis Regiae membro meritissimo, impertirem. Plura scribendi

tempus non suppetit in praesenti. Vale igitur florentissime et me amare perge. Dab. Londini d. 9. Augusti 1677.

LIV.

Leibniz an Newton.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Quantum Tibi scientiam rerum Mathematicarum totiusque Naturae debere arbitrer, occasione data etiam publice sum professus. Mirifice ampliaveras Geometriam tuis seriebus, sed edito Principiorum opere ostendisti, patere Tibi etiam quae analysi receptae non subsunt. Conatus sum ego quoque notis commodis adhibitis, quae differentias et summas exhibent, Geometriam illam quam Transcendentem appello analysi quodammodo subjicere, nec res male processit. Sed a Te magni aliquid expecto ad summam manum imponendam, tum ut problemata, quae ex data tangentium proprietate quaerunt lineas, reducantur optime ad quadraturas, tum ut quadraturae ipsae (quod valde vellem) reducantur ad curvarum rectificationes, utique superficierum aut corporum dimensionibus simpliciores.

Sed super omnia optem, ut Geometricis absolutus*) naturam, ut coepisti, Mathematice tractare pergas, in quo genere certe tu unus cum paucissimis ingens operae pretium fecisti. Mirificum est, quod invenisti Ellipses Keplerianas prodire, si tantummodo attractio sive gravitatio et trajectio in planeta concipiantur, tametsi enim eo inclinem, ut credam haec omnia fluidi ambientis motu sive effici sive regi, analogia gravitatis et magnetismi apud nos; nihil tamen ea res dignitati et veritati inventi tui detraxerit. Quae summus et ipse Mathematicus, Christianus Hugenius, in tua notavit appendice libelli de causa luminis et gravitatis expensa Tibi non dubito, et sententiam vicissim tuam velim, vestra enim amica collatione potissimum, qui in hoc genere eminetis, erui veritas potest.

Cum vero maximum tu quoque lumen ipsi Dioptricae intuleris, explicatis colorum phaenomenis inexpectatis, velim quid sentias de Hugeniana explicatione radiationis utique ingeniosissima, cum feliciter adeo prodeat lex sinuum. Significavit mihi Hugenius, nescio quae nova

---

*) Vielleicht absolutis.

phaenomena colorum sibi a Te communicata. Ego valde optem ut ratio colorum quos fixos vocant, ex apparentibus deduci possit, seu ut ostendatur ratio efficiendi per refractiones, ut tota aliqua superficies certum colorem ostendat.

In librorum apud Anglos editorum Indicibus occurrere mihi aliquoties libri Mathematici autore Neutono, sed dubitavi a Te essent, quod vellem, an ab alio homonymo.

Heinsonius noster redux testis fuit benevolentiae erga me Tuae. De cultu vero meo erga Te non ille tantum testari potest, sed et Stepnejus, tecum ejusdem olim Collegii habitator, nunc Magnae Britannicae Regis negotia apud Caesarem, nuper apud Serenissimum Electorem Brandenburgicum curans.

Haec scribo magis ut studia erga Te mea intelligas, quae nihil tot annorum silentio amisere, quam ut studia Tua ego, quibus auges humani generis opes, interrumpere velim vacuis literis et supervacuis. Vale.

Dabam Hannovera $\frac{7}{17}$ Martii 1693.

LV.

Newton an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Literae tuae, cum non statim acceptis responderem, e manibus elapsae inter schedas meas diu latuere, nec in eas ante hesternum diem incidere potui. Id quod me moleste habuit, cum amicitiam tuam maximi faciam, teque inter summos hujus saeculi Geometras a multis retro annis habuerim, quemadmodum etiam data omni occasione testatus sim. Nam quamvis commercia philosophica et mathematica quam maxime fugiam, tamen metuebam ne amicitia nostra ex silentio decrementum acciperet, idque maxime cum Wallisius noster Historiam Algebrae in lucem denuo missurus nova aliqua e literis inseruit, quas olim per manus Dni. Oldenburgi ad te conscripsi, et sic ansam mihi dedit ea etiam de re ad te scribendi. Postulavit enim, ut methodum quandam duplicem aperirem quam literis transpositis ibi celaveram. Quocirca coactus sum qua potui brevitate exponere methodum meam fluxionum, quam hac celaveram sententia: Data aequatione quantitates quotcunque fluentes involvente invenire fluxiones, et vice versa. Spero autem me

nihil scripsisse quod tibi non placeat, et siquid sit quod reprehensione dignum censeas, ut literis id mihi significes, quoniam amicos pluris facio quam inventa mathematica.

Reductionem quadraturarum ad curvarum rectificationes quam desiderare videris, inveni talem. Sit Curvae cujusvis abscissa x, ordinata y et area az, posito quod a sit data quantitas. Fluat x uniformiter sitque ejus fluxio $\dot{x} = a$, et ipsius y sit fluxio $\dot{y}$. A dato puncto D in recta positione data DE sumatur $BD = x$, et agatur indefinita BCG ea lege ut cosinus anguli DBG sit ad Radium ut fluxio $\dot{y}$ ad fluxionem $\dot{x} = a$: et inveniatur Curva FG quam recta BG perpetuo tangit. Id enim semper fieri potest Geometrice ubi fluxionum $\dot{x}$ et $\dot{y}$ relatio geometrica est. Sit G punctum contactus, et ubi punctum B incidit in punctum D, incidat punctum G in punctum F. In tangente BG sumatur GC aequalis Curvae GF et CH aequalis rectae FD et erit $BH = z$. Qna inventa habetur area quaesita az.

Quae vir summus Hugenius in mea notavit, ingeniosa sunt. Parallaxis solis minor videtur quam ipse statueram, et motus sonorum forte magis rectilineus est. At caelos materia aliqua subtili nimis implere videtur. Nam cum motus caelestes sint magis regulares quam si a vorticibus orirentur, et leges alias observent, adeo ut vortices non ad regendos, sed ad perturbandos Planetarum et Cometarum motus conducant, cumque omnia caelorum et maris phaenomena ex gravitate sola secundum leges a me descriptas agente accurate quantum sentio sequantur, et natura simplicissima sit; ipse causas alias omnes abdicandas judicavi et caelos materia omni quantum fieri licet privandos, ne motus Planetarum et Cometarum impediantur aut reddantur irregulares. At interea siquis gravitatem una cum omnibus ejus legibus per actionem materiae alicujus subtilis explicuerit et motus Planetarum et Cometarum ab hac materia non perturbatos iri ostenderit, ego minime adversabor. Colorum phaenomena tam apparentium ut loquuntur quam fixorum rationes certissimas me invenisse puto, sed a libris edendis manum abstineo, ne mihi lites ab imperitis intententur et controversiae. Alius est Newtonus, cujus opera in librorum editorum indicibus tibi occurrunt. His contestari volui me tibi amicum integerrimum esse et amicitiam tuam maximi facere. Vale. Dabam Cantabrigiae, Octob. $\frac{16}{26}$ 1693.

Utinam rectificationem Hyperbolae, quam te invenisse dudum significasti, in lucem emitteres.

LVI.

Conti an Leibniz.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Je scay, Monsieur, qu'il n'est pas permis d'interrompre les Meditations des Grands Philosophes, ni de leur derober ces pretieux moments qu'ils employent à perfectionner les Sciences et les Arts, et à instruire les Hommes. Cependant une loi si respectable et si necessaire à l'utilité publique n'est point sans exception, et il me semble, qu'on est quelquefois en droit de la violer, lorsqu'il faut consulter ces grands Genies sur les disputes qu'on a.

Ce sont les reflexions, Monsieur, qui me donnent la liberté de m'adresser à vous dans la dispute, que i'ay avec le Sieur Nigrisoli, Medecin de Ferrare. Permettez moy de vous exposer nettement l'etat de la question.

Le Sieur Nigrisoli pretend, que la Generation des Animaux et des Plantes est l'effet d'une certaine Lumiere, qu'il appelle seminale. Vous scaurez, que Flud avec plusieurs Alchemistes, et plusieurs Medecins ont adopté la meme hypothese. Elle est trop commode pour masquer la Nature sous des Noms eclatans.

Il y a deux ans que ie me suis opposé à cette hypothese là. Je n'ay pû souffrir, qu'en Italie on preferat le systeme des Cabalistes au Systeme Mecanique, que Galilee, Toricelli, Borelli nous ont tracé. Ma critique est dans la lettre, que i'ay ecrite au scavant eveque d'Adria, et ie vous dirai en passant, que dans ma lettre i'ay parlé fort au long du Systeme de l'Harmonie preetablie. Ainsi i'ay eu l'honneur d'en parler le premier en Italie, ce qui a donné envie à plusieurs d'en avoir une connoissance plus exacte.

Dans ma Critique i'ay fait voir, que la lumiere seminale n'adioute que des Noms aux mouvements de l'ether, et qu'elle n'adioute que des principes plus obscurs à l'hypothese des Natures plastiques. En effet il faut supposer non seulement que la Nature plastique existe, mais encore qu'elle subsiste dans un certain corps, et que ce corps là est le suiet de la lumiere.

Le Sieur Nigrisoli ne s'est point rendu. Il a repondu à ma Critique sous un Nom emprunté. Je n'avois point le dessin de faire une replique, mes amis l'ont voulu. Voilà, Monsieur, à peu pres ce que ie dis dans la troisieme partie de ma Reponse; les deux autres ne contiennent que certaines maximes et certaines reflexions, dont i'aurois l'honneur de vous parler une autre fois.

Je developpe premierement toutes les Idees qui sont compliquees dans le terme de Lumiere seminale. La premiere Idee est celle de la Nature plastique, la seconde est celle de la Lumiere meme, la troisieme est l'idee du rapport que la Lumiere peut avoir aux corps organizes. N'est-il pas vray, qu'il faut fixer toutes ces Idees pour conclure quelque chose dans la question qu'on a proposée?

Si ie demonstre donc, que la Nature plastique est une chimere, voilà le premier fondement du systeme renversé. Car peut-on concevoir, que la Lumiere a organizé le corps sans lui donner les characteres de la Nature plastique?

Je soutiens, que l'hypothese de la Nature plastique n'a aucun degré de vraisemblance, soit qu'on la fasse agir par elle meme, independement de Dieu, soit qu'on la fasse agir sous la direction de Dieu. La premiere est l'hypothese de Straton, de Spinosa et des Chinois, la seconde est l'hypothese de Cudwort.

Si les Natures plastiques agissent par elles memes, comme il n'y a point de raison pour qu'elles agissent plus-tost d'une maniere que de l'autre, elles n'agiront point; à plus forte raison elles n'agiront point regulierement, ni touiours avec dessein. La Varieté des Phenomenes ne scauroit s'accorder avec la Necessité, qui agit touiours de la meme maniere, et vous avez prouvé fort bien, Monsieur, que les Formes des Corps ne sont que convenables, car nous les pouvous concevoir autrement qu'elles ne sont. Il n'en est pas de meme des figures Geometriques et des Nombres.

Si les Natures plastiques agissent sous la direction de Dieu, elles ont besoin d'etre appliquees et dirigees à chaque instant, et tous les defauts de l'ouvrage tombent sur Dieu, qu'il n'applique point la Nature plastique comme il faut. L'hypothese donc des Natures plastiques ne donne point à la Creature l'immediation de la Cause efficiente, et n'explique point les Monstres, qui est le double but de l'hypothese.

M. Newton parle d'un certain esprit universel, et qui est repandu par toute la matiere. Si par cet esprit M. Newton entend la Nature plastique, il ne dit rien de clair, ni de nouveau, mais ie suis tenté de croire, que l'esprit, dont parle M. Newton dans sa derniere edition de son Livre, n'est que le Concours des Loix Naturelles, et que par consequent M. Newton a son ordinaire, il dit la meme chose que vous, mais sous des termes un peu obscurs.

Dans son Livre des Couleurs et dans les Remarques, que M. Clarc a iointes à la Physique de Rohault, il semble, que les attractions ne soient que des Loix. Comme il y a plusieurs de ces Loix dans la Nature, pourquoy ne pourroit-on pas croire, que du rapport

de ces Loix il en resulte tant des Phenomenes differents, et qui sont infiniment combines entre eux? Je ne scay si cette expliquation convienne au reste de la Philosophie Angloise; elle est au moins claire, et on en concoit quelque chose. Les attractions, les atomes, le grand vuide n'ont point des Sectateurs à Paris, et il est si ridicule d'en parler icy, comme peut-etre il est ridicule à Londre des Tourbillons de M. Des-cartes.

Voyons à present ce qu'on peut tirer de la notion de la Lumiere et du rapport qu'elle peut avoir aux corps organizes.

Tout ce que la Lumiere a de fixe et de reel n'est que le mouvement, ou l'effort au mouvement. Apres les experiences que i'ay veues au Palais Royal, ie suis tres-persuadé, que la Lumiere est iointe au mouvement actuel. L'effort au mouvement n'est qu'une Force morte, qui ne scauroit ni fondre ni vitrifier l'or, comme elle fait. On dit encore, qu'elle ebranle furiesement la pendule, qui est au foyer du Miroir.

Si donc la Lumiere organize les corps, elle ne peut organizer que par le mouvement. Ainsi il faut s'en tenir au mouvement sans y aiouter la Lumiere.

Mais par quelle proprieté la Lumiere organizeroit elle les corps? est ce par la Reflexion? est ce par la Refraction? est ce par l'inflexion de ses Rayons? La reflexion et la refraction peuvent bien produire les Images, c'est à dire elles peuvent ranger les Rayons, de maniere qu'ils fassent en nous la meme impression que les obiets, mais l'Image n'est que superficielle; elle n'a aucun rapport aux corps organizes.

Par les experiences du Miroir ardent on voit que la Lumiere a la force d'alterer la figure, le volume et la pesanteur des corps; mais ces alterations n'ont rien de regulier, rien qui marquent la puissance d'organizer.

On a trouvé dernierement la maniere de tirer le Phosphore de toute sorte de matiere. On le tire du sucre, du miel, du seigle etc. Cela prouve, que dans tous les corps organizes il y a la matiere de la Lumiere, et qu'on la peut faire paroitre apres l'avoir preparée, mais que s'ensuit-il de là?

M. Homberg, qui dans sa Chimie donne tant des prerogatives à la lumiere, n'a osé lui donner celle d'organizer les corps; il croit à l'ordinaire, que les corps soient enveloppes les uns dans les autres, et que la generation se fasse par les vers spermatiques.

Je suis donc persuadé, que l'hypothese de la Lumiere seminale n'est fondée que sur les preiuges de sens et de l'imagination. La Lumiere est trop belle, et son eclat nous inspire des sentiments vifs et proportionnez à l'etat le plus heureux de notre corps.

C'est pour cela, que le Sieur Nigrisoli, et quelques autres Medecins iugeant des choses plus par rapport à nous que par rapport aux choses memes, s'imaginent que la Lumiere est l'origine et la forme des toutes choses.

Les premiers Philosophes d'Orient avoient la meme imagination que les premiers des Grecs ont suivi, changeant quelquefois le Nom de Lumiere en celuy de chaleur. Mais lorsqu' une plus grande connoissance de la Nature et un plus grand Art de raisoner ont eu perfectionné la Philosophie Grecque, la Lumiere a eté remise à sa place, c'est à dire dans le rang des Phenomenes. Platon, Aristote, Epicure en parlent comme d'un Phenomene.

La meme chose est arrivée à peu pres dans nos siecles. Telesius, Campanella, Patritius etablirent pour principe la Lumiere, ou la Chaleur. Cela n'a pas duré long-temps. Tous les grands Philosophes, qui sont venus depuis peu, n'ont pas donné plus de privilege à la Lumiere qu' à la Pesanteur et aux autres qualites sensibles.

Ils ont distingué, comme vous scavez, tres clairment ce que les qualites sensibles ont de fixe et de reel en elles memes, et ce qu'elles ont de relatif à nos sens. Cette distinction a eté suivie par M. Lock, Lock meme qui a parlé si obscurement de la Nature de l'ame. Ce qui est bien remarquable: ce que vous dites, Monsieur, à la fin de la Dissertation des Idees, et dans la Theodicee a un grand sens.

Je viens de remarquer, que dans le Systeme Cartesien il y a vuide des qualites sensibles, comme dans le Systeme d'Epicure il y a vuide de matiere. Les ames raisonables ne peuvent orner qu'une portion de la matiere, et ne peuvent pas meme l'orner touiours. Voilà donc les Planetes et une grande partie de la Terre sans ces beaux ornemens, qui marquent les rapports des ames aux corps, et par consequent la grande Harmonie de la Nature. Si on admet au contraire, comme vous faites, une infinité d'ames de toutes especes, voilà une infinité d'ornements varies à l'infini, que la matiere, pour ainsi dire, creeroit. Il semble, qu'un Monde semblable marque d'avantage la Puissance et l'Intelligence du Createur.

Cette reflexion me fait soupçoner, que la distinction que M. Crousat donne du Beau, n'est pas exacte. A ce qu'il dit sur la proportion des parties, il faut peut-etre adiouter la Douceur des Couleurs, comme faisoient les Anciens, Proportio Partium cum suavitate coloris. Par ce mot Douceur des Couleurs i'entends toutes les qualites sensibles, que les Ames repandent sur les Corps, plus ou moins selon le degré de perfection de l'Ame.

Je n'ose cependant rien decider là dessus. J'en ferai une Dissertation, si vous confirmerez mes sentiments.

Mais en voilà assez pour la premiere fois que i'ay l'honneur de vous entretenir. Je vous prie de dire librement ce que vous pensez sur ma question, car ie ferai imprimer votre lettre, si vous le permettez. Je parts demain pour l'Angleterre, et ie ne manquerai pas d'y soutenir votre cause, comme i'ay fait à Paris. M. Remond et M. l'Abbé Fraguier en sont temoins. Ils m'ont chargé tous les deux de vous faire leurs compliments. Je suis avec tout le respect etc.*)

LVII.

Leibniz an Conti.

Nach dem Original in der Königl. Bibliothek zu Hannover.

Hannover 6 Decembr. 1715.

On m'a dit tant de bien, Monsieur, de vostre penetration et de vos nobles desseins pour la recherche de la verité, que l'honneur de votre lettre ne m'a pû etre que tres agreable, et je souhaiterois de vous y pouvoir aider. Monsieur Negrisoli doit etre homme de merite et de reputation, puisque vous avés pris lä peine d'entrer en dispute avec luy. La lumiere seminale est un beau mot, mais dont on ne connoist point le sens. Je m'imagine que ces Messieurs qui s'en servent, l'entendent dans un sens metaphorique. Que la lumiere leur signifie quelque matiere subtile douée de grandes perfections, comme la lumiere paroist le plus parfait fluide qui nous soit connu, ils logeront dans un corps si parfait un artifice assez grand pour former les animaux, mais cela n'explique rien; il faut qu'une matiere capable d'organiser soit organisée elle meme, mais un fluide tel que la lumiere ne dit pas cela. La lumiere prise dans le sens metaphorique, dont je viens de parler, conviendroit assez avec l'esprit de M. Newton. Vous avés bien remarqué, Monsieur, que les anciens philosophes de l'Orient se sont servis de la lumiere ou de la chaleur pour expliquer les principes des . . . . . . **), c'est ainsi que Zoroastre et les Mages ont honoré le feu. Il semble que l'ombre ou le froid estoit le mauvais principe,

---

*) Ohne Ort und Datum.

**) Ein Wort unleserlich, vielleicht Etres.

et ils imaginoient deux pyramides ou deux cones egaux et semblables directement opposés l'un à l'autre, l'un de lumiere, l'autre d'ombre, en sorte que la pointe de l'un arrivoit jusqu' à la base de l'autre, pour faire voir le melange du bien et du mal dans les Etres et leur degrés. Si M. Negrisoli entend la humiere dans le sens propre, je ne vois nulle raison pour quoy il diroit plustot lumiere seminale que Son seminal ou Odeur seminale. Si ce n'est parce que la lumiere est quelque chose de plus subtil, car au reste, elle n'a pas plus de rapport à la force plastique que le Son qui reçoit d'aussi grandes varietés, comme il paroist par la Musique, et on pourroit s'imaginer des airs de musique plastiques que Dieu auroit mis in aura seminali, et mêmes quelques uns se sont avisés de parler de hac aura seminali. Amphion par le moyen de sa Musique a basti le chasteau de Thebes, il encherissoit beaucoup sur Orphée, qui n'etoit suivi que par des animaux; quand Amphion touchoit sa harpe, les pierres memes tremoussoient et se rangeoient comme il faut: voilà la force plastique. Ridendo dicere verum nil vetat. Ainsi nous avons trouvé des sons plastiques. Mais il y a peutetre encor eu des gens qui ont soutenu des odeurs plastiques. Et il me semble qu'un savant Anglois qui croyoit la transmigration des ames, ou quelque chose d'approchant, a crû que les ames sorties des corps estoient attirées et invitées à se rendre dans de nouveaux corps par une certaine odeur. Et cette odeur apparemment estoit plastique. L'Hypothese d'une organisation toute faite qui accompagne tousjours l'ame, même avant la conception et ne la quitte point apres la mort, leve toutes les difficultés, et nous delivre de la peine de chercher ces forces plastiques trop difficiles à trouver dans la matiere, et cherchées trop loin hors de la matiere. Ce systeme nous delivre aussi de la difficulté d'expliquer comment les Ames souffrent ou agissent. Car selon ce systeme, c'est tout comme icy, aux degrés prés. En developpant les notions, comme vous avés fait, Monsieur, il me semble que la dispute est finie, et il faut avouer qu'en parlant de la lumiere seminale, on ne nous apprend rien.

Vox est (pulchra quidem) praeter eamque nihil.

Je suis avec zele etc.

P. S.

Voila, Monsieur, la lettre dont vous pourrés faire usage si vous le jugés à propos. Je viens maintenant à ce qui nous regarde. Je suis ravi que vous estes en Angleterre, il y a de quoy profiter. Et il faut avouer qu'il y a là de tres habiles gens. Mais ils voudroient passer pour etre presque seuls inventeurs, et c'est en quoy apparremment ils ne reussiront pas. Il me paroist point que M. Newton

ait eu avant moy la Caracteristique et l'Algorithme infinitesimal, suivant ce que M. Bernoulli a tres bien jugé, quoyqu'il luy auroit eté fort aisé d'y parvenir s'il s'en fut avisé. Comme il auroit esté fort aisé à Apollonius de parvenir à l'Analyse de Des Cartes sur les Courbes, s'il s'en etoit ȧvisé. Ceux qui ont ecrit contre moy n'ayant pas fait difficulté d'attaquer ma candeur par des interpretations forcées et mal fondées, ils n'auront point le plaisir de me voir répondre à de petites raisons de gens qui en usent si mal, et qui d'ailleurs s'ecartent du fait. Il s'agit du Calcul des differences, et ils se jettent sur les Series, où M. Newton m'a precedé sans difficulté; mais je trouvay enfin une Methode generale pour les Series, et après cela je n'avois plus besoin de recourir à ses extractions. Ils auroient mieux fait de donner les Lettres entieres comme M. Wallis a fait avec mon consentement, et il n'a pas eu la moindre dispute avec moy, comme ces gens là voudroient persuader au public. Mes adversaires n'ont publié du Commercium Epistolicum de M. Collins que ce qu'ils ont crû capable de recevoir leur mauvaises interpretations. Je fis connoissance avec M. Collins dans mon second voyage d'Angleterre, car au premier (qui dura tres peu, parceque j'estois venu avec un ministre public) je n'avois pas encore la moindre connoissance de la Geometrie avancée, et n'avois rien vû ny entendu du commerce de M. Collins avec Mss. Gregory et Newton, comme mes lettres echangées avec M. Oldenbourg en ce temps là et quelque temps après feront assez voir. Ce n'est qu'en France que j'y suis entré, et M. Hugens m' en donna l'entrée. Mais à mon second voyage M. Collins me fit voir un partie de son commerce, et j'y remarquay que M. Newton avoua aussi son ignorance sur plusieurs choses, et dit entre autres qu'il n'avoit rien trouvé sur la dimension des Curvilignes celebres que la dimension de la Cissoide. Mais on a supprimé tout cela. Je suis faché qu'un aussi habile homme que M. Newton s'est attiré la censure des personnes intelligentes, en deferant trop aux suggestions de quelques flatteurs qui l'ont voulu brouiller avec moy. La Societé Royale ne m'a point fait connoitre qu'elle vouloit examiner l'affaire, ainsi je n'ay point eté uni et si l'on m'avoit fait savoir les noms de ceux qu'on avoit nommés comme Commissaires, j'aurois pû m'expliquer si je recusois quelques uns, et si j'en desirois. C'est pourquoy les formalités essentielles n'ayant point eté observées, la Societé a declaré qu'elle ne pretend point d'avoir jugé definitivement entre M. Newton et moy.

Sa Philosophie me paroist un peu étrange, et je ne crois pas qu'elle puisse s'etablir. Si tout corps est grave, il faut necessairement (quoyque disent ses defenseurs et quelque emportement qu'ils temoignent)

que la gravité soit une qualité occulte Scholastique, ou l'effect d'un miracle. J'ay fait voir autresfois à M. Bayle que tout ce qui n'est pas explicable par la nature des creatures est miraculeux. Il ne suffit pas de dire, Dieu a fait une telle loy de Nature, donc la chose est naturelle. Il faut que la loy soit executable par les natures des creatures. Si Dieu donnoit cette loy, par exemple à un corps libre, de tourner à l'entour d'un certain centre, il faudroit ou qu'il y joignit d'autres corps qui par leur impulsion l'obligeassent de rester tousjours dans son orbite circulaire, ou qu'il mit un Ange à ses trousses, ou enfin il faudroit qu'il y concourut extraordinairement. Car le mobile s'ecartera par la tangente. Dieu agit continuellement sur les creatures par la conservation de leur Natures, et cette conservation est une production continuelle de ce qui est perfection en elles. Il est intelligentia supramundana, parcequ'il n'est pas l'Ame du Monde, et n'a pas besoin de sensorium.

Je ne trouve pas le vuide demonstré par les raisons de M. Newton ou de ses Sectateurs, non plus que la pretendue gravité universelle, ou que les Atomes. On ne peut donner dans le vuide et dans les Atomes, que par des vues trop bornées. M. Clark dispute contre le sentiment des Cartesiens qui croyent que Dieu ne sauroit destruire une partie de la matiere pour faire un vuide, mais je m'etonne qu'il ne voye point que si l'Espace est une substance differente de Dieu, la même difficulté s'y trouve. Or de dire que Dieu est l'Espace, c'est luy donner des parties. L'Espace est quelque chose mais comme le temps, l'un et l'autre est un ordre des choses, l'espace est l'ordre des coexistences, et le temps est l'ordre des existences successives. Ce sont des choses veritables mais ideales, comme les Nombres.

La matiere même n'est pas une substance, mais seulement substantiatum, un Phenomene bien fondé, et qui ne trompe point quand on y procede en raisonnant suivant les loix ideales de l'Arithmetique, de la Geometrie et de la Dynamique etc. Tout ce que j'avance en cela paroist démontré. A propos de la Dynamique ou de la Doctrine des forces, je m'etonne que M. Newton et ses sectateurs croyent que Dieu a si mal fait sa machine, que s'il n'y mettoit la main extraordinairement, la montre cesseroit bientôt d'aller. C'est avoir des idées bien étroites de la sagesse et de la puissance de Dieu. J'appelle extraordinaire toute operation de Dieu, qui demande autre chose que la conservation des natures des creatures. Ainsi quoyque je croye la Metaphysique de ces Messieurs là, a narrow one, et leur Mathematique assez arrivable, je ne laisse pas d'estimer extremement les meditations physico-mathematiques de M. Newton, et vous obligeriés infi-

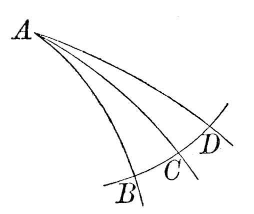
niment le public, Monsieur, si vous portiés cet habile homme à nous donner jusqu'à ses conjectures en physique. J'approuve fort sa methode de tirer des phenomenes ce qu'on en peut tirer sans rien supposer, quand même ce ne seroit quelquesfois que de tirer des consequences conjecturales. Cependant quand les data ne suffisent point, il est permis (comme on fait quelquesfois en déchifrant) d'imaginer des hypotheses, et si elles sont heureuses, on s'y tient provisionellement, en attendant que des nouvelles experiences nous apportent nova Data, et ce que Bacon appelle Experimenta crucis, pour choisir entre les hypotheses. Comme j'apprends que certains Anglois ont mal representé ma Philosophie dans leur Transactions, je ne doute point qu'avec ce que je vous mande icy, Monsieur, je ne puisse estre justifié. Je suis fort pour la Philosophie experimentale, mais M. Newton s'en ecarte fort quand il pretend que toute la matiere est pesante (ou que chaque partie de la matiere en attire chaque autre partie) ce que les Experiences ne prouvent nullement, comme M. Hugens a deja fort bien jugé; la matiere gràvifique ne sauroit avoir elle même cette pesanteur dont elle est la cause, et M. Newton n'apporte aucune experience ny raison suffisante pour le vuide et les Atomes ou pour l'attraction mutuelle generale. Et parcequ'on ne sait pas encor parfaitement et en detail comment se produit la gravité ou la force elastique, ou la magnetique etc., on n'a pas raison pour cela d'en faire des qualités occultes Scholastiques ou des miracles; mais on a encore moins raison de donner des bornes à la sagesse et à la puissance de Dieu, et de luy attribuer un sensorium et choses semblables. Au reste, je m'etonne que les Sectateurs de M. Newton ne donnent rien qui marque que leur maistre leur a communiqué une bonne Methode, j'ay eté plus heureux en disciples. C'est dommage que M. le Chevalier Wren, de qui M. Newton et beaucoup d'autres ont appris quand il etoit jeune, n'a pas continué de regaler le public. Je crois qu'il est encor en vie. Il seroit bon de faire connoissance avec luy. Dans le temps qu'il estoit jeune, on se seroit moqué en Angleterre de la nouvelle philosophie de quelques Anglois. et on l'auroit renvoyée à l'école. Luy et M. Flamstead avec M. Newton sont presque le seul recte du siecle d'or d'Angleterre par rapport aux sciences. M. Whiston étoit en bon train. Mais un certain zele étrange l'a jetté d'un autre coté. Je plains le public de cette perte. Depuis quelque temps on s'y est jetté dans les ghiribizzi politici, ou dans les controverses Ecclesiastiques. Il y a un François en Angleterre, nommé M. Moyvre, dont j'estime les connoissances Mathematiques. Il y a sans doute d'autres habiles gens, mais qui ne font point de bruit, dont vous saurés sans doute des nouvelles,

Monsieur, et vous m'obligerés de m'en apprendre. Je serois bien aise d'apprendre comment on tire le phosphore de toute sorte de corps, par exemple du miel, du seigle.

Vous avés raison, Monsieur, pour expliquer la nature du Beau, de joindre aux proportions la douceur ou la suavité, c'est à dire des raisons physiques ou sensibles aux raisons mechaniques ou intelligibles. Cependant il est vray que les raisons physiques sont tousjours occultement Mechaniques, comme la Musique fait connoistre, dans laquelle la suavité depend des proportions cachées aux sens, et découvertes par la raison. La nature en cachant aux ames les dernieres raisons, et en leur presentant des perceptions confuses, crée autant de nouveaux etres en apparence ou de nouvelles qualités, lesquelles comme disoit Democrite, subsistent νόμῳ animi, non re, mais qui sont un merveilleux ornement au monde. Ainsi vous avés excellement bien remarqué, Monsieur, que chez les Cartesiens il y a un vuide de formes ou de qualités, et que par les ames sans nombre et leur differentes veues la nature a trouvé moyen de multiplier infiniment les qualités ou les resultats des raisons simples, c'est à dire les ornemens.

Billet.

Pour tater un peu le pouls à nos Analystes Anglois, ayés la bonté, Monsieur, de leur proposer ce probleme comme de vous même ou d'un amis: Trouver une ligne BCD qui coupe à angles droits toutes les courbes d'une suite determinée d'un même genre, par exemple toutes les Hyperboles AB, AC, AD, qui ont le mêmc sommet et le même centre, et cela par une voy generale. Car on marque ce probleme particulier seulement pour se faire entendre, car dans les sections coniques il a ses facilités particulieres, mais il s'agit de donner une methode generale. Et ce probleme general peut être conçû ainsi: Estant donnée la courbure des rayons de lumiere dans le milicu diaphane, changeant continuellement de refractivité, trouver l'onde de lumiere selon la maniere de parler de M. Hugens, ou selon la façon de parler de M. Bernoulli la synchrone, à laquelle les rayons ou les mobiles, pris convenablement, parviennent en même temps.



Beilage.

Leibniz an Remond.

Vous aurés receu mon latin de l'origine des François par M.

Hullin, et par la poste mes remarques sur le refutateur du P. de Mallebranche, et enfin ma depeche tres ample à M. l'Abbé Conti, que je vous ay envoyée par le dernier courrier. Je trouve quelque chose que je vous supplie d'y adjouter en la luy envoyant.

(1) J'ay oublié de nommer deux habils hommes que je crois etre à Londres et qui meritent d'etre connus et sont tous deux de mes amis: Monsieur Sloane, qui a un excellent Cabinet, et a exercé longtemps la fonction de Secretaire de la Societé Royale, et M. Woodward qui a fait de tres belles recherches sur les changemens du globe de la terre; peut etre que M. l'Abbé Conti a deja fait connoissance avec eux.

(2) Madame la Princesse de Galles me marque dans une lettre que j'ay eu l'honneur de recevoir, qu'elle seroit bien aise, que Ma Theodicée fut traduite en Anglois. Mais ceux à qui Elle en a parlé y font naitre de la difficulté, et on renvoyé la chose à des gens partiaux pour M. Newton. Il y en a sans doute assés d'autres capables d'une telle traduction: je ne say si M. de la Roche François, qui a écrit autres fois des Memoires de literature en Anglois et qui y a inseré une Recension de la Theodicée, écrit assés bien l'Anglois (au jugement des connoisseurs) pour recourir à luy. En ce cas je crois qu'il seroit homme à s'en charger. Si non, je m'imagine qu'on en trouveroit assés d'autres. L'habile M. Wotton qui a écrit autres fois en Anglois elegamment et savamment avec moderation sur les anciens et les modernes, et sur les progres des sciences, en seroit bien capable, si on l'y pouvoit porter. Car je say qu'il ne meprise pas mes sentimens. Mais enfin si quelques uns savoient qu'ils feroient plaiser à son Altesse Royale en faisant cette Traduction, je crois qu'ils seroient ravis de l'entreprendre.

(3) Si M. l'Abbé Conti n'est pas encore connu de Mad. la Princesse de Galles, et s'il desire cet honneur là, il sufiroit qu'il s'en rapportât à moy. Il pourroit etre introduit auprés d'Elle ou par l'entremise de M. Querini son compatriote, ou par celle de Madame la Comtesse Lippe-Bickebourg qui est une Comtesse de l'Empire, fort aimée de Mad. la Princesse, car elle a bien du merite, et elle a aussi de la bonté pour moy.

(4) On pourra adjouter quelque chose à mon grand postscriptum à M. l'Abbé Conti. Après ces mots: feront assez voir, qui seront vers la fin de la premiere page de ce Postscriptum, ou gueres loin du commencement de la seconde, on peut adjouter: ce n'est qu'en France . . . . . . Et à la fin du premier §. dans la seconde page, apres ces mots: brouiller avec moy, on peut adjouter: la Societé Royale ne m'a point . . . .*) Je suis avec zele etc.

---

*) Die in Nr. 4 bemerkten Zusätze sind in dem Schreiben Leibnizens eingefügt.

LVIII.

Conti an Leibniz.

Aus Recucil de diverses pieces sur la philosophie, la religion naturelle etc. Herausgegeben von des Maizeaux, Amsterdam MDCCXX.

J'ai differé jusqu'à cette heure de repondre à votre Lettre, parce que j'ai voulu accompagner ma Réponse de celle que M. Newton vient à faire à l'Apostille que vous y avez ajoutée. Je n'entrerai dans aucun detail à l'égard de la dispute que vous avez avec M. Keill, ou plutôt avec M. Newton. Je ne puis dire qu' historiquement ce que j'ai vû, et ce que j'ai lû, et ce qu'il me manque encore de voir et de lire pour en juger comme il faut.

J'ai lû avec beaucoup d'attention et sans la moindre prevention le Commercium Epistolicum, et le petit Livre qui en contient l'Extrait.*) J'ai vû à la Societé Royal les Papiers Originaux des Lettres du Commercium, une petite Lettre écrite de votre main à M. Newton, l'ancien Manuscrit que M. Newton envoya au Docteur Barrow et que M. Jones a publié depuis peu.**)

De tout cela j'en infere, que si on ôte à la dispute toutes les digressions étrangeres, il ne s'agit que de chercher si Mr. Newton avoit le Calcul des Fluxions ou infinitésimal avant vous, ou si vous l'avez eu avant lui. Vous l'avez publié le premier, il est vrai, mais vous avez avoué aussi que Mr. Newton en avoit laissé entrevoir beaucoup dans les Lettres qu'il a écrites à Mr. Oldenbourg et aux autres. On prouve cela fort au long dans le Commercium et dans son Extrait. Quelles sont vos Réponses? Voila ce qui manque encor au Public, pour juger exactement de l'affaire.

Vos Amis attendent votre réponse avec beaucoup d'impatience, et il leur semble que vous ne sauriez vous dispenser de répondre, si non à M. Keil, du moins à M. Newton lui-même, qui vous fait un deffi en termes exprès, comme vous verrez dans sa Lettre.

---

*) C'est un Ecrit de 38 pages in 8, intitulé Extrait du Livre intitulé Commercium Epistolicum Collinii et aliorum de Analysi promota, publié par ordre de la Societé Royale, à l'occasion de la dispute elevée entre Mr. Leibniz et le Dr. Keil sur le Droit d'invention à la Methode des Fluxions, par quelques uns apellée Methode differentielle. On l'a inseré dans le Tome VII. du Journal Litteraire. Anmerkung von des Maizeaux.

**) Ce Manuscrit intitulé de Analysi per Aequationes infinitas a été publié en 1711 par Mr. Jones dans le Recueil qui a pour titre: Analysis per Quantitatum Series, Fluxiones ac Differentias, cum enumeratione Linearum tertii ordinis. Anmerkung von des Maizeaus.

Je voudrois vous voir en bonne intelligence. Le Public ne profite guere des Disputes, et il perd sans ressource pour bien des siecles toutes les lumieres que ces mêmes Disputes lui dérobent.

Sa Majesté a voulu que je l'informasse de tout ce qui s'est passé entre M. Newton et vous. Je l'ai fait de mon mieux, et je voudrois que ce fut avec succès pour l'un et pour l'autre.

Vôtre Probleme a été resolu fort aisément en peu de tems. Plusieurs Geometres à Londres et à Oxford en ont donné la solution. Elle est générale, car elle s'etend à toutes sortes de Courbes soit Geometriques soit Mécaniques. Le Probleme est un peu équivoquement proposé: mais je croi que M. de Moivre ne se trompe pas, en disant: qu'il faudroit fixer l'idée d'une suite de Courbes; par Exemple supposer qu'elles ayent la même soûtangeante pour la même Abscisse, ce qui conviendra non seulement aux Sections Coniques, mais à un infinité d'autres tant Geometriques que Mécaniques; on pourroit encore faire d'autres suppositions pour fixer cette idée.

Je vous parlerai une autre fois de la Philosophie de Mr. Newton. Il faut convenir auparavant de la Methode de Philosopher, et distinguer avec beaucoup de soin la Philosophie de Mr. Newton des consequences que plusieurs en tirent fort mal à propos. On attribue à ce grand homme bien des choses qu'il n'admet pas, comme il l'a fait voir à ces Messieurs François qui vinrent à Londres à l'occasion de la grande Eclipse.

Lorsque Mr. le Baron Discau reviendra de Pologne, je me donnerai l'honneur de vous entretenir plus souvent, et vous serez, peutêtre, bien aise de savoir ce qui se passe dans une Ville, où les Savans sont en si grand nombre, et où les Sciences et les Arts fleurissent plus que jamais.

Je vous remercie tres humblement de la Lettre sur le Systeme de Mr. Nigrisoli. La question n'est pas des plus importantes, ni le Philosophe des plus savans; mais quelquefois il faut ceder au tems et aux instances de ses Amis. Je suis avec tout le respect possible, Monsieur, vôtre etc.

A Londres le de Mars 1716.

LIX.

Newton an Conti

als Antwort auf Leibniz' Schreiben.

Aus The history of Fluxions by Joseph Raphson. London MDCCXV.

Leicester-Fields
London Febr. 26. 17$\frac{15}{16}$.

You know that the Commercium Epistolicum contains the ancient Lettres and Papers preserved in the Archives and Letter-Books of the Royal Society and Library of Mr. Collins relating to the Dispute between Mr. Leibnitz and Doctor Keill, and that they were collected and publish'd by a numerous Committee of Gentlemen of several Nations appointed by the Royal Society for that purpose. Mr. Leibnitz has hitherto avoided returning an Answer to the same; for the Book is matter of Fact and uncapable of an Answer. To avoid answering it he pretended the first Year that he had not seen this Book, nor had Leisure to examine it, but had desir'd an eminent Mathematician to examine it. And the Answer of the Mathematician (or pretended Mathematician) dated June 7, 1713, was inserted into a defamatory Letter dated July 29 following, and publish'd in Germany without the Name of the Author or Printer, or City where it was printed. And the whole has been since translated into French, and inserted into another abusive Letter (of the same Author as I suppose) and answer'd by Dr. Keill in July 1714, and no Answer is yet given to the Doctor.

Hitherto Mr. Leibnitz avoided returning an Answer to the Commercium Epistolicum, by pretending that he had not seen it. And now he avoids it, by telling you, That the English shall not have the Pleasure to see him return an Answer to their slender Reasonings (as he calls them) and by endeavouring to engage me in Disputes about Philosophy, and about solving of Problems; both which are nothing to the Question.

As for Philosophy, he colludes in the Significations of Words, calling those things Miracles which create no Wonder; and those things occult Qualities, whose Causes are occult, tho' the Qualities themselves be manifest; and those things the Souls of Men, which do not animate their Bodies. His Harmonia Praestabilita is miraculous, and contradicts the daily Experience of all Mankind; every Man finding in himself a Power of seeing with his Eyes, and moving his Body by his Will. He prefers Hypotheses to Arguments of Induction drawn from Experiments, accuses me of Opinions which are not mine; and instead of proposing Questions to be examin'd by Experiments before they

are admitted into Philosophy, he proposes Hypotheses to be admitted and believed before the are examin'd; But all this is nothing to the Commercium Epistolicum.

He complains of the Committee of the Royal Society, as if they had acted partially in omitting what made against me; but he fails in proving the Accusation. For he instances in a Paragraph concerning my Ignorance, pretending that they omitted it, and yet you will find it in the Commercium Epistolicum, pag. 74 lin. 10, 11, and I am not ashamed of it. He saith, That he saw this Paragraph in the Hands of Mr. Collins when he was in London the second time; that is, in October 1676. It is in my Letter of the 24th of Octob. 1676, and therefore he then saw that Letter. And in that and some other Letters writ before that Time, I describ'd my Method of Fluxions. And in the same Letter I described also two general Methods of Series, one of which is now claimed from me by Mr. Leibnitz.

I believe you will think it reasonable, that Mr. Leibnitz be constant to himself, and still acknowledge what he acknowledged above 15 Years ago, and still forbear to contradict what he forbore to contradict in those Days.

In his Letter of the 20th of May 1675, he acknowledg'd the Receipt of a Letter from Mr. Oldenburg, dated the 15th of April 1675, with several converging Series contained therein. And I expect from him, that he still acknowledge tke Receipt thereof. Many Gentlemen of Italy, France and Germany (your self being one of them) have seen the original Letters, and the Entries thereof in the old Letter-Books of the Royal Society; and the Series of Gregory is in the Letter of the 15th of April 1675 and in Gregory's Original Letter dated the 15th of Feb. 1671.

In a Letter dated the 12th of May 1676 (seen by the same Gentlemen) he acknowledged that he then wanted the Method for finding a Series for the Arc whose Sine was given, and by consequence that he wanted it when he wrote his Letter of the 24th of October 1674, and I expect that he still acknowledge it.

In the Acta Eruditorum for May 1700 in Answer to Mr. Fatio, who had said, That I was the oldest Inventor by many Years, Mr. Leibnitz acknowledged that no Body, so far as he knew, had the Method of Fluxions or Differences before me and him; and that no body before me had proved by a Specimen made publick that he had it. Here he allowed that I had the Method before it was published, or communicated by him to any Body in Germany; that the Principia Philosophiae were a Proof that I had it, and the first Specimen made publick of applying it to the difficulter Problems: And I expect that

he still continue to make the same Acknowledgment. At that Time he did not deny what Mr. Fatio affirmed, and nothing but want of Candor can make him inconstant to himself.

In a Letter to me dated the 7th of March 1693 and now in the Custody of the R. S. he wrote, Mirifice ampliaveras Geometriam tuis Seriebus, sed edito Principiorum opere, ostendisti patere tibi, quae Analysi receptae non subsunt. Conatus sum ego quoque Notis commodis adhibitis, quae Differentias et Summas exhibent, Geometriam illam quam transcendentem appello, Analysi quodammodo subjicere, nec res male processit. And what he then acknowledged, he ought still to acknowledge.

In his Letter of the 21st of June 1677 writ in Answer to mine of the 24th of October 1676, wherein I described my Method partly in plain Words, and partly in Cyphers; he said, That he agreed with me, that the Method of Tangents of Slusius was not yet made perfect, and then set down a differential Method of Tangents published by Dr. Barrow in the Year 1670 and disguised it by a new Notation, pretending that it was his own, and shewed how it might be improv'd, so as to perform those Things which I had ascribed to my Method, and concluded from thence, thas mine differ'd not much from his, especially since it facilitated Quadratures. And in the Acta Eruditorum for Octobr. 1684 in publishing the Elements of his Method, he added, That it extended to the difficulter Problems, which without this Method, or another like it, could not be managed so easily. He understood there fore in those Days, that in the Year 1676, when I wrote my said Letter, I had a Method which did the same Things with the Method he calls Differential, and he ought still to acknowledge it; especially now the Sentences in Cyphers are decyphered, and other Things in that Letter relating to the Method are fully explained, and the Compendium mentioned therein made publick.

In his Letter of the 27th of August 1676 he represented, that he did not believe that my Methods were so general as I described them in my Letter of the 13th of June preceeding, and affirmed that there were many Problems so difficult, that they did not depend upon Equations nor Quadratures, such as (amongst many others) were the Inverse Problems of Tangents. And by these Words he acknowledged that he had not yet found the Reduction of Problems to differential Equations. And what he then acknowledged, he acknowledged again in the Acta Eruditorum for April 1691 pag. 178 and ought in Candor to acknowledge still.

Doctor Wallis in the Preface to the two first Volumes of his

Works, published in April 1695, wrote, That I in my two Letters written in the Year 1676, had explained to Mr. Leibnitz the Method (called by me, The Method of Fluxions, and by him, The Differential Method) invented by me Ten Years before or above (that is in the Year 1666 or before:) and in the Letters which followed between them, Mr. Leibnitz had notice of this Paragraph*), and did not then contradict it, nor found any Fault with it; and I expect that he still forbear to contradict it.

But as he has lately attacked me with an Accusation which amounts to Plagiary; if he goes on to accuse me, it lies upon him by the Laws of all Nations to prove his Accusation, on Pain of being accounted guilty of Columny. He hath hitherto written Lettres to his Correspondents, full of Affirmations, Complaints and Reflections, without proving any thing. But he is the Agressor, and it lies upon him to prove his Charge.

I forbear to Descend further into Particulars, you have them in the Commercium Epistolicum, and the Abstract thereof, to both which I refer you. I am etc.

LX.

Leibniz an Conti.

Aus Recueil de diverses pieces etc. herausgegeben von des Maizeaux, mit Benutzung von Raphson's History of Fluxions.

C'est sans doute pour l'amour de la verité que vous vous etes chargé d'une espece de cartel de la part de M. Newton. Je n'ay point voulu entrer en lice avec des enfans perdus, qu'il avoit detachés contre moy, soit qu'on entende celuy qui a fait l'Accusateur sur le fondement du Commercium Epistolicum, soit qu'on regarde la Preface pleine d'aigreur qu'un autre a mise devant la nouvelle Edition de ses Principes. Mais puisqu'il veut bien paroistre luy même, je seray bien aise de luy donner satisfaction.

Je fus surpris au commencement de cette Dispute d'apprendre qu'on m'accusoit d'etre l'Aggresseur, car je ne me souvenois pas d'avoir parlé de M. N. que d'une maniere fort obligeante Mais je vis depuis qu'on abusoit pour cela d'un Passage des Actes de Leipzig du Janvier

*) See Wallis's Vol. 3 pag. 654 lin. 12.

1705, où il y a ces mots: Pro differentiis L . . . sianis, D. N . . . nus adhibet semperque adhibuit Fluxiones; où l'Auteur des Remarques sur le Commercium Epistolicum dit pag. 108: Sensus verborum est, quod N . . . nus Fluxiones differentiis L . . . . tianis substituit. Mais c'est une Interpretation maligne d'un homme qui cherchoit noise: il semble que l'Auteur des paroles inserées dans les Actes de Leipzig a voulu y obvier tout expres par ces mots: adhibet semperque adhibuit, pour insinuer, que ce n'est pas apres la veue de mes differences, mais dejà auparavant qu'il s'est servi de Fluxions. Et je defie qui que ce soit de donner un autre but raisonnable à ces paroles, semperque adhibuit. Au lieu qu'on se sert du mot substituit, en parlant de ce que le Pere Fabri avoit fait apres Cavallieri. D'où il faut conclure, ou que M. N. s'est laissé tromper par un homme qui a empoisonné ces paroles des Actes, qu'on supposoit n'avoir pas eté publiées sans ma connoissance, et s'est imaginé qu'on l'accusoit d'etre Plagiaire; ou bien qu'il a eté bien aisé de trouver un pretexte de s'attribuer ou faire attribuer privativement l'Invention du nouveau Calcul (depuis qu'il en remarquoit le succés, et le bruit qu'il faisoit dans le Monde) contre ses connoissances contraires avouées dans son Livre des Principes pag. 253 de la premiere Edition. Si l'on avoit fait connoitre qu'on trouvoit quelque difficulté ou sujet de plainte dans les paroles des Actes de Leipzig, je suis assuré que ces Messieurs qui ont part à ces Actes, auroient donné un plein contentement; mais il semble qu'on cherchoit un pretexte de rupture.

Je n'ay pas eu connoissance du numerous Committee of Gentlemen of several Nations relating to the Dispute; car on ne m'en a donné aucune part, et je ne say pas encor presentement les Noms de tous ces Commissaires, et particulierement de ceux qui ne sont pas des Isles Britaniques; je ne crois pas qu'ils approuvent tout ce qui a eté mis dans l'Ouvrage publié contre moy.

Il est aisé à croire que j'ay eté quelque temps à Vienne, avant que d'avoir vû le Commercium Epistolicum dejà publié, quoyque j'en eusse des nouvelles. Ainsi un ami sachaut cela, aussi zelé pour moy que les seconds de M. N. le peuvent être pour luy, a publié un Papier, que M. N. appelle diffamatoire (defamatory Letter). Mais cette Piece n'etant pas plus forte que ce qu'on a publié contre moy, M. N. n'a pas droit de s'en plaindre. Si l'on n'a pas marqué l'Auteur ny le Lieu de l'impression du Papier, on connoit assez le Nom et le Lieu de l'Auteur de la Lettre y inserée d'un excellent Mathematicien que j'avois prié de dire son sentiment sur le Commercium, et cela suffit. M. N. (dont les Partisans ont marqué qu'il ne leur etoit pas

inconnu) l'appelle un Mathematicien ou pretendu Mathematicien, et apres avoir fait inutilement des efforts pour le gagner, il le méprise contre l'opinion publique, qui le met entre ceux du premier rang, et contre l'evidence des choses verifiées par ses découvertes.

Lorsque j'eus enfin le Commercium Epistolicum, je vis qu'on s'y écartoit entierement du but, et que les Lettres qu'on publioit ne contenoient pas un mot qui peut faire revoquer en doute mon Invention du Calcul des Differences dont il s'agissoit. Au lieu de cela je remarquay qu'on se jettoit sur les Series, où l'on accorde l'avantage à M. N., et que les Remarques contenoient de Gloses mal tournées, pour tacher de me decrier par des soubçons sans fondement, quelque fois ridicules, et quelque fois forgés contre la conscience de quelques uns de ceux qui en étoient les auteurs ou approbateurs.

Pour repondre donc de point en point à l'Ouvrage publié contre moy, il falloit un autre Ouvrage aussi grand pour le moins que celuy-là, il falloit entrer dans un grand detail de quantité de minuties passées il y a 30 ou 40 Ans dont je ne me souvenois gueres; il me falloit chercher mes vieilles Lettres, dont plusieurs se sont perdues, outre que le plus souvent, je n'ay pas gardé les Minutes des miennes, et les autres sont ensevelies dans un grand tas de papiers, que je ne pouvois debrouiller qu'avec du temps et de la patience. Mais je n'en avois gueres le loisir, étant chargé presentement d'occupations d'une toute autre nature.

De plus je remarquay que dans la publication du Commercium Epistolicum on a supprimé des endroits qui pouvoient être au desadvantage de M. N. au lieu qu'on n'y a rien omis de ce qu'on croyoit pouvoir tourner contre moy par des gloses forcées. Comme je n'ay pas daigné lire le Commercium Epistolicum avec beaucoup d'attention, je me suis trompé dans l'exemple que j'ay cité, n'ayant pas pris garde, ou ayant oublié qu'il s'y trouvoit; mais j'en citeray un autre: M. N. avouoit dans une de ses Lettres à M. Collins, qu'il ne pouvoit point venir à bout des Sections secondes (ou Segments seconds) de Spheroides ou corps semblables: mais on n'a point inseré ce passage ou cette Lettre dans le Commercium Epistolicum; il auroit eté plus sincere par rapport à la Dispute, et plus utile au public, de donner le Commerce litteraire de M. Collins tout entier, là où il contenoit quelque chose qui meritoit d'être lû, et particulierement de ne pas tronquer les Lettres, car il y en a peu parmi mes Papiers, ou dont il me reste des Minutes.

Ainsi tout consideré, voyant tant de marques de malignité et de chicane, je crûs indigne de moy d'entrer en discussion avec des gens

qui en usoient si mal. Je voyois qu'en les refutant on auroit de la peine à éviter des reproches et des expressions fortes, telles que meritoit leur procedé; et je n'avois point envie de donner ce spectacle au public, ayant dessein de mieux employer mon temps, qui me doit être pretieux, et meprisant assez le jugement de ceux qui sur un tel ouvrage voudroient prononcer contre moy, d'autant que la Societé Royale même ne l'a point voulu faire, comme je l'ay appris par un Extrait de ses Registres.

Je ne crois point d'avoir dit (comme M. N. me l'impute) que les Anglois n'auroient point le plaisir de me voir repondre à des raisonnements si minces; car je ne crois point que tous les Anglois fassent leur cause de celle de M. N.; il y en a de trop habiles et de trop honnêtes pour épouser les passions de quelques uns de ses Adherens.

Apres cela, il m'accuse d'avoir voulu faire diversion, en combattant sa Philosophie, et en voulant l'engager dans des Problemes; mais quant à la Philosophie, j'ay donné publiquement quelque chose de mes Principes sans attaquer les siens; si ce n'est que par occasion j'en ay parlé dans des Lettres particulieres, depuis qu'on m'en a donné sujet; et pour ce qui est des Problemes, je n'ay garde d'en proposer à M. N., car je ne voudrois pas m'y engager quand on m'en proposeroit à moy; nous pouvons nous en dispenser à l'age où nous sommes, mais nous avons des amis qui y peuvent suppléer à notre defaut.

Je ne veux point entrer icy dans le detail de ce que M. N. dit un peu aigrement contre ma Philosophie, car pour la sienne, ce n'en est point le lieu. J'appelle Miracle tout Evenement qui ne peut être arrivé que par la Puissance du Createur, sa raison n'étant pas dans la Nature des Creatures, et quand on veut neanmoins l'attribuer aux qualités ou forces des Creatures, alors j'appelle cette Qualité une Qualité occulte à la Scholastique, c'est à dire qu'il est impossible de rendre manifeste, telle que seroit une pesanteur primitive; car les Qualités occultes qui ne sont point chimeriques, sont celles dont nous ignorons la cause, mais que nous n'excluons point; et j'appelle l'Ame de l'homme cette Substance simple qui s'apperçoit de ce qui se passe dans le corps humain, et dont les appetits ou volontés sont suivis par les efforts du corps. Je ne prefére pas les Hypotheses aux Arguments tirez de l'induction des experiences, mais quelque fois on fait passer pour inductions generales ce qui ne consiste qu'en observations particulieres, et quelque fois on veut faire passer pour une Hypothese ce qui est demonstratif. L'Idée que M. N. donne icy de mon Harmonie préetablie n'est pas celle qu'en ont quantité d'habiles gens hors d'Angleterre, et quelques uns en Angleterre; et je ne crois pas que

vous même, Monsieur, en ayez eu une semblable, ou l'ayés maintenant, à moins que d'être bien changé.

Je n'ay jamais nié qu'à mon second voyage en Angleterre j'aye vû quelques Lettres de M. N. chez Monsieur Collins, mais je n'en ay jamais vû, où M. N. ait expliqué sa Methode des Fluxions, et je n'en trouve point dans le Commercium Epistolicum.

Je n'ay pas vû non plus qu'il ait expliqué la Methode des Series que je m'attribue; je crois qu'il veut parler de celle, où je prends une Serie arbitraire; je l'ay fait avant mon second retour en Angleterre. Je ne nie pourtant pas, que M. N. n'eut pû l'avoir aussi, et ce n'est pas même une invention fort difficile.

M. N. veut que j'avoue et que j'accorde ce que j'ay avoué ou accordé il y a 15 Ans, ou autrement on devroit en attendre de luy autant; car il y a maintenant deux fois quinze Ans, que dans la premiere Edition de ses Principes pag. 253, 254 il m'accorde l'invention du Calcul des Differences, independement de la sienne, et depuis il s'est avisé je ne scay comment de faire soutenir le contraire.

Il est bon de sçavoir qu'à mon premier voyage d'Angleterre en 1673, je n'avois pas la moindre connoissance des Series infinies, telles que M. Mercator venoit de donner, ny d'autres matieres de la Geometrie avancée par les dernieres Methodes; je n'etois pas même assez versé dans l'Analyse de Des Cartes; je ne traitois les Mathematiques que comme un Parergon, et je ne sçavois guere que la Geometrie practique vulgaire, quoyque j'eusse vû par hazard la Geometrie des indivisibles de Cavalleri, et un Livre de Pere Leotaud, où il donnoit les Quadratures de Lunules et Figures semblables, ce qui m'avois donné quelque curiosité; mais je me divertissois plustôt aux proprietez des Nombres, à quoy le petit Traité que j'avois publié presque petit garçon de l'Art des Combinaisons en 1666 m'avoit donné occasion, et ayant observé des lors l'usage des Differences pour les Sommes, je l'appliquoy à des suites de Nombres. On voit bien par mes premieres Lettres échangées avec M. Oldenbourg, que je n'etois guere allé plus avant, aussi n'avois je point alors la connoissance de M. Collins, quoyqu'on ait feint malicieusement le contraire.

Ce fut peu à peu que M. Hugens me fit entrer en ces matieres, quand je le pratiquois à Paris, et cela joint au Traité de M. Mercator (que j'avois rapporté avec moy d'Angleterre, parceque M. Pell m'en avoit parlé) me fit trouver environ la fin de l'An 1673 ma Quadrature Arithmetique du Cercle qui fut fort approuvée par M. Hugens, et dont je parlay à M. Oldenbourg dans une Lettre de l'An 1674; alors ny M. Hugens ny moy, nous ne scavions rien des Series de M. N. ny

de M. Gregory. Ainsi je crus être le premier qui eut donné la valeur du cercle par une suite de nombres rationaux; et M. Hugens le crut aussi; j'en écrivis sur ce ton là à M. Oldenbourg qui me repondit qu'on avoit déja de telles Series en Angleterre, et l'on voit par ma Lettre du 15 Juillet de 1674 et par la reponse de M. Oldenbourg du 8 Decembre de la même Année que je n'en devois avoir aucune connoissance alors, autrement M. Oldenbourg n'auroit pas manqué de me le faire sentir, si luy ou M. Collins m'en eussent communiqué quelque chose auparavant. Ce ne fut donc qu'alors que j'en appris quëlque chose; mais je ne scavois pas alors les Extractions des Racines des Equations par des Series, ny les Regressions ou l'Extraction d'une Equation infinie; j'etois encor un peu neuf en ces matieres, mais je trouvay pourtant bientôt ma Methode generale par des Series arbitraires, et j'entray enfin dans mon Calcul des differences, où les observations que j'avois faites encor fort jeune sur les differences des suites des nombres, contribuèrent à m'ouvrir les yeux; car ce n'est pas par les Fluxions des lignes, mais par les differences des nombres que j'y suis venu en considerant enfin que ces differences appliquées aux grandeurs qui croissent continuellement, s'evanouissent en comparaison des grandeurs differentes, au lieu qu'elles subsistent dans les suites des Nombres. Et je crois que cette voye est la plus analytique, le Calcul Geometrique des differences qui est le même que celuy des Fluxions, n'etant qu'un cas special du Calcul Analytique des Differences en General, et ce cas special devient plus commode par les evanouissements.

M. N. allegue par apres les passages, où j'accorde qu'il y a un Calcul approchant de mon Calcul des differences, mais il pourra bien se souvenir qu'il m'en a accordé autant, et s'il luy est permis de se retracter, pourquoy ne me serat-il pas permis d'en faire autant? Sur tout apres les verisimilitudes que M. Bernoulli a remarquées. J'ay une si grande opinion de la candeur de M. N. que je l'ay crû sur la parole, mais le voyant conniver à des accusations dont la fausseté luy est connue, il etoit naturel qui je commençasse de douter.

Je ne puis avouer ny desavouer aujourdhuy d'avoir écrit ou receu des Lettres écrites il y a plus de 40 ans telles qu'on les a publiées; je suis obligé de m'en rapporter à ce qui se trouve dans les Papiers qu'on cite, mais je ne remarque rien contre moy dans celles que M. N. allegue du 15 Avril et 20 May 1675 et 20 Octobre 1676, sinon dans les faussetez du Glosateur. Je crois que c'etoit purement par distraction dans un sejour comme celuy de Paris, où je m'occupois à bien d'autres choses encor qu' aux Mathematiques, et par l'éloignement que j'avois des calculs dont je craignois la longeur, que j'ay demandé

quelque fois à M. Oldenbourg la demonstration ou la methode d'arriver à certaines choses où j'aurois bien pû arriver moy même. Par exemple, je crois d'avoir déja eu au douze de May 1676 ma methode d'une Serie arbitraire, qui m'auroit pû mener à des Series dont j'y demande la raison. Car ayant consulté mon vieux Traité de la Quadrature Arithmetique achevé quelque temps avant ma sortie de France, je me sers de la Serie arbitraire; cependant les Series marquées dans cette Lettre sont une chose dont je consens d'être redevable à d'autres, et je crois de ne les avoir pas même connues en 1674.

N'entendant pas bien ce que M. N. allegue des Actes de Leipzig de May 1700, j'y ay regardé, et je trouve qu'il n'en a pas bien pris le sens. Il n'y est point parlé de l'invention du nouveau calcul des differences, mais d'un artifice particulier des Maximis et Minimis, qui en est independant, et dont je m'etois avisé bien du temps avant que M. Bernoulli eut proposé son probleme de la plus courte descente, mais dont je jugeois que M. N. se devoit être avisé aussi, lorsqu'il avoit donné la figure de son Vaisseau dans ses Principes. Ainsi j'ay voulu dire, qu'il a fait connoître publiquement avant moy, qu'il possedoit cet artifice, ce que je ne pouvois pas dire du Calcul des Differences et des Fluxions, puisque j'en avois fait voir l'utilité publiquement avant la publication de ce Livre. Cet artifice particulier de Maximis et Minimis n'est point necessaire, quand il s'agit simplement d'une grandeur (car lors la methode de M. Fermat perfectionnée par les nouveaux calculs suffit), mais quand il s'agit de toute une Figure qui doit faire le mieux un effect demandé, il faut autre chose.

M. N. hazarde icy une accusation, mais qui va tomber sur luy même. Il pretend que ce que j'ay écrit pour luy à M. Oldenbourg en 1677 est un déguisement de la methode de M. Barrow. Mais comme M. N. avoue dans la pag. 253 et 254 de la premiere Edition de ses Principes, Me ipsi tunc Methodum communicasse a Methodo ipsius vix abludentem praeter quam in verborum et notarum formulis, il s'ensuivra que sa methode aussi n'est qu'un déguisement de celle de M. Barrow.

Je croy que luy et moy nous serons aisement quittes de cette accusation: car une infinité des gens liront le Livre de M. Barrow, sans y trouver nôtre calcul; il est vray que feu M. Tschirnhaus qui s'apperceut un peu tard de l'avantage de ce calcul, pretendoit qu'on pouvoit arriver à tout cela par les methodes de M. Barrow. Comme l'Abbé Catelan François pretendit que même l'Analyse de Des Cartes suffisoit pour toutes ces choses, mais il etoit plus aisé de le dire que de le montrer.

Cependant si quelqu'un a profité de M. Barrow, ce sera plustôt M. N. qui a étudié sous luy que moy qui (autant que puis m'en souvenir) n'ay veu les Livres de M. Barrow qu'à mon second voyage d' Angleterre, et ne les ay jamais lûs avec attention, parcequ' en voyant le Livre, je m'apperçus que par la consideration du Triangle Characteristique (dont les cotez sont les elemens de l'abscisse, de l'ordonnée et de la courbe) semblable à quelque Triangle assignable, j'etois venu comme en me jouant aux Quadratures, Surfaces et Solides dont M. Barrow avoit remply un chapitre des plus considerables de ses Leçons, outre que je ne suis venu à mon Calcul des differences dans la Geometrie qu' apres en avoir vû l'usage (mais moins considerable) dans les Nombres, comme mes premieres Lettres dans le Commercium Epistolicum le peuvent insinuer. Il se peut que M. Barrow en ait plus sçu qu'il n'a pas dit dans son Livre, et qu'il a donné des lumieres à M. N. que nous ne scavons pas, et si j'etois semblable à certains temeraires, je pourrois asseurer sur de simples soubçons, sans autre fondement, que le Calcul des Fluxions de M. N. quel qu'il puisse être, luy a eté enseigné par M. Barrow.

On peut bien juger que lorsque j'ay parlé en 1676 des problemes qui ne dependoient ny des equations ny des quadratures, j'ay voulu parler des equations telles qu'on connoissoit alors dans le monde, c'est à dire des equations de l'Analyse ordinaire. Et on le peut juger de ce que j'ajoute les quadratures comme quelque chose de plus que ces equatious. Mais les Equations Differentielles vont au delà même des Quadratures, et l'on voit bien que j'entendois même parler des problemes qui vont à ces sortes d'equations inconnues alors au public; cette objection se trouvoit déja dans les remarques au Commercium, mais je n'avois point crû que M. N. etoit capable de l'employer.

Je juge par un endroit de ma Lettre du 27 d'Aoust 1676 (pag. 65 du Commercium Epistolicum) que je devois déja avoir alors l'ouverture du calcul des differences, car j'ay dit d'avoir resolu d'abord par une certaine Analyse (certa Analysi solvi) le probleme de M. de Beaune proposé à M. Des Cartes; si cette Analyse n'etoit que cela, on le peut resoudre sans cela; et je crois que Monsieur Hugens et Monsieur Barrow l'auroient donné au besoin comme beaucoup d'autres choses, mais selon ma maniere de noter, ce n'est qu'un jeu. Je trouve une petite faute dans cette page: il y a ludus naturae au lieu de hujus naturae, mais cette faute etoit ancienne et se devoit déja trouver dans la copie de ma Lettre du 24 Octobre 1676 pag. 86 du Commercium (Hos casus vix numeraverim inter ludos naturae).

Je n'avois point entendu ce qu'il vouloit dire, mais à present je vois l'origine de la méprise.

Je ne scaurois dire aujourdhuy si j'ay remarqué le passage de M. Wallis, où il dit que M. N. scavoit déja la Methode des Fluxions en 1666. Mais quand je l'aurois remarquè, je l'aurois laissé passer apparemment, étant fort porté alors à croire M. N. sur sa parole. Mais son dernier procedé m'a forcé d'être plus circomspect à cet égard.

M. N. dit que je l'ay accusé d'être plagiaire, mais où est ce que je l'ay fait? Ce sont ses Adherens qui ont paru intenter cette accusation contre moy, et il y a connivé. Je ne scay pas s'il adopte entierement ce qu'ils ont publié, mais je conviens avec luy, que la malice de celuy qui intente une telle accusation sans la prouver, le rend coupable de calomnie.

Il finit sa Lettre en m'accusant d'être aggresseur, et j'ay commencé celle cy en prouvant le contraire. Il sera fort aisé de vuider ce point preliminaire. Il y a eu du mesentendu, mais ce n'est pas ma faute. Au reste je suis avec zele etc.*)

Hannover
ce 9 d'Avril 1716.

Apostille.

Vous avez donné, Monsieur, la solution d'un Probleme que les Partisans de M. Newton n'avoient point trouvée jusqu'ici: car vous avez trouvé le moyen de me faire répondre en m'envoiant une Lettre de M. Newton lui-même. Après cela vous n'aviez pas besoin de me faire des exhortations là dessus. Si la Question avoit été seulement, lequel de nous deux, de M. Newton ou de moi, a trouvé le premier le Calcul en question, je ne m'en mettrois point en peine. Aussi est-il difficile de décider ce que l'un ou l'autre peut avoir gardé in petto, et combien long-tems. Mais un Adherent de M. Newton a prétendu que je l'avois appris de lui, et depuis il a paru plus probable à quelques autres et même à M. Bernoulli, que la maniere de calculer que M. Newton a publiée dans les Oeuvres de M. Wallis a été fabriquée à l'imitation de mon Calcul des Differences deja publié. Il n'y a pas

*) Dem vorstehenden Schreiben hat der Herausgeber von Raphson's History of Fluxions die folgende Bemerkung hinzugefügt: Cum D. Leibnitius adduci non posset, ut vel Commercio Epistolico responderet, vel probaret quae pro habitu affirmabat, cumque praecedentes Epistolas in Galliam prius mitteret quam earum tertia in Angliam veniret, et praetenderet se hoc facere, ut testes haberet, et alias etiam adhiberet contumelias: Newtonus minime rescripsit, sed Observationes sequentes in Epistolam illam tertiam scriptas cum amicis solummodo communicavit.

la moindre trace ni ombre du Calcul des Differences ou Fluxions dans toutes les anciennes Lettres de M. Newton que j'ai vûes, excepté dans celle qu'il a écrite le 24 d'Octobre 1676, où il n'en a parlé que par enigme, et la solution de cette enigme qu'il n'a donnée que dix ans aprés, dit quelque chose, mais elle ne dit pas tout ce qu'on pourroit demander. Cependant, prevenu pour M. Newton, j'ai eu autre fois la condescendance d'en parler, comme si elle disoit presque tout, et c'est aprés moi que d'autres en ont parlé de même. Mon honneteté a été mal reconnue.

Vous me dites, Monsieur, que M. Jones a publié une de mes Lettres à M. Newton: aiez la bonté de m'apprendre où*).

C'est aller un peu vite que de dire que mon Probleme a été resolu fort aisément. Je croi qu'il n'a point été resolu du tout. Car de donner quelques cas faciles, comme dans les Coniques, et de se restraindre au cas de la soutangeante etc. ce n'est pas faire grand chose. M. Bernoulli l'a resolu par une methode générale. On fixe assez l'idée en disant, qu'il s'agit généralement de toutes sortes de lignes qui ne different entr'elles dans leurs constructions que par les changemens d'une seule droite constante dans la ligne et changeant de ligne en ligne. Prenez telle ligne qu'il vous plaira, vous aurez d'abord par cette methode une suite d'infinité d'autres.

Je m'etonne, Monsieur, que vous dites qu'avant que de parler de la Philosophie de M. Newton, il faut convenir de la methode de philosopher. Est-ce qu'il y a une autre Logique à Londres qu'à Hanover? Quand on raisonne en bonne forme sur des faits bien averez, ou sur des Axiomes indubitables, on ne manque pas d'avoir raison. Si les sentimens de M. Newton sont meilleurs qu'on n'a dit, tant mieux: je serai toujours bien aise de lui rendre justice.

Je voi bien que vous n'avez pas encore eu le loisir, Monsieur, de toucher à rien de tout ce que j'avois eu l'honneur de vous écrire, excepté ce qui regarde M. Newton. J'aurois souhaité d'apprendre quelques nouvelles de M. Wren et de quelques autres excellents hommes. Mais je ne puis vous les demander qu'en grace, et chacun est le maître des graces qu'il veut faire. Cependant si vous en apprenez quelque chose, ou quelques autres Particularitez de Doctrine, que vous voudriez bien me communiquer, comme vous me le faites esperer, je vous supplie de ne me point remettre jusqu'à l'arrivé de M. le Baron Discau en Angleterre, pour m'en faire part, puisque tous les Ordinaires me peuvent apporter l'honneur de vos Ordres, et vous voyez

*) M. Leibniz confond ici le Traité de M. Newton de Analysi etc. publié par Jones avec la Lettre de M. Leibniz à M. Newton écrite en 1693. Anmerkung von des Maizeaux.

que je n'attends pas le retour de M. Discau de Pologne, pour vous repondre.

Je croi de vous avoir dit, Monsieur, que le Regne de Charles II. (au moins dans sa premiere moitié) me paroissoit le siécle d'or des Sciences en Angleterre. Il semble que je vous ai paru comme ce viellard d'Horace, laudator temporis acti, et que vous avez voulu me redresser là dessus, en disant que les Sciences et les Arts fleurissent à present à Londres plus que jamais. Vous m'obligerez fort si vous me le faites connoître, car j'en serai ravi. Mais des gens mieux informez que moi, m'ont avoué que depuis quelque tems on s'étoit trop attaché à i ghiribizzi della Politica, et aux Controverses de Religion. Je voudrois voir revivre un Prince Robert dans les Mecaniques, un M. Boyle dans la Chymie, un M. Hook dans les Observations du Microscope, un M. Sydenham ou M. Lister dans celles de la Medecine, un M. Ray dans la Botanique, et ainsi des autres. Et quand M. Wren, M. Newton, M. Flamsteed, M. Halley, M. Sloane, M. Woodward, et M. Wotton ne seront plus, je ne sai si les gens qui paroissent à présent les pourront remplacer. Il semble que presque tous les Adherens de M. Newton ne sont à présent que Copistes, et que les plus aigres le sont le plus. Mais quand les présentes passions qui divisent la Nation seront appaisées, j'espere que les esprits, encouragez par le Roi et par le Prince (pour ne rien dire de la Princesse) reprendront leur ancien lustre.

J'ai peur que ma Lettre précedente sur le systeme de M. Nigresoli vous aura donné aussi peu de contentement que le Systeme même, puisque vous n'en dites rien d'avantage. Mais j'ai toujours voulu vous marquer mon zele.

Vous voyez que l'Apostille est pour vous, Monsieur, et la Lettre est plutôt pour M. Newton, à l'exemple de celle qu'il vous a écrite.

Beilage.

Leibniz an Remond.

Hanover ce 9. d'Avril 1716.

Je prends la liberté de vous envoyer les Pieces d'un Procès nouveau ou renouvellé, puisque vous avez eu la bonté de vous interesser pour moi. M. l'Abbé Conti, qui avoit fait des démarches de Mediateur, m'a envoyé maintenant un Cartel de Defi de la part de M. Newton. Je reponds à la Lettre de l'un et de l'autre par la Lettre et par l'Apostille ci-jointes: c'est-à-dire à M. Newton dans la Lettre

et à M. l'Abbé dans l'Apostille, et je suis bien aise, Monsieur, que vous et vos amis et particulierement M. l'Abbé Varignon (et d'autres personnes de l'Academie Royale des Sciences, à qui il en voudra faire part) en soient informez. Je vous supplie de garder la copie des Lettres de l'Abbé et de M. Newton, et d'envoyer ma Réponse à M. l'Abbé. Vous voyez bien, Monsieur, pourquoi j'ai voulu me servir de la voie de la France, au lieu de répondre directement d'ici. Si vous croyez, Monsieur, que cette Réponse vaille la peine qu'on en garde aussi une copie, cela dépend de votre jugement. Mais je ne voudrois pas qu'on imprimât rien sans mon consentement. Je ne fais point d'autres reflexions sur ces Lettres; on en fera assez sans moi.

J'ai pris la liberté de vous dire dernierement, Monsieur, que je souhaiterois que l'Academie Royale des Inscriptions vît mon Discours de Origine Francorum et que je voudrois que cela se fît avant qu'on en parlât dans les Memoires de Trevoux. Je laisse la disposition de cela à vos bontez.

Il y a deja du tems, Monsieur, que je vous ai envoyé mon Sentiment sur le Livre fait contre le Pere Malebranche: peut-être que les Reverends Peres Jesuites, aussi bien que les Amis de ce Pere ne sont point fachez de le voir. Ce que j'ai crû conforme à la verité m'a fait prendre le parti du milieu.

Au reste, je me rapporte à ma precedente, et je suis avec zele, Monsieur, votre etc.

P. S. Je vous envoye la Lettre à M. l'Abbé Conti sub sigillo volante, et il n'est point necessaire que vous la fermiez. Je veux bien qu'on sache que vous l'avez vûe, Monsieur, et que je suis bien aise que vous en soyez informé.

LXI.

Newton's Bemerkungen
in Betreff des vorhergehenden Schreibens von Leibniz.

Aus Raphson's History of Fluxions.

Mr. Leibnitz by his Letter of the 29th of December 1711, justified the Passage in the Acta Eruditorum for January 1705 pag. 34 and 35, and thereby made it his own, and now endeavours in vain to

excuse it, pretending that the Words adhibet semperque adhibuit are maliciously interpreted by the Word substituit. But in the Interpretation which he would put upon the Place, he omits the Words igitur and quemadmodum, the first of which makes the Words semperque adhibuit, a Consequence of what went before, and the latter makes them equipolent to substituit; neither of which can be true in the Sense which Mr. Leibnitz endeavours now to put upon the Words. He has therefore accused me. In both his Letters to Dr. Sloan (that dated the 4th of March, and that dated the 29th of December 1711) he pressed the Royal Society to condemn Dr. Keill; and before I meddled in this matter challenged me to declare my Opinion. His Words in his second Lettre are: Itaque vestrae aequitati committo, annon coercendae sint vanae et injustae (Keillii) vociferationes, quas ipsi Newtonio, viro insigni et gestorum optime conscio, improbari arbitror, ejusque sententiae suae libenter daturum indicia mihi persuadeo. The Words are civil, but the Sense is, That I must either condemn Dr. Keill, or enter into a Quarrel with Mr. Leibnitz, as has happen'd; and therefore he is the Aggressor. For it is very well known here, that I constantly endeavoured to avoid these Disputes, till they were pressed upon the Royal Society and me.

In his Letter of the 4th of March st. n. 1711 he pressed the Royal Society to condemn Dr. Keill without hearing both Parties; and when the Doctor put in his Answer, Mr. Leibnitz refused to give his Reasons against the Doctor, and call'd it Injustice to expect it from him, and yet persisted in pressing them against him, and thereby put them upon a Necessity of appointing a Committee to search out old Papers, and give their Opinion upon them. If they did it without him, it was his own Fault: He was for over ruling them, and called it Injustice to expect that he should defend his Candor, and plead before them. If they gave him no Opportunity to except against any of the Committee, it was because he refused to be heard, and they had a sufficient Authority to appoint a Committee without him, and he had no Right to except against what they did for their own Satisfaction. If they have not yet given Judgment against him, it is because the Committee did not act as a Jury, nor the Royal Society as a formal Court of Justice. The Committee examined old Letters and Papers, and gave their Opinion upon them alone, and left room for Mr. Leibnitz to produce further Evidence for himself. And it is sufficient that the Society ordered their Report, with the Papers upon which it was grounded, to be published; and that Mr. Leibnitz in all the

three Years and four Months which are since elapsed, has not been able to produce any further Proof against Dr. Keill than what was then before them.

Mr. Leibnitz saith, That the Letter which I call Defamatory, being no sharper than that which has been published against him, I have no Reason to complain. But the sharpness of the Letter lies in Accusations and Reflections, without any Proof; which way of Writing is unlawful and infamous, and never used but in a bad Cause. The sharpness of the Commercium lies in Facts which are lawful and fit to be produced. The Letter was published in a clandestine, back-biting manner (as defamatory Papers use to be) without the Name of the Author, or Mathematician, or Printer, or City where it was printed, and was dispersed above two Years before we were told that the Mathematician was John Bernoulli; the Commercium was printed openly at London by Order of the Royal Society.

The Mathematician to whom Mr. Leibnitz appealed from the Royal Society, I called a Mathematician, or pretended Mathematician, not to disparage the Skill of Mr. Bernoulli, but because the Mathematician in his Letter of the 7th of June 1673, cited Mr. Bernoulli as a Person distinct from himself; and Mr. Leibnitz lately caused that Letter to be reprinted without the Citation, and tells us, that the Mathematician was Mr. Bernoulli himself: And whether the Mathematician, or Mr. Leibnitz is to be believed, I do not know. Mr. Bernoulli had the differential Method from Mr. Leibnitz, and was the chief of his Disciples, and gave his Opinion for his Master in the Acta Leipsica before he saw the Commercium Epistolicum; at which Time he was homo novus et rerum ante actarum parum peritus, as Mr. Leibnitz objected against Dr. Keill; and what he wrote after he saw the Commercium was in his own Defence, and his Skill in Mathematicks will not mend the matter.

He complains that the Committee have gone out of the way, in falling upon the Method of Series: But he should consider that both Methods are but two Branches of one general Method of Analysis: I joyn'd them together in my Analysis I interwove them in the Tract which I wrote in the Year 1671, as I said in my Lettres of the 10th of December 1672, and the 24th of October 1676. In my Letter of the 13th of June 1676, I said, that my Method of Series extended to almost all Problems, but became not general without some other Methods, meaning (as I said in my next Letter) the Method of Fluxions, and the Method of Arbitrary Series; and now to take those other Methods from me, is to restrain and stint the Method of Series, and make it cease to be general. In my Letter of the 24th of October 1676, I

called all these Methods together, my general Method. See the Commercium Epistolicum pag. 86. lin. 16. And if Mr. Leibnitz has been tearing this general Method in pieces, and taking from me first one Part, and then another Part, whereby the rest is maimed, he has given a just Occasion to the Committee to consider the Whole. It is also to be observed, That he is perpetually giving Testimony for himself, and it's allowed in all Courts of Justice to speak to the Credit of the Witness.

He represents, That the Committee of the Royal Society have omitted Things which made against me, and printed every Thing which could be tourned against him by strained Glosses; and to make this appear, he produces in his last Letter but one, an Instance of my Ignorance omitted by them, but confesses now that he was mistaken in saying that it was omitted, and saith that he will cite another Instance. He saith, That in one of my Letters to Mr. Collins, I owned that I could not find the second Segments of Sphaeroids, and that the Committee have omitted this. If they had omitted such a Passage, I think they would have donne right, it being nothing to the purpose. But on the contrary, Mr. Collins in a Letter to Mr. James Gregory the 24th of Decemb. 1670, and in another to Mr. Bertet the 21st of Feb. 1671, both printed in the Commercium Epistolicum pag. 24, 26. wrote, That my Method extended to second Segmens of round Solids. And Mr. Oldenbourg wrote the same thing to Mr. Leibnitz himself the 8th of December 1674. See the Commercium Epistolicum pag. 39. So you see that Mr. Leibnitz hath accused the Committee of the Royal Society, without knowing the Truth of his Accusation, and therefore is guilty of a Misdemeanour. The Committee were so far from acting corruptly against Mr. Leibnitz, that they took no Notice of his Ignorance of Geometry in those Days, and omitted several other things which made strongly against him, such as were the two Letters in my Custody, and the Paragraph in the Preface to the two first Volumes of Dr. Wallis's Works relating to this matter, and that a Copy of Gregory's Letter of the 5th of Septemb. 1670, was sent to Mr. Leibnitz in June 1676, amongst the Extracts of Gregory's Letters.

The Committee in their Report, affirmed, That they had extracted from the ancient Letters, Letter-Books, and Papers, what related to the Matter referred to them: All which Extracts delivered by them to the Society, they believed to be genuine and authentick. Mr. Leibnitz accuses them for not printing the Letters entire (including as well what did not relate to the matter referred to them, as what did relate to it) as if it were not lawful to cite a Paragraph out of a Book,

without citing the whole Book. Thus he complains, that the Commercium Epistolicum should have been much bigger. But when he is to answer it, he complains that it is too big, and would require an Answer as big as it self. And so the ancient Lettres and Papers must be laid aside, and the Question must be run off into a Squabble about Philosophy and other matters: And the great Mathematician, who in his Letter to Mr. Leibnitz, dated the 7th of June 1713, concealed his Name, that he might pass for an impartial Judge, must now pull off his Mask, and become a Party-man in this Squabble, and send a Challenge by Mr. Leibnitz to the Mathematicians in England, as if a Duel, or perhaps a Battel between what he calls my forlorn Hope, and the Army of Disciples in whom he boasts himself happy, were a fitter way to decide the Truth, than an Appeal to ancient and authentick Writings; and Mathematicks must henceforward be filled with Atchievements in Knight-errantry, instead of Reasons and Demonstrations.

Mr. Leibnitz acknowledges, that when he was in London the second time, he saw some of my Letters in the Hands of Mr. Collins, especially those relating to Series; and he has named two of them which he then saw, viz. that dated the 24th of October 1676, and that in which he pretends that I confessed my Ignorance of second Segments. And no doubt he would principally desire to see the Letter which contained the chief of my Series, and particulary that which contaiued those two for finding the Arc by the Sine, and the Sine by the Arc, with the Demonstration thereof, which a few Months before he had desired Mr. Oldenbourg to procure from Mr. Collins; that is, the Analysis per aequationes numero terminorum infinitas. But yet he tells us, that he newer saw where I explained my Method of Fluxions, and that he finds nothing of it in the Commercium Epistolicum, where that Analysis and my Letters of the 10th of December 1672, 13th of June 1676, and the 24th of Octob. 1676, are published. I suppose he means, because he finds no prick'd Letters there. And by the same way of arguing, he and Mr. Bernoulli may pretend that they find nothing of the Method of Fluxions in the Introduction to the Book of Quadratures.

He saith also, That he never saw where I explain the Method claimed by me, in which he assumes an arbitrary Series. If he pleases to look into the Commercium Epistolicum pag. 56 and 86, he will there see that I had that Method in the Year 1676, and five Years before. And Dr. Wallis in the second Volume of his Works pag. 393 lin. 32 has told him, That this Method needs no further Explication

than what I there gave of it. Mr. Leibnitz might find it himself, but not so early; and second Inventors have no Right.

He pretends, that in my Book of Principles pag. 253, 254, I allowed him the Invention of the Calculus Differentialis, independently of my own; and that to attribute this Invention to my self, is contrary to my Knowledge there avowed. But in the Paragraph there refered unto, I do not find one Word to this purpose. On the contrary, I there represent, that I sent Notice of my Method to Mr. Leibnitz before he sent Notice of his Method to me; and left him to make it appear that he had found his Method before the Date of my Letter; that is, eight Months at the least before the Date of his own. And by referring to the Letters which passed between Mr. Leibnitz and me ten Years before, I left the Reader to consult those Letters, and interpret the Paragraph thereby. For by those Letters he would see that I wrote a Tract on that Method, and the Method of Series together, five Years before the writing of those Letters; that is, in the Year 1671. And these Hints were as much as was proper in that short Paragraph, it being besides the Design of that Book to enter into Disputes about these Matters.

He saith, That when he was in London the first Time, which was in Jauuary and February 1673, he knew nothing of infinite Series, nor of the avanced Geometry, nor was then acquainted with Mr. Collins, as some have maliciously feigned. But who hath feigned this, or what need there was of feigning it, I do not know. At hat Time Dr. Pell gave him Notice of Mercator's Series for the Hyperbola, and he carried Mercator's Book with him to Paris, tho' he did not yet understand the higher Geometry. And any of those to whom Mr. Collins had communicated mine and Gregory's Series, might give him Notice of them, without his being acquainted with Mr. Collins.

He saith, That after his coming from London to Paris, his first Letters were of other matters than Geometrical, till Mr. Huygens had instructed him in these Things; and that he found the Arithmetical Quadrature of the Circle towards the End of the Year 1673, and began to write of it to Mr. Oldenbourg the next Year, and found the general Method by Arbitrary Series a little after, and the Differential Calculus in the Year 1676, deducing it from the Series of Numbers; and that in his Letter of the 27th of August 1676, by the Words, certa Analysi, he meant the Differential Analysis. And am not I as good a Witness that I invented the Methods of Series and Fluxions in the Year 1665, and improved them in the Year 1666, and that I still have in my Custody several Mathematical Papers written in the

Years 1664, 1665 and 1666, some of which happen to be dated; and that in one of them dated the 13th of Novemb. 1665, the direct Method of Fluxions is set down in these Words:

PROB. An Equation being given, expressing the Relation of two or more Lines x, y, z etc. described in the same time by two or more moving Bodies A, B, C etc. to find the Relation of their Velocities p, q, r etc.

Resolution. Set all the Terms on one side of the Equation, that they become equal to nothing, Multiply each Term by so many times $\frac{p}{x}$ as x hath Dimensions in that Term. Secondly, Multiply each Term by so many Times $\frac{q}{y}$ as y hath Dimensions in it. Thirdly, Multiply each Term by so many Times $\frac{r}{z}$ as z hath Dimensions in it etc. The sum of all these Products shall be equal to nothing. Which Equation gives the Relation of p, q, r etc. And that this Resolution is there illustrated with Examples, and demonstrated, and applied to Problems about Tangents, and the Curvature of Curves. And that in another Paper dated the 16th of May 1666, a general Method of resolving Problems by Motion, is set down in Seven Propositions, the last of which is the same with the Problem contained in the aforesaid Paper of the 13th of Novemb. 1665. And that in a small Tract written in Novemb. 1666 the same Seven Propositions are set down again, and the Seventh is improved by shewing how to proceed without sticking at Fractions or Surds, or such Quantities as are now called Transcendent. And that an Eighth Proposition is here added, containing the Inverse Method of Fluxions so far as I had then attained it, namely, by Quadratures of Curvilinear Figures, and particularly by the three Rules upon which the Analysis per Aequationes numero terminorum infinitas, is founded, and by most of the Theorems set down in the Scholium to the Tenth Proposition of the Book of Quadratures. And that in this Tract, when the Area arising from any of the Terms in the Valor of the Ordinate cannot be expressed by vulgar Analysis, I represent it by prefixing the Symbol $\boxed{}$ to the Term. As if the Abscissa be x, and the Ordinate $ax - b + \frac{bb}{a+x}$, the Area will be $\frac{1}{2}axx - bx + \boxed{}\frac{bb}{a+x}$. And that in the same Tract I sometimes used a Letter with one Prick for Quantities involving first Fluxions;

and the same Letter with two Pricks for Quantities involving second Fluxions. And that a larger Tract which I wrote in the Year 1671, and mentioned in my Letter of the 24th of Octobr. 1676, was founded upon this smaller Tract, and began with the Reduction of finite Quantities to converging Series, and with the Solution of these two Problems: 1. Relatione Quantitatum fluentium inter se data, Fluxionum relationem determinare. 2. Exposita aequatione Fluxiones Quantitatum involvente, invenire relationem Quantitatum inter se. And that when I wrote this Tract, I had made my Analysis composed of the Methods of Series and Fluxions together, so universal, as to reach to almost all Sorts of Problems, as I mentioned in my Letter of the 13th of June 1676, and that this is the Method described in my Letter of the 10th of Decembr. 1672.

In the Year 1684 Mr. Leibnitz published only the Elements of the Calculus Differentialis, and applied them to Questions about Tangents, and Maxima et Minima, as Fermat and Gregory had done before; and shewed how to proceed in these Questions, without taking away Surds, but proceeded not to the higher Problems. The Principia Mathematica gave the first Instances made publick of applying this Calculus to the higher Problems; and I understood Mr. Leibnitz in his Sense in what I said concerning the Acta Eruditorum for May 1700 pag. 206. But Mr. Leibnitz observes, that what was there said by him, relates only to a particular Artifice de Maximis et Minimis, with which he there allowed that I was acquainted, when I gave the Figure of my Vessel in my Principles. But this Artifice depending upon the Differential Method as an Improvement thereof, and being the Artifice by which they solved the Problems which they value themselves most upon and which Mr. Leibnitz there calls a Method of the Highest Moment, and greatest Extent; I content my self with his Acknowledgment, that I was the first who proved by a Specimen made publick, that I had this Artifice.

In the Year 1689 Mr. Leibnitz published the principal Propositions of this Book as his own, in three Papers, called, Epistola de Lineis opticis, Schediasma de resistentia Medii et Motu projectilium gravium in medio resistente, et Tentamen de Motuum Coelestium Causis; pretending that he had found them all before that Book came abroad. And to make the principal Proposition his own, he adapted to it an erroneous Demonstration, and thereby discovered, that he did not yet understand how to work in second Differences. And this was the second Specimen made publick, of ap-

plying the Method to the higher Problems. Hitherto this Method made no Noise, but within a Year or two began to be celebrated.

Dr. Barrow printed his Differential Method of Tangents in the Year 1670. Mr. Gregory from this Method, compared with his own, deduced a general Method of Tangents without Calculation; and by his Letter of the 5th of Septemb. 1670, gave Notice thereof to Mr. Collins. Slusius, in Novemb. 1672 gave Notice of the like Method to Mr. Oldenbourg. In my Letter of the 10th of Decemb. 1672, I sent the like Method to Mr. Collins, and added, That I mentioned it to Dr. Barrow when he was printing his Lectures; and that I took the Methods of Gregory and Slusius to be the same with mine, and that it was but a Branch or Corollary of a general Method, which without any troublesome Calculation extended not only to Tangents, buth also to other abstruser Sorts of Problems concerning the Crookedness, Area's, Lengths, Centers of Gravity of Curves etc. and did all this, even without freeing Equations from Surds; and I added, That I had interwoven this Method with that of Infinite Series, meaning, in the Tract which I wrote in the Year 1671. Copies of these Two Letters were sent to Mr. Leibnitz by Mr. Oldenbourg in the Extracts of Gregory's Letters in June 1676; and Mr. Leibnitz in his Letter of the 21st of June 1677 sent nothing more back than what he had Notice of by these two Letters, namely, Dr. Barrow's Differential Method of Tangents disguised by a new Notation, and extended to the Method of Tangents of Gregory and Slusius, and to Equations involving Surds, and to Quadratures. But this is not the Case between me and Dr. Barrow. He saw my Tract of Analysis in the Year 1699, and was pleased with it. And before his Lectures came abroad, I had deduced the Method of Tangents of Gregory and Slusius from my general Method. But Mr. Leibnitz in those Days knew nothing of the higher Geometry, nor was yet aquainted with the vulgar Algebra.

In his Letter of the 27th of August 1676, he wrote thus: Quod dicere videmini plerasque difficultates (exceptis Problematibus Diophanteis) ad Series infinitas reduci, id mihi non videtur. Sunt enim multa usque adeo mira et implexa, ut neque ab aequationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia sunt ex multis aliis Problemata Methodi tangentium inversae. And when I answered, That such Problems were in my Power, he replied (in his Letter of the 21st of June 1676) That he conceived that I meant by Infinite Series, but he meant by Vulgar Equations. Sec the Answer to this in the Commercium Epistolicum pag. 92.

He saith, That one may judge, that when he wrote his Letter of

the 27th of August 1676, he had some Entrance into the Differential Calculus, because he said there, that he had solved the Problem of Beaune certa Analysi, by a certain Analysis. But what if that Problem may be solved certa Analysi without the Differential Method? For no further Analysis is requisite than this; That the Ordinate of the Curve desired, increases or decreases in Geometrical Progression, when the Abscissa increases in Arithmetical, and therefore the Abscissa and Ordinate have the same Relation to one another, as the Logarithen and its Number. And to infer from this, that Mr. Leibnitz had Entrance into the Differential Method; is as if one should say, That Archimedes had Entrance into it, because he drew Tangents tho the Spiral, squared the Parabola, and found the Proportion between the Sphere and the Cylinder, or that Cavallerius, Fermat and Wallis had Entrance into it. because they did many more things of this kind.

P. S.

When the Committee of the Royal Society published the Commercium Epistolicum, the Letters and Papers in my Custody were not produced. Among them were the following Letter of Mr. Leibnitz, dated $\frac{7}{17}$ of March 1693, and a Letter of Dr. Wallis's, dated the 10th of April 1695, both which upon a fresh Occasion two Years ago, were produced, examined, and left in the Archives of the Royal Society. The first shews what Opinion Mr. Leibnitz had of this matter before he knew my Symbols, or any thing more of the Method of Fluxions than what he learnt from my Letters and Papers writ in or before the Year 1676, or from the Principia Philosophiae Mathematica, and by Consequence before I could deceive him, and that he then gave me the Precedence. The second (compar'd with the Preface to the Doctor's Works) shews what Opinion the English Mathematicians, and some others abroad, had of this Matter, when they heard that the Differential Method began to be celebrated in Holland as invented by Mr. Leibnitz. The first of these two Letters, and Part of the second, are hereunto subjoyn'd.

LXII.

Leibniz an Conti.

Aus Recueil de diverses pieces etc. herausgegeben von des Maizeaux.

Hanover ce 14. d'Avril 1716.

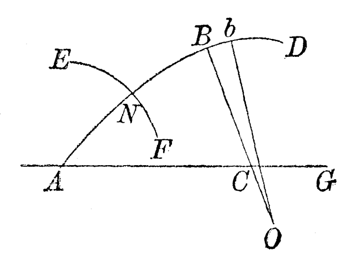
Pour ne vous point faire attendre, je vous dirai par avance que j'ai répondu d'abord à l'honneur de votre Lettre, et en même tems à

celle que Mr. Newton vous a écrite; et j'ai envoyé le tout à Mr. Remond à Paris, qui ne manquera pas de vous le faire tenir. Je me suis servi de cette voie, pour avoir des temoins neutres et intelligens de notre Dispute: et Mr. Remond en fera encore part à d'autres. Je lui ai envoyé en même tems une copie de votre Lettre, et de celle de Mr. Newton. Aprės cela vous pourrez juger, si la mauvaise chicane de quelques-uns de vos nouveaux Amis m'embarrasse beaucoup.

Quant au Probleme dont quelques-uns parmi eux ont voulu resoudre des cas particuliers pour en fixer, disent ils, les idées, il y a de l'apparence qu'ils se seront jettez sur des cas faciles, car il y en a dans les Courbes transcendantes aussi bien que dans les ordinaires, mais il s'agit d'une solution générale. Ce Probleme n'est point nouveau. M. Jean Bernoulli l'a deja proposé dans le mois de May des Actes de Leipsic 1697 p. 211. Et comme M. Fatio méprisoit ce que nous avions fait, on en repeta la proposition pour lui et pour ses semblables dans les Actes de May 1700 p. 204. Il peut servir encore aujourd'hui à faire connoitre à quelques-uns, s'ils sont allez aussi avant que nous en Methodes: et en attendant qu'ils trouvent le moyen de parvenir à la solution générale, ils pourront essayer ce qu'ils peuvent en fixant les idées sur un cas particulier, qu'on leur propose dans le papier ci-joint. Sa solution vient encore du même M. Bernoulli. Ainsi vous aurez la bonté de ne pas vous rendre trop tôt aux insinuations de ceux qui nous sont contraires, comme lorsqu'ils vous ont fait accroire que notre Problem leur étoit aisé. Je suis avec zele etc.

Problema continens casum specialem Problematis generalis de invenienda serie Curvarum quarum quaelibet sit ad aliam seriem Curvarum perpendicularis.

Super recta AG tanquam axe ex puncto A constructis Curvis quotcunque, qualis est ABD, ejus naturae ut radius osculi ex singulis singularum Curvarum punctis B eductus BO secetur ab axe AG in C in data semper constante ratione, ut nempe sit BO : BC = 1 : n. Construendae jam sunt trajectoriae qualis est ENF, priores Curvas ABD secantes ad angulos rectos.



Beilage.

Über das Problem der Trajectorien hat Nicolaus Bernoulli, der Sohn von Johann Bernoulli, die folgende Abhandlung, die in Betreff der Geschichte

des Problems bemerkenswerth ist, in den Act. Erudit. Lips. an 1718 veröffentlicht:

Nic. Bernoulli Joh. F. de trajectoriis curvas ordinatim positione datas ad Angulos rectos vel alia data lege secantibus, qua occasione communicatur gemina constructio alicujus problematis a Leibnitio propositi de trajectoriis orthogonalibus, una cum Appendice de Epistola pro Eminente Mathematico Actis Lips. Mens. Jul. A. 1716 inserta.

§. 1. Series linearum curvarum secundum datam legem descriptarum oritur, si assumta recta quaepiam tanquam parameter legem descriptionis ingrediens et pro qualibet curva invariabilis, ex sui successiva variatione dat aliam atque aliam seriei illius curvam. Jam non pauca habentur notatu digna circa hujusmodi lineas communi lege generatas, quas illustris quondam Leibnitius vocaverat ordinatim positione datas; duo cum primis non spernendae utilitatis fuere hactenus considerata et quaesita: modus scilicet determinandi lineam quae illas ordinatim positione datas contingat; deinde methodus easdem secandi in angulo dato vel data lege variabili per lineas quas trajectorias Honoratiss. meus Pater nuncupavit.

§. 2. Ad prioris generis problemata pertinent omnia illa, ubi datae curvae quaeritur evoluta, caustica, diacaustica etc. ut et illa, quae ex mutato situ vel directione tangentis aliam quaesitam continuo tangat, cujus exemplum luculentissimum praebet balistica in definiendo limite, qui comprehendat omnes possibiles jactus longissimos, ad quos globus missilis ex quacunque elevatione mortarii pertingere possit, quem limitem parabolam esse, ac quidem aequalem illi quam describit globus in mortarii situ horizontali, demonstratum est in Analysi infinite parvorum p. 133. Illa vero problemata nihil aliud ad sui solutionem requirunt, quam directam differentialium methodum, sicuti patet ex iis, quae pro solvendis hujusmodi traduntur in dicta Analysi vid. Sectiones V, VI, VII etc. VIII, ita ut cum lineae ordinatim positione datae sunt algebraicae, ipsa quoque quae quaeritur illas contingens non possit non esse algebraica.

§. 3. Secus vero se res habet cum trajectoriis, utpote quae pro curvis quanquam algebraicis ex data lege secandis saepissime sunt transcendentium trajectoriae fiant algebraicae. Quodsi enim lex illa in hoc consistat, ut trajectoriae occurrant secandis ad angulos constanter datos, manifestum est, ambas series curvarum in se mutuo ratione nominis converti posse, h. e. quod Series trajectoriarum considerari queat instar seriei secandarum et vicissim: quare si liniae ordinatim

datae sint algebraicae, habeant autem seriem trajectoriarum transcendentem, annon hae ipsae tanquam secandae, licet transcendentes, habebunt priores algebraicas pro suis trajectoriis?

§. 4. Disquisitio ista de trajectoriis determinandis res est abstrusae indaginis, quae plus difficultatis habet in recessu, quam prima fronte apparet, sicut illi experientur, qui in generali rei idea nescio quam statim simplicitatem et facilitatem mentiente non subsistere, sed ad peculiaria quaedam exempla descendere dignabuntur: deprehendent enim integrationum regulas hactenus in vulgus notas in plerisque transcendentium exemplis nequicquam ad usum vocari, atque parum subsidii ab illis sperari posse, nisi arte quadam peculiari ac non cuivis obvia tractentur.

§. 5. Primum Patri meo subnata est occasio ea de re cogitandi, cum legeret olim Hugenii Diatriben de lumine, ubi singulari modo explicat generationem et propagationem lucis per expansionem undarum, quae ita incurvantur ut radios lucis curvilineos per medium continue difforme penetrantes orthogonaliter secent. Mox postea ex radiorum curvitate quaerere (nec sine successu) suscepit Pater curvitatem undarum, et vice versa hanc ex illa, tum et utramque ex data lege variantis refractionis medii. Ortum hinc habuit synchronarum Parentis speculatio, quae nimirum ex omnibus curvis celerrimi descensus commune initium habentibus abscindunt arcus temporibus aequalibus percurrendos, quasque ostendit has alteras, quae in vulgari gravitatis hypothesi sunt cycloides, ad angulos rectos trajicere, ac proin synchronas brachystochronarum, et vicissim hasce illarum esse trajectorias orthogonales. Vid. Act. Lips. an. 1697.

§. 6. Sed pluribus jam annis ante id temporis haec materia ipsi familiaris erat, ut constat ex iisdem Actis an. 1698 p. 470 et seqq. ubi mentionem injicit methodi cujusdam sibi usitatae atque exemplorum multorum per eam solutorum, simul et refert Leibnitii, quem ad tentamen invitaverat, solvendi rationem sub finem anni 1694 sibi perscriptam: patet ex ipsa ejus epistola, cujus excerptum ibi habetur, problema hoc quod aliquem usum in dioptricis habere videret Leibnitio nequaquam displicuisse, cum praesertim postea a Parente meo monitus observaret suum solvendi modum, qui primus quoque fuit, in quem antea inciderat Pater, et a quo sane re ipsa non differunt illi, qui superiori anno prodierunt, feliciter applicari non posse, nisi ad exempla algebraica et ad pauca quaedam transcendentia: pro eo enim quo erat candore Leibnitius, imperfectionem hujus methodi non tantum agnovit, sed etiam vel ideo quaestionem ipsam tanto pluris aestimavit: quo factum, ut de aliis methodis eruendis uterque cogitaret, quae ad talia pertingerent, ad quae

illa communis et obvia applicari non posset. Patrem vero meum non prorsus successu frustratum fuisse, manifestum fiet ex constructione mox communicanda exempli ante biennium in Anglia propositi.

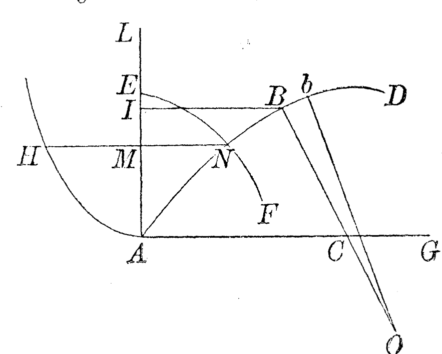
§ 7. Non quidem inficior problema ipsum a Patre fuisse suggestum; sed nego, ceu aliqui ita interpretantur, hoc ipsum fecisse, ut provocaret ullum ex mortalibus, nedum eruditos Angliae Mathematicos, quorum profundam sagacitatem, praecipue incomparabilis Newtoni, data quavis occasione depraedicat, et cum quibus pacem colere, modo vellent, esset id quod vehementissime cuperet. Prorsus enim adstipulatur Newtono existimanti, illum imprudentiae esse arguendum, qui umbram captando h. e. lites ferendo perdit quietem suam, rem prorsus substantialem, vid. Commerc. Epist. p. 71. Sed ut intelligant, quam sit a more optimi Patris alienum, alios ad certamen lacessere, vel cum quoquam rixarum serram reciprocare, consultum duco indicare paucis rei historiolam. Exeunte nimirum anno 1715 in literis Leibnitianis ad se scriptis vidit problema, quod Vir inclytus transmiserat Illustr. Abbati C...*) eo fine ut ad pulsum Anglorum Analystarum nonnihil tentandum (sunt Leibnitii verba) illud illis proponeret: problema autem ita sonabat. „Invenire lineam BCD, quae ad angulos rectos secet omnes curvas determinati ordinis ejusdem generis; exempli causa omnes hyperbolas ejusdem verticis et ejusdem centri AB, AC, AD etc. idque via generali.“ Pater vero respondit, quam difficile sit problema generaliter conceptum, tam facile esse exemplum quod ille proposuerit, siquidem sit algebraicum et tale quidem ut illud vix mediocris ingenii vires eludere queat; et ne dubitaret Leibnitius, misit huic solutionem hujus exempli e vestigio inventam a me tum temporis satis juvene, quam videre est in Actis Lips. an. 1716 p. 227. Mirum itaque non fore addidit Pater, si excellentia Anglorum ingenia istius particularis exempli solutionem statim sint datura. Rescripsit Leibnitius d. 31. Januarii 1716 se Hyperbolas proposuisse, non quasi problema in iis consisteret, sed ut intelligeretur; se enim diserte addidisse, quaeri methodum generalem, rogavit autem ut novum sibi exemplum suppeditaret, en verba ejus: Quod si mihi, inquit Leibnitius, suppeditare exemplum voles, quod non particulari aliqua facilitate adjuvare putes, sed ad generalem adigere, rem gratam facies. Id enim pro specimine solutionis verae Dno. Abbati nominare potero; vellem autem tale esse, ut factis evolutionibus tandem ad quadraturas reducatur, ne dicant ne a nobis quidem sufficientem solutionem dari posse: quamquam revera recurrendum sit ad differentias secundi gradus, nostra autem methodo

*) Conti.

inter primas consistatur etc. Rogatus Pater non potuit non morem gerere tanto Viro, cujus merita in universalem rem literariam summopere venerabatur. Roganti itaque in exemplum desumtum ex eadem materia, quam selegerat Leibnitius, de trajectoriis orthogonalibus suggessit problema de inveniendis et construendis lineis ad angulos rectos secantibus seriem curvarum, quae hanc habeant naturam, ut cujuslibet in quolibet puncto radius convexitatis ad sui portionem ab axe resectam habeat datam rationem.

§ 8. Haec tum ita gesta sunt; num vero transilierit modestiae limites exhibendo petenti problema, quod proponeret tanquam suum, non tanquam Parentis mei, qui hanc conditionem diserte stipulabatur, nunc aequi Lectoris judicio relinquo. Quis enim somniasset, Bernoullium hujus problematis Autorem existere, nisi hoc, ut conjecto, ipse Leibnitius amicó (postea incaute propalanti) privatim aperuisset? quo jure igitur imputabit quis Bernoullio ostentationis animum, a quo, si quisquam, ipse semper abhorruit? cum latere voluerit, quomodo dici potest, quenquam provocare voluisse? tradidit Leibnitio exposcenti problema, de quo, tanquam sui arbitrii et juris jam facto, faceret quod vellet. Leibnitius hoc proponit, ac suo quidem proponit nomine, ita ut quidquid eveniret, de eo non Patri sed Leibnitio respondere incubuisset. Sed quia nihil amplius hanc in rem expectare licet a Viro optimo morte occupato, lubet hic Patris mei permissu communicare solutionem et constructionem ipsius, qualem statim cum ipso problemate impertiverat in literis ad Leibnitium datis d. 11. Martii 1716.

§ 9. Problema duas habens partes his verbis conceptum erat:

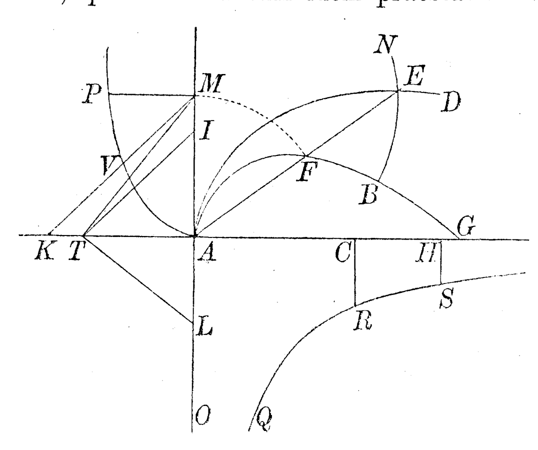


1. Super recta AG tanquam axe ex puncto A construere infinitas curvas qualis est ABD, ejus naturae ut radii osculi ex singulis singularum curvarum punctis B educti secentur ab axe AG in C in data ratione, ut nempe sit BO.BC : : 1.n*); 2. Construendae sunt trajectoriae qualis est ENF, priores curvas ABD ad angulos rectos secantes. Solutio et constructio quam tum dederat ita si habet: 1. Esto AL perpendicularis ad AG: vocetur AI, x; IB,y; et quaedam constans ad arbitrium assumta, a; fiet y seu $IB = \int \frac{x^n dx}{\sqrt{a^{2n} - x^{2n}}}$, erit punctum B in quadam curva ABD, quae deside-

*) D. h. BO : BC = 1 : n.

ratam habet conditionem BO. BC : : 1. n. Quodsi jam mutetur a eaque major minorve sumatur, prodibit alia ABD a priori diversa eandem conditionem habens, et sic infinitae construentur curvae optatae: quod erat faciendum pro primo. 2. Describatur nova curva AH, habens (nominatis abscissis AM, z) applicatas $MH = \frac{a^n b^{n+1}}{z^n \sqrt{a^{2n} - z^{2n}}}$, ubi a denotat eandem arbitrariam, quae assumta est pro curva ABD, et b significat rectam pro omnibus curvis eandem et tantum ad supplenda homogenea ad libitum introductam. In hac nova curva AH capiatur area AHM aequalis magnitudini arbitrariae constanti C: secabit HM producta curvam ABD in puncto N, quod erit in aliqua ex trajectoriis quaesitis ENF, cujus reliqua puncta similiter determinantur, si successive mutetur a, servata C. Quod si alia insuper desideretur trajectoria, sumatur jam C major minorve quam antea, modo constantis maneat magnitudinis dum a mutatur: reliqua peragantur ut prius, prodibit nova trajectoria. Atque hoc pacto tot aliae construentur, quot libuerit. Quod erat faciendum pro altero. Notetur, quodsi $n = \frac{+1}{2p+1}$ aut $= \frac{-1}{2p}$, erunt curvae omnes ABD, ut et omnes ENF algebraicae (intelligo per p quemvis numerum integrum et positivum); si vero $n = \frac{+1}{2p}$, utrarumque constructiones dependent a quadratura circuli: Et tandem si $n = \frac{-1}{2p+1}$, dependent a quadratura hyperbolae.

§ 10. Tametsi haec solutio pro quovis numero n sit generalissima, ita ut permixtio indeterminatarum constructionem per quadraturas nullo modo impediat, placet tamen adjungere aliam constructionem Paternam, quae non tantum idem praestat in hoc exemplo, sed et ad alia infinita eodem successu accommodari potest, si levis attentio adhibeatur. Sit igitur AG axis curvarum ABG, AED etc. normaliter secandarum a trajectoria quaesita NEB, quam per concessas quadraturas ita construit. Ex curvis secandis assumit aliquam pro lubitu ut ABG, quam principalem vocat; per hujus singula puncta F ducantur rectae AFE, qua-



rum partes AF transferantur in AM (facta nimirum OA perpendiculari ad AG, et utraque producta versus M et K) ad singula vero puncta M fiant anguli AMK aequales angulis inclinationum curvae principali ad rectas AF, hoc est angulis quos faciunt tangentes in punctis F cum suis respective subtensis AF. Accepta AI arbitrariae quidem sed constantis et invariabilis longitudinis, agantur IT parallelae ipsis MK, et junctis MT fiant perpendiculares TL; deinde ad M applicentur MP ipsis AL aequales, formabunt puncta P curvam AVP, cujus areae APM cum areis hyperbolicis aequatae determinabunt trajectoriam, id quod sequenti modo peragitur. Inter asymtotos AG et AO descripta sit hyperbola QRS, quae possit AI^2 id est cujus coordinatarum rectangula $AC \times CR$ vel $AH \times HS$ = quadrato Rectae AI. Sumto autem quolibet puncto H pro initio fixo abscissarum HC, fiant areae hyperbolicae HCRS alteris illis APM aequales, capianturque in AF longitudines AE aequales ipsis AC. Puncta E describent trajectoriam desideratam, quae omnes ABG, AED etc. orthogonaliter secabit.

Coroll. Mutato loco puncti fixi H, patet aliam obtineri trajectoriam NEB a priore diversam; sic itaque innumeras describere licet, quae singulae optatum praestabunt.

§. 11. Hisce ut puto satisfactum est problemati omni ex parte, idque ad mentem Leibnitii, qui desiderabat, ut factis evolutionibus constructio tandem ad quadraturas reduceretur, adeoque ut non tantum eliminatis differentiis secundi gradus inter primas consisteretur, sed ipsae quoque indeterminatae cum suis differentialibus a se invicem separari possent, idque non per series, sed per terminos numero finitos, quod quicunque effectui non dederint, illi certe hanc quaestionem solvisse minime censendi erunt. Illa quippe reductio differentialium superiorum graduum ad inferiores, ut et indeterminatarum sequestratio, quae est res intricatissimi negotii, et a Parente primum olim excoli coepta, potissimam constituit partem solutionis alicujus. Videbimus itaque an inter solutores quidam extiterint alii, qui praesentis exempli solutiones suas ad hunc perfectionis gradum perduxerint. Hactenus saltem nullam hujusmodi videre contigit, quod miror, cum sit exemplum non adeo difficile, et alia suppetant difficiliora, non tamen extra potestatem nostram. Quod autem hoc potius suppeditaverit quam aliud, id certe arguit quod illud nullo studio exquisitum, sed sponte velut oblatum Leibnitio roganti festinanter perscripserit

§. 12. Tentatum fuisse in Gallia et in Anglia, ac quidem in hac aliquandiu irrito conatu, per literas nobis constat: nuper vero Taylorum Anglum, Virum sane in Geometricis et Analyticis profunde doctum, solutionis tandem compotem esse factum ex Gallia non sine voluptate

accepimus; ita enim novum accessisse penitiori Geometriae incrementum ejusque adeo limites prolatos speramus: siquidem ut scribitur solutionem suam in Transactionibus Londinensibus publico impertiturus sit, nisi fortassis jam impertierit. Utrum autem rem promoverit usque ad quadraturas et quidem in terminis numero finitis, quod Leibnitii summum requisitum fuerat, ediscemus quondam ex Transactionibus quae rarissime et sero ad nos perveniunt. Intelleximus Virum Acutissimum duas habere solutiones, sed in utraque ad secundas fluxiones pervenisse, quas in casu praesenti minime evitare potuerit; quam instituerit Analysin non audivimus; hoc saltem dico, si talis fuit ut per eam necessario ad secundas fluxiones descenderit, oportet ut postea viam adinvenerit per integrationes (rem enim omnino in potestate esse ambae Parentis constructiones ostendunt) regrediendi ad fluxiones primas, et tales quidem, quae sint cum fluentibus suis a se invicem separabiles. Nisi hoc praestitum sit, non aegre feret Cl. Taylorus, si dixerimus, exemplum nostrum non plene ab ipso solutum esse in sensu Leibnitiano.

§. 13. Interim spero Virum Clarissimum eandem nobiscum ferre sententiam de putatitia illa solutione Anonymi cujusdam, quae dicitur apparuisse in Transactionibus suprà memoratis pro mensibus Januario, Februario et Martio anni 1716. Videtur Autor, quisquis ille sit, acumen ingenii sui non satis intendisse, dum dicere vult aliquid, quando revera nihil dicit quod ad rem faciat, aut si quem sensum commodum ex verbis ejus elicere licet, in eo consistit, quod quivis de trivio Mathematicus sine operosa attentione videt, etiamsi Autoris solutionem non legerit, sed quod ad tollendas difficultates, quae in ipsa rei executione occurrunt, ne festucam quidem confert. Hanc puto causam esse, quare solutor anonymus ad specialia exempla descendere, et praesertim cur casum particularem a Leibnitio propositum attingere noluerit, quem utique perfecte solutum dare debuisset, antequam abjecte adeo de hoc problemate sentire affectet, dum causatur, se ideo solutionem ulterius non prosequi, quia nullius sit fere usus; alias certe stomachari non debet, si sibi objiciatur, quod olim Fermatius et Freniclus, Illustres Galli, Wallisio quaestiones numericos nauseare et contemnere simulanti inculcarunt, facile est, inquit Freniclus, illud despicere, ad quod non possumus pervenire. Nec etiam multum convenit Mathematico, conqueri cui bono sint haec problemata. Eodem vero jure quaereretur cui bono tota pene Geometria et Arithmetica, si paucula quaedam et ea magis trita et a peritis despecta, quibus Geodetae, Agrimensores, Mercatores et qui utramque Architecturam exercent, aliique complures in suis calculis utuntur, excipias; cetera namque magis

recondita et praestantiora non nisi ad scientiae subtilitatem et perfectionem spectant. Cum autem sit proprium intellectus humani veritatem inquirere, nec aliam ob causam tot Viri praestantes scientiis acquirendis operam dederint, inutilis certe dici non debet in disciplinis alicujus acquisitio veritatis. Vid. Oper. Wallis. Tom. II pag. 811 et 844. Haec incidenter monenda existimavi, quia aliunde quoque scio, esse non neminem in Anglia, qui cum imitari non possit, omnia ea, quae a Parente utpote non Anglo proficiscuntur inventa, invidiose traducit ac tanquam inutilia despicatui habet; utut non sit cur praeposterum hoc judicium valde nos moveat, quamdiu certi sumus ipsum incomparabilem Newtonum, judicem in his rebus longe magis idoneum omnique exceptione majorem, de iis benignius sentire, ac suam sententiam meo Patri non parum honorificam plus semel jam edixisse, quod potiori laudi ducendum, quam quod vel a centum imparibus aemulis detrahi queat.

§. 14. Ad propositum redeo. Occasio postulat ne sileam, quod praestitit Patruelis meus, Nicolaus Bernoulli,*) Mathematum Professor Patavinus. Is jam ante biennium, cum primum se applicaret huic quaestioni de Trajectoriis, invenit regulam generalem quidem pro curvis algebraicis, sed quae non valet pro transcendentibus, nisi illis tantum, in quibus recta illa constans, quae parametri loco est in qualibet curva, et ex cujus successiva variatione oritur series curvarum a trajectoria normaliter secandarum, in terminis finitis exprimi potest. Regulam ipsam quae in rei fundamento congruit cum illis Patri jam olim usitatis, quarum memini in art. 6, statim communicaverat cum Illustrissimo Monmortio, Mathematico praestantissimo, et paulo post cum ipso Leibnitio his verbis: Si x et y sint coordinatae trajectoriae quaesitae, p linea illa variabilis, quae determinat speciem vel positionem curvarum, ad quas alia ad angulos rectos duci debet; quaero valorem ipsius p in x, y et constantibus, quo differentiato et mutatis dx in dy et dy in dx, positisque membris per dx multiplicatis aequalibus illis quae per dy multiplicantur, habebitur aequatio differentialis satisfaciens trajectoriae quaesitae.

§. 15. Eandem hanc regulam sed in operandi ordine nonnihil diversam eidem Nob. Monmortio perscripsit Pater decimo Julii anni superioris, nescius a Cl. Professore Patavino jam diu antea fuisse perscriptam, sicut monuit Illustr. Monmortius in sua ad Patrem data responsione; quia vero in praxi analytica saepius accidit, ut una

*) Nicolaus Bernoulli, der Neffe von Jacob und Johann Bernoulli (1687—1759).

eademque regula secundum unum quam alterum operandi ordinem facilius et commodius applicetur, non piget adjicere quale operationis filum Pater praescripserat. Verba in hanc rem ex dicta ipsius epistola ex Gallico in Latinum translata ita habent: „Si aquiescendum esset „methodo generali pro curvis quidem omnibus algebraicis, sed non nisi „quibusdam transcendentibus valenti, praeferrem regulam ab agnato „meo traditam, quae his 4 absolvitur partibus: 1^0 Supponere constantem „parametrum, quam hoc nomine voco rectam illam ex cujus mutata „longitudine dependet curvarum secandarum diversitas. 2^0 Juxta hanc „suppositionem differentiare aequationem naturam curvarum exprimentem. „3^0 Convertere dy in dx et dx in $-$dy. 4^0 Substituere valorem para- „metri expressum in x, y et constantibus datis, si quae adsunt in „aequatione curvarum. Hoc facto prodibit aequatio differentialis pro „trajectoria quaesita. Exempli loco sumamus inveniendam trajectoriam „parabolarum communem axem et verticem habentium: aequatio speci- „fica illarum est $ax = yy$; supponamus itaque 1^0. parametrum a tan- „quam constantem; hinc 2^0 per differentiationem habetur $adx = 2ydy$; „mutando 3^0 dy in dx, et dx in $-$dy, elicitur $- ady = 2ydx$; in hac deni- „que 4^0 substituatur pro a ipsius valor $\frac{yy}{x}$, et emerget $\frac{-yydy}{x} = 2ydx$ „aequatio differentialis pro trajectoria quaesita. Saepissime ulterius „progredi non datur propter inseparabilitatem indeterminatarum, sed „casus dantur in quibus illae separabiles evadunt, imo et quandoque „integrabilis redditur tota aequatio, quae per consequens trajectoriam „arguit esse algebraicam, sicuti in hoc exemplo, ubi aequatio reperta „$\frac{-yydy}{x} = 2ydx$ statim reducitur ad $-ydy = 2xdx$, ex cujus integrati- „tione invenitur $aa - \frac{1}{2}yy = xx$, aut $2aa - yy = 2xx$, quae est ad „ellipsin; unde patet, parabolarum trajectoriam esse quamlibet ellipsin „cujus centrum in communi parabolarum vertice, axis minor super „earundem axe communi habens ad alterum axem rationem ut 1 ad „$\sqrt{2}$, idem omnino, quod jam ante complures annos inveni, ut Tibi „patebit ex Actis Lips. 1698 p. 470, quo in loco videbis etiam regulam „aliquam Illustr. Leibnitii, a qua non multum differt illa, quam produ- „cit Celeb. Hermannus, et neutra valde discrepat ab ea quam dudum „antea excogitaveram, ceu videre est ex quadam mea epistola ad Leib- „nitium data d. 2. Sept. 1694, cujus exerceptum habetur loco citato. „Sed omnes istae regulae magno adhuc defectu laborant.“

§. 16. Quod in hac epistola memoratur de regula quadam Cl. Hermanni, sciendum est, id intelligi debere non de ea quam publicavit

in Actis Lips. mense Augusto Anni praeteriti, quippe quae nondum lucem aspexerat, et super qua mox aliquid dicendum erit, sed de alia quadam, quam cum amicis communicaverat, et nominatim cum Leibnitio, cujus missu illam vidimus, atque jam Cl. Autoris pace et scientiae promovendae gratia ipsius verbis descriptam hic exponere lubet: „Li-„neam rectam, ait, quae in una eademque curva constans est, sed „variabilis variata curva, vocabo Modulum. Differentietur curvae datae „aequatio, sumto etiam modulo pro quantitate variabili, et eadem „aequatio adhuc semel differentietur, sed ita tamen ut x velut constans „tractetur, et pro elemento ipsius y ponatur $\delta y = dxdx + dydy : dy$, „ope duarum ejusmodi aequationum eliminari potest modulus ejusque „elementum, adeo ut habeatur aequatio ad curvam omnes datas ad „angulos rectos trajicientem."

§. 17. Hujus regulae origo obvia est, utpote quae eodem nititur principio, quo illae quae jam ante annum 1694 Parenti erant familiares, sed ejusdem insufficientiam probe perspiciens Cl. Hermannus, cum in transcendentibus, ubi moduli valor per quantitates finitas nequit exprimi, haud quadret, eam, credo, tanquam luce publica non satis dignam neglexit, sed nulla hujus facta mentione aliam edidit in memorato Actorum mense Augusto anni proxime elapsi in hunc modum.*) In aequatione differentiali curvarum secandarum permutatis coordinatarum elementis, alterutro tamen cum signo mutato eliciatur valor moduli ex aequatione post hanc permutationem orta, inventusque moduli valor in aequatione curvae secandae finitis quantitatibus expressa substitutus suppeditabit aequationem differentialem Trajectoriae quaesitae. Regulam istam esse prorsus eandem cum illa, quam jam antea Patruelis meus dederat, nemo non videt, ipse vero operationis ordo, quem Vir Acutissimus sequitur, usque adeo similis est illi, quem praecedenti mense Julio in literis suis ad Monmortium descripsit Pater, ut videri posset alterum alterius verba descripsisse, si hoc fieri potuisset in tanto locorum intervallo et tam brevi temporis spatio.

§. 18. Quid autem de hoc canone sentiam, jam supra §. 14 aperui, scilicet illum generalem quidem esse pro curvis algebraicis, sed pro transcendentibus non item. Patruelis meus, qui saltem commune jus habet cum Cl. Hermanno in canonis hujus inventione, ipse ei non majorem attribuit praerogativam, nec obstat quod contrarium dicat Cl.

*) I. H. Schediasma de Trajectoriis datae Seriei Curvis ad angulos rectos occurrentibus: continens solutionem generalem Problematis in Actis Erud. 1698 p. 471 primum propositi et in Actis Anni superioris p. 226 iterati.

Hermannus dum cum pro omnibus omnino curvis generalem depraedicat. Exempla quatuor, quae affert per hunc canonem soluta vel solvenda, nihil probant. Exempla quippe primum et secundum, utpote ambo algebraica nihil difficultatis habent; tertium quidem transcendens et a Patre et a Patruo olim solutum, vid. Act. Lips. 1698 p. 472, tale est, ut valor moduli in terminis finitis exhiberi possit, adeoque nec hoc sufficientiam canonis probat. Quartum denique, quod ipsum est, de quo agitur, a Leibnitio propositum, nescio an ad mentem Leibnitii perfecte solutum dici mereatur; et si vel maxime solutum concederemus, nondum tamen constaret, qua lege vel qua arte levis illa (ut dicit p. 351) substitutio novae cujusdam indeterminatae in aliis transcendentium exemplis cum fructu sit imitanda, praesertim si in aequatione differentiali curvarum secandarum modulus a non semel tantum occurreret, sed variae ipsius a dimensiones illam ingrederentur: si haberetur ex. gr. sequens aequatio curvarum secandarum, quarum trajectoriae constructio per methodum Paternam non est impervia

$$dx = \frac{a^m + fa^{m-1}y + ga^{m-2}yy \ldots\ldots\ldots + hy^m}{\sqrt{na^{2m} + pa^{2m-1}y + qa^{2m-2}yy \ldots\ldots + ry^{2m}}} dy,$$ ubi datos qualescunque literae f, g, h, n, p, q, r, sicuti m denotant numeros. Tentet Vir Clarissimus illam suam substitutionem, nobisque ingenue referat, quid profecerit aut in quam calculi abyssum fuerit abreptus, aequationem trajectoriae expiscaturus; siquidem multum laboris subire debuit pro exemplo isto quarto, sane non difficillimo, nec tamen aliud effecit, quam ut per ambages et institutam aliquam integrationem non facilem, nec certa ratione patentem p. 352, pervenerit tandem ad aequationem aliquam $xdy - ydx = y^m ds : c^{m-1}$, quae a constructione per quadraturas a Leibnitio postulata adhuc abest ob indeterminatarum permixtionem; hinc ut casum simplicissimum ad constructionem Patris in Actis 1697 datam revocare posset, novum iterum instituit calculum, parum sollicitus de modo reducendi suam aequationem in statum optatum separationis, quo construi posset per quadraturas pro omni possibili casu ipsius m quod supra §§. 9 et 10 felicissime peractum; miror itaque, quod, dum optime judicat, tentamen Anonymi illius Angli fore calculi laboriosissimi, ipse interim calculi prolixitatem et molestiam evitare non studuerit; miror praeterea dicentem, secunda differentialia esse superflua, quando ipse tamen in calculo suo exempli IV ad ea delabitur, aequatio enim ipsius XI involvit dp, hoc est dds: siquidem b, q, p se habere supponuntur ut dy, —dx, ds, quod moneo ut de alia magis perfecta exempli istius solutione cogitet, quae nec differentialium secundarum involutione, nec indeterminatarum inseparabilitate laboret, quem in finem binarum a Patre datarum constructionum analysin aut demon-

strationem adhucdum studio omisi, ut nimirum tempus habeant, qui hisce delectantur atque ingenii sui vim experiri voluerint, in illas inquirendi aut alias similes si non Paternis meliores inveniendi.

Appendix.

Hac occasione simul significare debui, Patrem aegre ferre percipiendo, in Anglia voces spargi, quod habeatur a nonnullis pro Autore Epistolae, quae in ipsius defensionem Actis Eruditorum Mens. Jul. A. 1716 inserta fuit. Equidem non negat, quod res ipsas in illa epistola contentas quoad maximam partem amico alicui sine ulla animi commotione perscripserit, et quidem ab ipso rogatus: hic vero postea Epistolam tali forma, qua in Actis extat, concinnavit, eique ex nimis forte amicitiae zelo admiscuit expressiones, quas Pater omissas cuperet, cum nec immodicis honoris titulis delectetur, nec approbet, quae in alios aliumve (licet ipsi infensum quam ob rem nescio) durius dicta censeri possunt, quamvis forsan editor autumaverit sibi licuisse par pari referre, et similibus pugnare armis, quibus utitur Antagonista. Pater itaque non omnia, quae in dicta Epistola continentur, sua facit, praesertim quae ad ejus formam et modum scribendi spectant, cujus neutiquam particeps esse vult vel potest, quod vel hinc patet, quia circa finem Epistolae oblitus editor ex inadvertentia Patrem sibi loquentem de sua quadam formula repraesentat (ut ubique solebat) veluti personam, de qua quid narrabat, manifesto sane indicio, Patri imputari non posse, si quid in verbis modisve, quibus conscripta est Epistola, non recte positum judicetur. Quare si quid contra eam in publicum venerit, quod non nisi conviciis, aculeis et scommatibus scateat, ut fieri solet ab Antagonista quodam, cui aliam offensam non dedit Pater, quam quod ipse Anglus vel Scotus non sit, solenniter me declarare jussit, quod ad hujusmodi libellos nunquam responsurus sit, utpote indignos, qui Virorum honestatis et modestiae amantium attentionem mereantur; nam si conviciis et clamore decertandum, ultro fatetur Pater, quod ex hoc certaminis genere palmam reportare nec speret nec optet. Quicunque vero voluerit res ipsas placide, moderate et prout decet Virum bene moratum, seposito partium studio atque animi affectu cum ipso discutere, idque eo tantum fine, ut unicuique, Tros Rutulusve ruat, suum tribuatur, ut veritas asseratur, atque inprimis ut scientiae augeantur, cum tali se committere non detrectaturus, sed sponte omnia est collaturus, quae in viribus ipsius sunt ad dirimendas lites, quae hactenus viguere inter eruditos Geometras, magno proh dolor! nobilissimae scientiae dedecore et detrimento. Hoc quippe ardentissimis in votis habet, ut ces-

santibus rixis disputantes in gratiam secum invicem redeant, atque junctis viribus, ceu unius Reip. Mathematicae cives ejus pomoeria latius proferre conentur.

Briefwechsel

zwischen

Leibniz

und

Ehrenfried Walther von Tschirnhaus.

1676—1706.

Ehrenfried Walther von Tschirnhaus wurde auf dem Stammsitz seiner Familie Kieslingswalde ohnweit Görlitz den 10. April 1651 geboren. Durch Hauslehrer sorgfältig vorbereitet trat er bereits im 15. Jahre in die erste Klasse des Görlitzer Gymnasiums. Sein lebhaftes Interesse für die mathematischen Wissenschaften erhielt hier ganz besondere Förderung; er fand einen Lehrer, dessen Unterricht in den Fundamenten der Mathematik ihn befähigte, daß er sich selbstständig fortbilden konnte. Zu seiner weitern Ausbildung bezog Tschirnhaus 1668 die Universität Leyden, damals unter den europäischen Universitäten eine der berühmtesten und die deutschen weit überragend; in Holland standen die philosophischen und mathematischen Wissenschaften auf ihren Höhepunkten, hier lebten und lehrten die Schüler von Descartes. Tschirnhaus kam unter wenig günstigen Umständen nach Holland; in Leyden wüthete eine pestartige Krankheit, fast alle Docenten der Universität wurden hinweggerafft, auch Tschirnhaus wurde davon ergriffen und lag schwer darnieder. Eine andere Hinderung in seinen Studien wurde im Jahre 1672 durch den Einfall eines französischen Heeres in Holland herbeigeführt; er nahm als Freiwilliger Kriegsdienste gegen die Franzosen, kehrte jedoch nach $1\frac{1}{2}$ Jahren nach Leyden zurück. Unter solchen Umständen ging Tschirnhaus in seinen Studien meistens seine eigenen Wege, wie er in Betreff der Algebra in einem Schreiben an Leibniz andeutet*), und es

*) Hinc existimabam, me verum sensum Cartesii percepisse, adeoque in mea

ist anzunehmen, daß die damals höchsten Probleme auf dem Gebiet der mathematischen Wissenschaften seine Thätigkeit in Anspruch nahmen. Außerdem aber vertiefte er sich aufs eifrigste in das Studium der Cartesianischen Philosophie.

Tschirnhaus kehrte 1675 in die Heimath zurück, verließ sie jedoch noch in demselben Jahre, um eine längere wissenschaftliche Reise anzutreten. Er ging zunächst nach Holland, und machte die persönliche Bekanntschaft von Spinoza. Darauf wandte er sich nach London, wo er mit Oldenburg und Collins verkehrte. Es wird nirgends erwähnt, daß Tschirnhaus während seines Aufenthalts in London außer mit diesen beiden noch mit andern englischen Mathematikern zusammengetroffen wäre. Von Oldenburg erhielt er Empfehlungen an Leibniz in Paris, wo er im September 1675 eintraf. Er wurde sehr bald mit Leibniz aufs innigste befreundet, denn beide in der schönsten Blüthe jugendlicher Kraft beseelte dieselbe Vorliebe für philosophische und mathematische Studien. Quod Tschirnhausium ad nos misisti, fecisti pro amico, schreibt Leibniz an Oldenburg (Paris. 28 Decemb. 1675); multum enim ejus consuetudine delector, et ingenium agnosco in Juvene praeclarum, et magna promittens inventa mihi ostendit non pauca, Analytica et Geometrica, sane perelegantia. Unde facile judico, quid ab eo exspectari possit. Die Leibnizischen Manuscripte aus der zweiten Hälfte des Jahres 1675 und aus dem Jahre 1676 zeigen zahlreiche Spuren von den gemeinsamen Arbeiten beider; auf demselben Blatte finden sich die Schriftzüge Tschirnhausens neben denen von der Hand Leibnizens.

---

sententia confirmatior factus auctoritate tanti Philosophi multas quidem posthac, sed frustra volvi cogitationes, adeoque quo mihi viam sternerem ad illud acquirendum, mihi firmiter proposui Algebram ex professo excolere, quia nimirum jam tale quid habebamus, ut sic bene iis perpensis, simul addiscerem applicationem ejusdem ad omnia. Hinc Algebram primo ex variis authoribus in unum corpus collegi, ut sic omnia quae dispersa erant praecipua inventa, simul contemplandi facilior occasio esset, quo deinde breve compendium adornavi et alia multa peregi quibus recensendis hic supersedeo.

Leibniz verließ im October 1676 Paris, um nach Deutschland zurückzugehen; Tschirnhaus folgte den 21. November 1676, um seine Reise nach dem Süden fortzusetzen. Der erste Brief, den er von Rom an Leibniz richtete, enthält eine ausführliche Beschreibung seiner Reise; es geht daraus hervor, daß Tschirnhaus überall Wissenschaft, Kunst und Natur mit gleich großem Interesse seine Aufmerksamkeit zuwandte. Tschirnhaus ging über Lyon, Turin, Mailand, Brescia, Lodi, Vincenza, Verona, Padua nach Venedig, von dort über Bologna, Ferrara nach Rom. Von hier machte er in einer Gesellschaft einen Ausflug nach Neapel und dem Vesuv. In Rom wurde er mit einem schlesischen Edelmann von Nimptsch bekannt, der eine Reise über Siena, Florenz nach Livorno beabsichtigte, von dort Spanien zu besuchen, darauf nach Italien zurückzukehren, und durch Frankreich, England, Holland wieder in die Heimath einzutreffen gedachte. Dieser Plan kam nicht zur Ausführung, da von Nimptsch durch Familien-Verhältnisse veranlaßt wurde, auf directem Wege nach Deutschland zurückzukehren. Tschirnhaus hatte von den Seinigen zu der geplanten Reise Urlaub erhalten; er benutzte ihn, um Sicilien und Malta zu besuchen*). Die Beschreibung dieser Reise ist unter den Leibnizischen Papieren nicht vorhanden; es ist deshalb ungewiß, ob Tschirnhaus sie bis Malta ausgedehnt hat. Er kehrte nach Rom zurück, wo er durch große Hitze länger als einen Monat festgehalten wurde, und ging über Genf nach Paris. Sein diesmaliger Aufenthalt daselbst währte vielleicht 2 Monate. Über Hannover, wo er Unterredungen mit Leibniz hatte, gelangte er wieder in seine Heimath.

Da in Folge dieser Unterredungen und namentlich des darauf bezüglichen Leibnizischen Schreibens eine Unterbrechung der Correspondenz eintrat, und da die wieder angeknüpfte Correspondenz größtentheils

*) Tschirnhaus schreibt an Leibniz, Rom d. 30. April. 1678: Gedenke daß morgen von hier nacher Sicilien, umb Palermo, Messina, den berg Aetna als andere curiositäten zu sehen gehen werde, und den so ferner gar bieß nach Malta; weilen den wohl bey 2 monathen und drüber zubringen möchte bies wieder alhier zurück nach Rom gelangte

einen andern Inhalt bietet, so dürfte es angemessen sein, das bisher zwischen Leibniz und Tschirnhaus Verhandelte, so weit es die Mathematik betrifft, im Zusammenhang zu betrachten. Es hat dieser Theil der Correspondenz für die Geschichte der Wissenschaft eine hervorragende Bedeutung.

Zunächst ist die Annahme gerechtfertigt, daß die Correspondenz an das anknüpft und fortsetzt, worüber zwischen Leibniz und Tschirnhaus während ihres Zusammenseins in Paris in Betreff der Mathematik verhandelt wurde. Leider sind die beiderseitigen Briefe unvollständig vorhanden; ihr Inhalt kann nur durch die spätern ergänzt werden. Oben ist erwähnt, daß Tschirnhaus algebraische Studien eingehend getrieben habe; es konnte nicht fehlen, daß er auf das Problem, die allgemeine Auflösung der Gleichungen zu finden, geführt wurde. Da die Gleichungen bis zum vierten Grade allgemein durch Wurzelausziehung aufgelöst werden konnten, so lag es nahe, das Problem auf diesem Wege zu versuchen; die Beseitigung der irrationalen Ausdrücke, die sich dabei ergaben, sollte bewirkt werden durch besondere Rechnungen, die aber äußerst umständlich waren. Dies war Tschirnhaus' Ansicht, als er Leibniz in Paris gegenüber trat. Dieser hatte bereits die Lösung desselben Problems versucht und gefunden, daß wenn die Wurzel als eine zweitheilige Summe vorausgesetzt wurde, gewisse Gleichungen des fünften Grades nach Art der Cardanischen Lösung der Gleichungen des dritten Grades gelöst werden könnten. In Betreff der allgemeinen Gleichung des fünften Grades hatte jedoch Leibniz sich überzeugt, daß dasselbe Verfahren auf eine Gleichung des 20sten Grades führte, daß folglich die allgemeine Lösung des Problems auf diesem Wege nicht möglich sei. Tschirnhaus meinte aber auf diese Weise zur Lösung des Problems zu gelangen; er überschickte in dem Schreiben, datirt Rom 10. April 1678, die ausführliche Abhandlung: Methodus Generalis omnium aequationum radices exhibendi. Leibniz hat darüber eine kurze Critik in wenigen Zeilen

gegeben, die zu diesem Schreiben mitgetheilt ist. — Tschirnhaus hat noch auf einem dritten Wege versucht zur allgemeinen Auflösung der Gleichungen zu gelangen. Er hatte sich überzeugt, daß die allgemeine cubische Gleichung auf eine reine Gleichung des dritten Grades zurückgeführt werden könne, und so die Bestimmung der Wurzel der Gleichung erhalten würde in einem andern Ausdruck als nach dem Cardanischen Verfahren. Er meinte nun, daß dieses Verfahren auf alle höheren Gleichungen anwendbar sei, und suchte eine Formel, durch welche sämmtliche Potenzen der Unbekannten außer der höchsten auf einmal entfernt werden könnten, ähnlich dem Verfahren, durch welches Descartes die Entfernung des zweiten Gliedes der Gleichung bewirkt hatte. Tschirnhaus hat darüber in den Act. Erudit. Lips. an. 1683 S. 204 ff. die Abhandlung: Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione, veröffentlicht. In Betreff dieser Abhandlung ist unter den Leibnizischen Papieren die folgende Notiz vorhanden: Tschirnhusius meus olim mihi scripserat se habere Methodum tollendi omnes terminos medios aequationum et ita inveniendi earum radices. Ostenditque eam succedere in tertio gradu, seu ea ratione a se reperiri radices Cubicas a Cardanicis differentes. Mihi rem attentius consideranti videbatur in altioribus non successuram methodum hortabarque ut experiretur eam in quinto gradu cujus resolutionem nondum habemus, sed causatus est calculi prolixitatem. Vellem tamen non prius publicasset methodum, quam eam ad 5^{tum} gradum applicuisset. Si sit aequatio quaecunque

$$0 \text{ aequ. } x^v + px^{v-1} + qx^{v-2} + rx^{v-3} + sx^{v-4} + tx^{v-5} \text{ etc.}$$

constat ad tollendum terminum secundum debere fieri: x aequ. $y - \frac{p}{v}$. Tschirnhusius vero annotat non ineleganter ad tollendum terminum secundum et tertium simul debere poni (meo generaliter enuntiandi more)

$$\text{xx aequ. } \frac{3r}{2q} \pm \sqrt{\frac{9rr}{4qq} + \frac{v-2}{v}q - \frac{2s}{q}x + y - \frac{2q}{v}}$$

sed ubi volet ulterius pergere et tollere terminum secundum, tertium et quartum simul, majorem opinione difficultatem experietur, quemadmodum conjici potest ex rudi calculi adumbratione quam conjeci in paginam versam.

Cogitavi ego dudum alia methodo, quae mihi longe certior, determinatior esse videtur, in qua arbitrariae quibus opus est non ducuntur in se invicem, quod hic fit. —

Ein zweites großes Problem bildete den Gegenstand der gemeinsamen Arbeiten von Leibniz und Tschirnhaus während ihres Aufenthalts in Paris: das Problem der Quadratur und Cubatur. Die Verhandlungen zwischen beiden sind von der höchsten Wichtigkeit sowohl in Betreff der Fortschritte der Wissenschaft als nicht minder speciell in Bezug auf die Leistungen Leibnizens auf diesem Gebiet. Während Leibniz und Tschirnhaus in Paris gemeinsam arbeiteten, geschah die Aufstellung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz, und dadurch die Möglichkeit, mit solchen Größen zu rechnen, die bisher der Anschauung entzogen waren. Es ist niemals ein größerer Fortschritt in den mathematischen Wissenschaften gemacht worden; für die Wissenschaft begann die neue Zeit. — Aus den ersten Briefen Tschirnhausens geht hervor, daß er die Methoden Cavalieri's und des Gregorius a S. Vincentio eingehend studiert und seine Methode, die sich davon nur durch Anwendung von Rechnung unterscheidet, daran geknüpft hatte*). Namentlich findet sich nicht die geringste Andeutung, daß Tschirnhaus irgend welche Mittheilung in Betreff der von Newton gefundenen Resultate während seines Aufenthalts in London erhalten habe. Es ist bereits oben

*) Leibniz hat bemerkt: Ea quam explicas in literis methodus tua est affinis ductibus figurae in figuram, quos primus invenit et cum fructu adhibuit P. Gregorius a S. Vincentio, postea generalius adhibuit Pascalius. Ego talia et innumera alia calculo solo complector.

erwähnt, daß er die Bekanntschaft von Collins gemacht, der im Besitz des Newtonschen Briefes vom 10. December 1672 war, auf welchen bekanntlich in England rücksichtlich der Erfindung der Fluxionsrechnung durch Newton so großes Gewicht gelegt wird*). Vielmehr erhellt aus dem Schreiben Tschirnhausens an Oldenburg, datirt Paris. 1. Sept. 1676, daß die in dem ersten Briefe Newton's an Leibniz mitgetheilten Resultate ihm vollständig neu waren**).

---

*) Dieser Brief ist Seite 19 mitgetheilt. Da Newton in diesem Briefe seine Methode, die Tangente einer Curve zu finden, ausführlich mittheilt, die aber von der de Sluze's sich nicht unterscheidet, und in welcher nicht die geringste Andeutung in Betreff der Fluxionsrechnung sich findet, die daran geknüpfte Mittheilung in Betreff seiner weitern Erfindungen dagegen sich in sehr allgemeinen Wendungen bewegt, so wurde der Inhalt dieses Briefes nicht weiter beachtet, wenigstens bis um die Mitte des Jahres 1676. In dem Schreiben Oldenburg's an Leibniz, datirt Lond. d. 26 Julii 1676 heißt es: Defuncto Gregorio, congessit Collinius amplum illud commercium litterarium, quod ipsi inter se coluerant, in quo habetur argumenti hujus de seriebus historia: cui Dn. Newtonus pollicitus est se adjecturum suam methodum inventionis illius, prima quaque occasione commoda edendam, de qua interea temporis hoc scire praeter rem non fuerit, quod scilicet Dn. Newtonus cum in litteris suis Decbr. 10. 1672 communicaret nobis methodum ducendi tangentes ad curvas geometricas ex aequatione exprimente relationem ordinatarum ad Basin, subjicit hoc esse unum particulare, vel corollarium potius, methodi generalis quae extendit se absque molesto calculo etc.

**) Von diesem Briefe wird folgendes Bruchstück mitgetheilt (Commercium Epistolicum, neueste Ausgabe von Biot und Lefort S. 121): Expectabam cum desiderio responsum, cum aliquot abhinc mensibus ad te literas meas transmiseram; sed nec ex modo datis colligere licet has receptas fuisse. Interim admodum oblectatus fui, hisce conspectis quae ad D. Leibnitium exarasti, maximeque me tibi devinxisti, quod me participem volueris facere tam ingeniosarum inventionum, et promotionis Geometriae tam pulchrae quam utilis. Statim cursim eas pervolvi, ut viderem num forte inter hasce Series Infinitas existeret ea qua ingeniosissimus D. Leibnitius Circulum, imo quamvis sectionem Conicam (centro in finita distantia gaudentem) quadravit, tali ratione ut mihi persuadeam simpliciorem viam, nec quoad linearem constructionem, nec numeralem expressionem, nunquam visum iri; quique hisce porro insistens, generalem adinvenit Methodum Figuram quamvis datam in talem rationalem transmutandi, quae per solum inventum (admodum praestans meo judicio) D. Mercatoris, ad Seriem infinitam posset reduci; sed hac de materia, cum ipse non ita pridem mentem suam declaravit, non opus est ut prolixior sim. Verum ut ad specimina perquam ingeniosa D. Newtoni revertar, haec non potuere non mihi placere, tam ob utilitatem, qua se tam late ad quarumvis quantitatum dimensiones ac alia difficilia enodanda in Mathematicis extendunt, quam ob deductionem harum a fundamentis non minus generalibus quam ingeniosis derivatam: non obstante quod existimem, ad quantitatem quamvis ad infinitam seriem aequipollentem reducendam fundamenta adhuc dari et simpliciora et universaliora, quam sunt fractionum et irrationalium reductio ad tales Series ope Divisionis aut Extractionis, quae mihi tale quid

Aus Vorstehendem ergiebt sich der Nachweis, daß Leibniz durch Tschirnhaus keine Mittheilung über Newton und seine Erfindungen erhalten hat, und daß die Einführung des Algorithmus der höheren Analysis durch Leibniz, die wenige Wochen nach der Ankunft Tschirnhausens in Paris*) erfolgte, ohne irgend welche Einwirkung von außen her geschah. — Zugleich zeigen die Briefe Tschirnhausens, wie abfällig er über die folgenreiche Einführung des Algorithmus der höheren Analysis urtheilte; er hielt die Einführung neuer monströsen Zeichen für überflüssig, und die Bezeichnungen der neuen Rechnung unnöthig; er meinte, daß die bis dahin üblichen Methoden, wenn sie nur anderweitig vervollkommnet würden, zur Lösung von Problemen der höheren Mathematik genügten. Daß Tschirnhaus in dieser Meinung verharrte, selbst nachdem Leibnizens Erfindung allseitig anerkannt und durch sie bereits die glänzendsten Erfolge errungen waren, geht aus einer Mittheilung Christian Wolf's hervor, die in dessen eigener Lebensbeschreibung S. 123 f. sich findet**). — Auf der

non nisi per accidens praestare videntur: cum haec successum quoque habeant, licet non adsint fractiones aut irrationales Quantitates. Similia porro quae in hac re praestitit eximius ille Geometra Gregorius, memoranda certe sunt, et quidem optime famae ipsius consulturi, qui ipsius relicta Manuscripta luci publicae ut exponantur operam navabunt.

*) Das Manuscript, in welchem Leibniz das Integralzeichen (Summenzeichen) zuerst zur Anwendung brachte, ist datirt: 29. October 1675.

**) Ch. Wolf erzählt daselbst: Ich reiste auf die Oster-Messe A. 1705 nach Leipzig, um daselbst den Herrn von Tschirnhausen zu sprechen: welches auch geschahe. Ich referirte ihm, was mir in seiner Medicina mentis schwer vorkommen zu verstehen und sagte ihm, wie ich es erkläret hätte. Er war damit zufrieden. Als ich ihn aber fragte, wie man denn die elementa definitionum erfinden könnte: antwortete er mir weiter nichts, als: dieses wäre eben die Haupt Sache. Weil ich gerne von dem Calculo differentiali etwas verstanden hätte, der dazumahl noch weniger bekandt war, fragte ich ihn, wie ich dazu gelangen könnte. Er machte aber nicht viel davon, sondern gab mir nur zur Antwort, er beruhe auf einer einigen Proposition in Barrow Lectionibus geometricis und wäre nicht der rechte methodus, sondern nur ein compendium verae methodi, deren es unendlich viele gäbe. Den rechten methodum wollte er in dem andern Tomo seiner Medicinae mentis zeigen, wo er die in dem ersten Tomo gegebenen Regeln auf die Mathematik appliciren würde und da sollte die Welt die Augen darüber aufthun und sich verwundern. Wenn aber der dritte Theil herauskommen würde, darinnen er eben seinen Methodum auf die Physik appliciren würde, so würde man darüber erstaunen. Er recommandirte mir aber, um in der Mathematik weiter zu gehen, Barrowii lectiones

andern Seite erhellt aus den Briefen Leibnizens, welche bedeutende Fortschritte er nach wenigen Jahren in der Behandlung der Probleme aus der höheren Mathematik mittelst seiner Erfindung gemacht, und wie weit die erhaltenen Resultate die früheren übertreffen. Er ermahnt Tschirnhaus, seine Kraft auf das zu verwenden, was noch für den Ausbau der höheren Analysis zu leisten wäre; er macht ihn auf eine Reihe von Aufgaben, die noch zu lösen sind, aufmerksam. Man ersieht daraus, wie Leibniz das gesammte Gebiet der höheren Mathematik beherrschte, und daß er den größten Mathematikern des Continents zur Seite stand, vielleicht als erster zu betrachten ist.

Nach $1\frac{1}{2}$ jähriger Unterbrechung der Correspondenz findet sich ein Schreiben Tschirnhausens, in welchem er Leibniz mittheilt, daß er große Brennspiegel aus Holz mit darauf gelegten Glasstücken herstellen könne. Er sei dadurch auf das Problem geführt worden, die Curve zu finden, die durch die Durchschnittspunkte der Lichtstrahlen gebildet wird, die parallel auf einen Kreis auffallend von ihm zurückgeworfen werden; er habe gefunden, daß die Curve eine geometrische (nach der Bezeichnung Descartes') sei. Die Lösung dieses Problems enthält die Entdeckung der Brennlinien, wodurch Tschirnhaus' Name in der Geschichte der Mathematik berühmt geworden ist. Zugleich meldet Tschirnhaus, daß er eine Methode, Tangenten an Curven zu bestimmen, gefunden habe, die allgemeiner anwendbar sei als die de Sluze's. — Erst nach Verlauf eines Jahres erhielt Leibniz wieder eine Mittheilung von Tschirnhaus und zwar aus Paris, datirt d. 17 April. 1682. Er hatte sich dahin begeben, um seine „singulare inventa tam in Mathematicis quam Physicis“ persönlich der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu überreichen, und dadurch namentlich eine Pension vom König von Frankreich zu erhalten. Letzteres lag ihm ganz besonders am Herzen, denn er

geometricas und Nieuwentiit Analysin infinitorum, ingleichen auch Ozanams Elémens d'Algebre (Ch. Wolf's eigne Lebensbeschreibung, herausgegeben von H. Wuttke S. 123 f.).

meinte so eine ganz unabhängige Stellung im Vaterlande zu gewinnen, wodurch er ungestört der Wissenschaft und seinen Studien leben könnte. Auf Bitten Tschirnhausens, seine Bemühungen in Paris zu unterstützen, richtete Leibniz ein Schreiben an den Abbé Galloys, der bei dem Minister Colbert in hohem Ansehen stand*).

In Betreff der von Tschirnhaus entdeckten Brennlinie ist zu bemerken, daß die von ihm angegebene Construction derselben, die er der Pariser Akademie vorlegte, unrichtig ist; sie ist eine Epicycloide. Ebenso ist die von Tschirnhaus aufgestellte Gleichung vom vierten Grade nicht richtig; sie ist, wie Jacob Bernoulli nachgewiesen, vom sechsten Grade. Beides hat Tschirnhaus später in der Abhandlung: Methodus curvas determinandi quae formantur a radiis, quorum incidentes ut paralleli considerantur (Act. Erudit. Lips. mens. Febr. 1690) anerkannt und seine früheren Angaben verbessert.

Tschirnhaus erreichte in Paris nur theilweise, was er erstrebte; er wurde im Juli 1682 als Mitglied in die Akademie der Wissenschaften aufgenommen, aber in Betreff der Pension, die er vom König von Frankreich zu erlangen hoffte, wurden ihm nur Versprechungen gemacht. Er meinte jedoch die Pension noch zu bekommen, wenn er nach der Rückkehr in die Heimath sich weiter wissenschaftlich thätig zeigte. Tschirnhaus veröffentlichte in den Act. Erudit. Lips. zunächst das, was er von seinen Entdeckungen der Akademie in Paris vorgelegt hatte**). Es konnte aber nicht ausbleiben, daß er in seinen

*) Leibniz war während seines Aufenthalts in Paris mit Galloys bekannt geworden. Dieser war seit 1666 Herausgeber des Journal des Savans, seit 1668 Mitglied der Akademie der Wissenschaften als Mathematiker.

**) Es erschienen von Tschirnhaus in den Act. Erudit. Lips. in den Jahren 1682 und 1683 die Abhandlungen: Inventa nova exhibita Parisiis Societati Regiae Scientiarum (Act. Erudit. Lips. mens. Nov. 1682). — Nova Methodus Tangentes Curvarum expedite determinandi (Act. Erudit. Lips. mens. Decembr. 1682). — Nova methodus determinandi Maxima et Minima (Act. Erudit. Lips. mens. Mart. 1683). — Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione (Act. Erudit. Lips. mens. Maji 1683). — Methodus datae figurae, rectis lineis et Curva Geometrica terminatae, aut Quadraturam aut impossibilitatem ejusdem Quadraturae determinandi (Act. Erudit. Lips. mens. Octobr. 1683).

weitern Veröffentlichungen Resultate brachte, die während seines Zusammenseins mit Leibniz in Paris durch gemeinsames Arbeiten und gegenseitige Mittheilungen entstanden waren, und die er nun als sein Eigenthum betrachtete. Die wissenschaftliche Fehde zwischen Leibniz und Tschirnhaus kam zum Ausbruch, als letzterer in den Act. Erudit. Lips. mens. Octobr. 1683 die Abhandlung: Methodus datae figurae, rectis lineis et Curva Geometrica terminatae, aut Quadraturam aut impossibilitatem ejusdem Quadraturae determinandi, veröffentlichte. Dadurch sah sich Leibniz veranlaßt in der Abhandlung: De dimensionibus figurarum inveniendis (Act. Erudit. Lips. mens. Maji 1684) seine Rechte in Anspruch zu nehmen. Durch die vorsichtige Vermittelung Mencke's, des Herausgebers der Act. Erudit. Lips. wurde die öffentliche Fehde zwischen Leibniz und Tschirnhaus vermieden; aber die Correspondenz zwischen beiden blieb bis zu Ende des Jahres 1692 unterbrochen.

Für die Wissenschaft ist diese Fehde zwischen Leibniz und Tschirnhaus insofern von besonderer Bedeutung, als Leibniz sich genöthigt sah, mit seinen wichtigen Entdeckungen, die er bisher sorgfältig gehütet, hervorzutreten und sie bekannt zu machen. Nachdem er sie neun Jahre hindurch zurückgehalten, entschloß er sich, um seine Rechte für alle Eventualitäten zu sichern und einen möglichen Prioritätsstreit im voraus abzuschneiden, wenigstens ein Bruchstück seiner großen Entdeckung bekannt zu machen; er veröffentlichte die Differentialrechnung durch die Abhandlung: Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus (Act. Erudit Lips. mens. Octobr. 1684). Aber von den Entwürfen, die unter seinen Papieren sich noch vorfinden, wählte er den, der durch eine äußerst knappe und gedrängte Darstellung bemerkenswerth ist, so daß nur die fähigsten unter den Mathematikern in das Verständniß der neuen Rechnung einzudringen vermochten. Von dem andern

Haupttheil der höheren Analysis, von der Integralrechnung, worauf Leibniz bei weiten den größten Werth legte, spricht er nur in kurzen unverständlichen Andeutungen; seiner oft ausgesprochenen Ansicht getreu, daß man Methoden nicht bekannt machen müsse, vermied er die Elemente derselben zu enthüllen. Die Folge davon war, daß Johann Bernoulli der Erfinder der Integralrechnung zu sein sich anmaßte und bis auf die neueste Zeit auch dafür gehalten worden ist.

Die Wiederanknüpfung der Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus geschah im letzten Monat des Jahres 1692. Es ist unbekannt, wodurch Leibniz dazu veranlaßt wurde; sein Schreiben ist nicht vorhanden. Aus der ersten Antwort von Tschirnhaus ersieht man, daß er noch mehr als früher seine Thätigkeit der Verfertigung von Brennspiegeln und Brenngläsern zugewandt hatte. Er vernachlässigte jedoch die Mathematik nicht ganz; er hat sich „vorgenommen, die materie de quadraturis zu acheviren, dieweill auf zwey wege, die universal und leichter sind als alles was wihr bieshero gehabt, gefallen.“ In Betreff der Quadraturen bringt Tschirnhaus das Problem zur Sprache: Datum spatium curva Geometrica terminatum per aliam curvam in spatia secare, quae non solum in ratione ut numerus ad numerum, sondern auch ut linea ad lineam datam. Leibniz findet das Problem schön und giebt in seiner Antwort eine einfache Lösung, fügt aber hinzu: „Ich möchte wündschen, vollkommene allgemeine und kurze wege die problemata Tangentium conversa allezeit wenigstens auff quadraturas zu bringen und dann die quadraturas auff extensiones curvarum in rectas, denn ja natürlicher ist spatia zu messen per lineas, als contra“. Auf die Quadraturen kommt Leibniz in dem Briefe vom 21. März 1694 zurück; er schreibt: „Die perfectio Analytica quadraturarum bestünde meines ermessens darinn, daß man sie durch aequationes transcendentes finitas a quantitatibus differentialibus vel summatoriis liberatas geben köndte, alda aber die incognita vel indeter-

minata in den exponenten hineinfiele. Allein ich aestimire nicht so hoch die quadraturas, als die conversam tangentium, daran die quadraturae nur ein casus simplicior seyn. Möcht gern pro conversa Tangentium auch eine solche construction haben, wie pro quadraturis; habe zwar dergleichen in allerhand fällen, aber nicht so general noch so leicht." — Vielleicht wurde Tschirnhaus durch das obige Problem auf ein anderes geführt, das er in der Abhandlung: Nova et singularis Geometriae promotio circa dimensionem quantitatum curvarum (Act. Erudit. Lips. mens. Novembr. 1695) erwähnt, nämlich: In qualibet curva, data portione ejusdem, aliam semper assignare, quae datam rationem ad priorem obtinet. Als Beispiel für dieses Problem wählte er die Parabel; die Lösung, die er hinzufügte, ist aber nicht richtig. Er wurde dadurch in einen Streit mit den beiden Bernoullis verwickelt, der in den Act. Erudit. Lips. in den Jahren 1695, 1696 und 1697 geführt wurde. Auf diesen Streit beziehen sich das Schreiben Tschirnhausens vom 8. März 1694 und die darauf folgende Antwort Leibnizens Von Johann Bernoulli gedrängt veröffentlichte Tschirnhaus die Abhandlung: De methodo arcus curvae parabolicae inter se comparandi (Act. Erudit. Lips. mens. Junii 1698). Aus dieser Abhandlung ersieht man, daß Tschirnhaus auf dem richtigen Wege war, das Problem zu lösen; es wurde aber erst vollständig durch Johann Bernoulli in der Abhandlung: Joh. Bernoullii investigatio algebraica arcuum Parabolicorum assignatam inter se rationem habentium (Act. Erudit. Lips. mens. Junii 1698) behandelt und bewiesen. Bekanntlich wird auf diese Abhandlung Joh. Bernoulli's die Entstehung der Lehre von den elliptischen Functionen zurückgeführt; aber die Geschichte der Wissenschaft hat zu verzeichnen, daß durch das Problem Tschirnhausens die erste Anregung dazu gegeben wurde.

In den Jahren des Streites mit den Bernoullis ist die Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus sehr lückenhaft, noch mehr

ist dies der Fall seit dem Jahre 1700. Tschirnhaus hielt sich fast immer in Dresden auf; er wurde von dem Churfürsten zur Ausführung „gewißer commissiones“ gebraucht, die er „sehr glückselig vollzogen“. Hauptsächlich aber scheint Tschirnhaus den Aufenthalt in Dresden genommen zu haben, um an dem sächsischen Hofe Protectionen für seine technischen Unternehmungen zu gewinnen. Er hatte daselbst „zwey schöne laboratorien“ eingerichtet, das eine war eine Poliranstalt für Edelsteine, das andere eine Glashütte zur Herstellung von Linsen und Brenngläsern; besonders producirte die letztere, was in Venedig und Paris nicht möglich war. In Betreff der Poliranstalt ist zu erwähnen, daß er am 22. Octobr. 1696 an Leibniz schreibt: „und habe ich alhie in Edelgesteinen einen Königlichen schatz nahe bey Freyberg entdecket, der ohne meinen fleyß wohl viel hundert jahre solte verborgen gelegen haben, und wen er auch bekand gewesen, so hette solchen niemand brauchen können. Aber durch meine politur kombt eine schönheit herauß die man fast nicht glauben kan, und kan man taffeln von sehr großer größe haben, die auff 2 zoll dicke, wen sie poliret durchsichtig sind . . . . . Es sind nur calcedonier, Jaspis und ametisten adern, die aber besonder curieuse figuren bey jeden schnitt geben. Die Italiäner, die Ihro Churf. Durchlaucht hatt, können ihn fast nicht oder doch in langer zeit kaum schneiden, die politur aber ist gantz nichts wertich. Ich verrichte aber beydes sehr leicht mit geringen unkosten, und glaube nicht daß eine schönere politur kan hervorgebracht werden. Doch mit allen dem so verlaße den Ursprung nicht, dadurch zu diesen sachen kommen, nehmlich das gläßerschleiffen, und habe hierinnen nach wundsch reussiret, wie Sie bereits auß den Actis Eruditorum werden haben ersehen.“ — Den hohen Wärmegrad, den Tschirnhaus durch seine Brennspiegel hervorbrachte, benutzte er zu chemischen Versuchen. Er schreibt an Leibniz den 27. Februar 1694: „Ich habe diesen winter in den stuben sehr schöne experimenta Chymica gemacht ohne alle Chymischen öffen,

dadurch der Metallen und Mineralien generatio sehr klar erkennet wird . . . . steine und marmel wihl in kleine stücke zerschlagen, und wieder gantz machen wie zuvor, wen nur zeit genug darzu habe, außgenommen den Kieselstein, der wird gantz auf andere art formirt: den edelsteinen bin auch sehr nahe getreten. Allezeit der Diamant, sed hic jubet Plato quiescere: woher Argilla, limus kommt weiß sowohl a priori, daß solche arte produciren kan und dieß haben mich auch auff die gedanken gebracht den Porcellan zu bereiten, in welchen bieshero alle proben mir ex voto reusirt und keine conträr ging"*). — In demselben Schreiben erwähnt Tschirnhaus noch als weitere Wirkungen seines Brennglases: „die metalla reducirt es in ein glaß; Gold in ein Rubinglaß etc." Am 12. October 1694 schreibt Tschirnhaus an Leibniz: „Ein Stückichen von Porcellan, darauff das gold geschmoltzen eine Tincturfarbe gemachet wie verlanget wird."

Zugleich mit diesen Mittheilungen über technische Erfindungen gehen die Verhandlungen zwischen Leibniz und Tschirnhaus über die Gründung einer Akademie der Wissenschaften in Dresden, deren Unterhaltung Tschirnhaus besonders durch die Verwerthung seiner technischen Erfindungen zu unterstützen gedachte. Um seine Bemühungen in Betreff der Gründung dieser Akademie am sächsischen Hofe zu unterstützen, kam, wie es scheint, Leibniz selbst zu Ende des Jahres 1704 nach Dresden; indeß die damaligen Kriegsunruhen hinderten die Ausführung des Planes.

Obwohl Tschirnhaus durch diese Thätigkeit auf so verschiedenen Gebieten in hohem Grade in Anspruch genommen wurde, so ging er doch in seinen wissenschaftlichen Studien weiter, und es war „kein dies absque linea". In seinem letzten Briefe an Leibniz am 22.

*) Tschirnhaus spricht hier wahrscheinlich von rothem oder braunem Porzellan; das weiße Porzellan wurde bekanntlich von Böttcher 1709, ein Jahr nach Tschirnhaus' Tode, erfunden.

December 1706 schreibt er: „Ich habe mich fast stets in Dresden befunden, und da in strepitu Mundi meine circulos in gröster Tranquillität continuiret. Wan ich das Unum Necessarium ungehindert treiben kan, so fechten mich wenig andere Sachen an, welche derjenige Providenz willigst allein überlaße, die solche auff die beste art dirigiret. Der Schaden welchen hierbey in rebus fortunae geliedten, geht auch noch an.“ — Tschirnhaus verfolgte sein ganzes Leben hindurch ideale Ziele; sein größtes Vergnügen fand er in wissenschaftlicher Thätigkeit; er sah nicht auf das „lucrum“ und war kein „mercenarius“. Er schreibt einmal an Leibniz: „Sonsten hat mir auch Gott hin und wieder große Patronen consiliirt, daß es immer beßer gehet; wie den glaube daß Gott eine singulare Providenz hatte über leute, die mitt gewalt sich von allen mutabilibus bonis abtrennen, und mit prudenz dem bono publico dienen, und ich darf es nicht glauben, ich bin es gewiß.“

In Folge dieser Lebensanschauungen verwandte Tschirnhaus wohl nicht die nöthige Aufmerksamkeit auf die materiellen Interessen. Die Aufwendungen, die er machte, um seine technischen Erfindungen immer mehr zu vervollkommnen, scheinen die Kräfte seiner Einkünfte überstiegen zu haben; nach seinem den 11. October 1708 erfolgten Tode zeigte sich der Ruin seines Vermögens. Seine schönen Besitzthümer kamen durch Verkauf in andere Hände.

Die Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus ist nach den in der Königlichen Bibliothek zu Hannover vorhandenen Originalen bis auf wenige Stellen, die ohne wesentlichen Inhalt sind, vollständig abgedruckt.

I.

Tschirnhaus an Leibniz.

Die erste Mittheilung von Tschirnhaus an Leibniz enthält die Abschrift eines Bruchstücks von Descartes' in Manuscript vorhandenem Tractat: La recherche de la Verité par la lumiere naturelle, der im Besitz von Clerselier war. Tschirnhaus hat Folgendes hinzugefügt:

Dieses hatt mir nicht uneben gefallen, und vermeinet, wo M. Cartes alle seine wercke in solcher manier verfertiget, es würde von mehren assequirt sein worden, habe es also selbigen gerne mittheilen wollen, wiewohl etwas noch dran manquiret, welches der Hr. Clerselier vor mich abschreiben laßet, so den Hrn. Mohr übergeben werde, der solches verhoffet nebenst des M. Huet Tractat überzubringen. Er wird gleichfals bey sich haben Cours de chymie par Nicolas Lemery Ano. 1676 in 12, so zwar nach der wahren Philosophie nicht groß zu aestimiren, aber gegen Scriptis, so annoch von der Materie ans licht kommen, seines gleichen nicht vermeine zu sein, und hatt mir solches so wohl gefallen, daß selbst vor mich ein exemplar erkauffet. Ich gehe, wihls Gott den 20. November gantz gewieß von hier, habe also dießmahl verschoben zu schreiben, damitt Sie diese gewieße nachricht haben möchten, wiewohl vermeine, daß solches zimlich mitt viellheit der materien, so diesmahl erwehnet, ... nicht unangenehm zu sein gedenke . . . . . . , und obgleich oben anders erwähnet, so vermeinete doch besser zu sein daß der Hr. die brieffe addressirt an Mons. Jean Bereand in piazza navonna zu Rom, welche in gesundheit zu eröffnen vermeine, und beglaube, daß weil in ettlicher zeit nicht das glück haben kan, dero kundschafft durch brieffe zu erhalten, Sie werden dieselbigen mitt desto mehrer materie auffüllen, und also erfrewen Dero dienstwilligsten

Diener
Paris d. 16 Novembr.
Ano 1676.

II.

Tschirnhaus an Leibniz.

Romae d. 17 Aprilis Anno 1677.

Dero angenehmes Schreiben habe vor 8 tagen erhalten, auß welchen gleich anfangs bemercket, daß selbiger Brieff, so annoch auß Paris an Sie abgehen laßen, nicht sey empfangen worden, hoffe dennoch, daß vielleicht unterdeßen er werde erhalten sein. Ubrigens continuire daß gleich nach abfertigung gedachter Zeidlen von Paris d. 21 Novemb. zu waßer abgegangen nacher Lion, alda bey 14 tagen verblieben. Erhielte dar Kendtniß mit einen wohlerfahrenen Mathematico M. Regnauld, welcher mir nebenst vieler erwiesenen freundschafft auch adresse gegeben an Hr. Servier, da 2 kammern voll sehr curieuser Machinen gesehen, so Er selbst mitt eigener hand gemacht; das rareste bedünckte mich zu sein 2 Zeuger so in distanz zweyer ellen, wen man eine kugel in der größe eines mäßigen knopfes bey den einen nahe geumbführet, doch ohne berührung, auch vor oder hinter sich, so beweget sich der andere Zeuger in gleichmäßiger manier mitt vorigen. Die regul Guldini, quod figura generans in viam centri gravitatis ejusdem ducta exhibeat quantitatem generatam, hatt mir Hr. Regnauld in 7 libro Collectio. Mathem. Pappi angewießen. Gieng von dieser sehr lustig gelegenen Stad nacher Turin, alda ingleichen 10 tage zubrachte; hatte mich vor die kälte so gewieß ziemlich groß, so wohl versehen, daß nicht viel incommodiret worden; wiewohl leicht zu erkennen, daß der boden viel wärmer als bei unß, maßen hin und wieder waßer so etwan ein 4tel der Ellen tieff unzugefrohren gesehen, da doch sonsten anderes viel tieffer zugefrohren geweßen. Als über die so hohen Alpes gegangen, habe wohl viele hypotheses gemacht, wie doch solche ungehewre felsen so den großen bergen gleich ihren ursprung genommen, aber keine gefunden, so mir alle phaenomena salviret; wo der Erdkugel untergang darinnen bestehet, daß endlich, dieweil die berge stets abnehmen, dero externa superficies ad omnimodam aequalitatem reducirt wird werden, so wolte den leuten rathen, daß sie ihre Wohnung an solche örter nehmen solten, maßen eine zimliche zeit darzu gehören wird, ehe diese felsen durch den regen werden abgeschlieffen werden. Die letzte tage, als hierdurch passirte, merckete bey mir einzige traurigkeit, welche glaube dahero entstehet weil man zwischen dießen felsen als wie eingeschloßen nirgends sich weit umbhersehen kan. Von Turin gieng nacher Mayland und wurde von den Hrn. Septala so in Opticis, Mechanicis, naturalibus, chymicis etc. viele kammern voll hatt, sehr human tractiret und wohl bey 5 mahlen zu ihm gefodert, damit alles was er hatte wohl sehen kundte; auch dieweil die gelegenheit mich bedienet, welche den forestirern wohl zustatten kommet und die fast in allen orten Italiae angetroffen, daß nehmlich

particuliere leute sind, so alles was curieus ist anweisen, und zu dem ende umb alles was sonst in der Stad sehenswürdig mitt kürtze zu observiren, eine carosse genommen; so ist er selbst einen halben tag mitt mir herumbgefahren, habe das buch Museum Septalianum, darin was bey ihm zu sehen, erhalten. Er versprach, wen in der rückreise auß italien etwas zu Milano verbleiben wolte, mir zu erlernen was verlangete, außgenommen distilliren ohne fewer oder Sonne, den rubin zu machen, wie auch den porcellan, welche Er vor seine 3 gröste arcana helt. Er hatte einen kleinen armirten magnet, noch nicht in der größe eines hünereyes, welcher eine solche last auffhub daß unglaublich, welches mich in suspition brachte, daß eine andere ursache vorhanden als welche insgemein attribuirt wird, wie mich auch bedüncket gefunden zu haben. Es ist dem Hrn. wießend daß zwey polirte Cörper an einander hengen bleiben, wie auch so nur plana an zweyen bleiernen Cugeln formirt werden solche nach zusammendrückung bey einander bleiben, dieweil den in den armirten magneten zwey stählnerne plana, an welchen gleichfals ein ander stählern planum daran die last gehenget, applicirt wird, so werden solche vorerst per transitum effluvionum unirt und den so fest zusammen gehalten durch die krafft die zwey polirte Cörper so fest zusammen schließete, wo dieses wahr (wie leicht durch ettliche experimente sich zu versichern) so köndte man mitt einen magneten der gar schlechte vires, wen er nicht allein mitt stahl sondern nur mitt holtz oder mitt allerhand andern materien armirt (nur daß die gedachten plana bene laevigata und groß, auch nachdem die materia, etwas angefeuchtet) eine sehr große last heben. Ich wehre länger zu Milano verblieben, wen die gelder gereichet hetten, und obwohl in willens recta von Paris nacher Rom zu gehen, enderte doch meinen vorsatz alhier, weil zu Venedig einen wechsel zu heben, schreiben in henden, als das mir gesaget würde, wie daß fast alles nacher Venedig den carnevall wegen gienge, und also vermeinete mehr eine gelegenheit vor mich lenger in der Frembde zu bleiben zu überkommen als in Rom, als auch vieler andern ursachen wegen. Machete mich also von Milano über Brescia, Lodo, Vincenz, Verona, Padua bies nacher Venedig, alda bey einen monath verblieben, und obwohl alles was zu Venedig curieus zu sehen gutte gelegenheit gehabt, auch genug delectationes in sensualibus sowohl in operen als anderen passe temps genossen (id est diese gantze zeit über wochen da geschlaffen) so habe doch sonst nichts sonderlich zu erlernen, als auch mein ingenium (wie sonst gewohnt) zu excoliren (wegen vielen gutten landsleute Kennüße wegen) gelegenheit gehabt. Von hier gieng in zimlicher compagnie nach Bologna und Ferrara, da den hin und wieder den carnevall wegen genug lächerliche auffzüge (si quidem aliquid ridiculi in natura) gesehen, von da nach dem heiligen hauß zu Loretto und so ferner nach Rom, da gleichfals noch den carnevall ettliche tage beygewohnet, daß also, wen solche sachen groß aestimirte, nicht bequemer meine reise hierzu anstellen können. Ich

war nicht 5 oder 6 tag alhier, so gieng mitt gewießer companie nach Neapolis, welches nach Rom und Venedig eine der schönsten städten italiae ist, so noch gesehen, und da die gravitetische art der Spanier zu observiren gehabt. Von Neapolis giengen wir einen tag auß nachher Puzolo, in welcher reise man erstlich die gräber Virgilii und Sanazarii siehet, dan eine höhle, so durch einen felsen außgehauene straße ist einer welschen meilen lang; die grotte del cane, in welcher dieses selbst observiret, in dieser höhle, so etwan so groß daß 6 personen darin geraum stehen können, rüchet es sehr starck nach schweffel, wen man eine fackel anzündet und nahe bey der erde helt, so leschet sie gleich aus, so starck gehen die dämpfe auß der erd; wen man einen hund nimbt und helt in wieder die Erden, so wehret er sich mitt aller gewalt darvon bies daß er so matt wird, daß er von sich dahin fallet, auch wohl gar stürbe. Ich machte dergleichen process mitt einen so lang, daß er euserlichen ansehen schon schiene in der andern weld zu sein, man würffet in aber alsdan in einen lacum so nahe hier bey, so kompt er in den waßer allmehlich wieder zu sich selber; doch man dörffte dieses wegen nicht so weit reisen, den mir persuadire, wen man schweffel in zimlicher mänge anzündete, und den Kopf eines hundes darüber hielte, er würde nach ettlicher zeit eben als wie tod hinfallen, wen man ihn den in frisch wasser würffe, glaube daß er wieder lebendig würde; si placet poteris experiri; weiter darvon sind viel schweffel bäder, wie auch ein ort, da es an unterschiedlichen plätzen aus der erd herausbrennet, auch wasser dabey so ebulbirt von sieden; den kompt man nach Puzzolo, von dannen gehet man über der See, da des Keysers Caligulae brücken rudera, so er darüber bauen wollen, über der See gehet man in der Agrippinae grab, siehet die Elyseische felder, das todte Meer und noch viele andere antiquitäten, darunter die raresten, der Sybillae Cumanae höhle, wie auch ein gebäude Neronis von 48 säulen unter der Erd. Hierbey sind bäder welche mir wohlgefallen; sie bestehen aus nichts anders als in Stein gehauenen vielen gängen unter der Erden, wen man eingehet, so kommet ein warmer dampf nicht schweflichten geruches, sondern wie ein broden von waßer entgegen, den wieder ein ander und so successive. Unser 3 resolvirten sich so weit hienein zu gehen mitt fackeln als möglich, hielten unß also dieweil viele gänge, damitt wir unß nicht verirreten allezeit nach der linken hand; wen man sich bücket, empfindet man die wärme nicht so starck; ich wurde so warm und schwitzete so perfect als in eintziger badstuben, befand mich auch recht wohl darnach. Einen andern tag gieng von Neapolis den brennenden berg Vesuvium zu sehen, welches mich nicht gerewet, maßen nuhmero ein beßeres concept von solchen brennenden berg. Er ist noch ziemich hoch, wiewohl der 3te theil den augenmaß nach ruiniret, indem ein großer theil der spietzen herab, also daß er oben ein perfectes horizontal planum haben würde, wen nicht unterschiedene brennung diesen platz ausgehöhlet, als wie einen großen becher, welcher aus-

höhlung weite und tieffe man gar wohl betrachten kan, aber nicht eingehen, dieweil es zu gähling hinunter, in der mitten dieser höhlen ist ein klein auffgeworffener berg, auß welches mitten ein loch, daraus annoch ietzo ein sehr starcker dampf wie aus einen töpfer offen aufffsteiget. Die materie des Berges, wie von außen und in der aushöhlung bemercken können, siehet nicht ungleich der erden aus den Kupferbergwercken; wen ein rechtes incendium ist, so würffet der berg wohl viele materie auß, aber absonderlich wird selbiger von einer fließenden materie so glüende nichts anders als wie ein topf waßer bey übrigen fewer von allen seiten überlauffen, welche materie (wie leicht zu gedenken) sich weit und fern darvon begiebet, alles aber was sie antriefft, durch die mächtige gluth ruinirt; man siehet noch genug indicia, wo solche ströhme gegangen, als auch materie derselbigen, so nicht anders als Kupferschlacken anzusehen, wie den ein zimliches stück bey mir habe. Nachdem wir also zu Neapolis ingleichen was meritirt gesehen zu werden observirt, darunter absonderlich so schöne Kirchen, dergleichen wohl nicht leicht auff Erden mögen gefunden werden (excepto Sanct Peter zu Rom), so macheten wir unß wiederumb nach Rom, alda mitt gewießer compagnie auff 14 tagen verbunden gewesen, manchmahl gantze tage in Caroßen herumber zu fahren, damitt wir alles was in und außer dieser Stad zu sehen, betrachteten. Und muß gestehen, daß Rom was schöne lustige gärten, Fontainen, Palätze, gemälde, außgearbeitete künstliche Statuen etc. nicht leicht ihres gleichen hatt. Wie ich nuhmero also nur ein wenig wieder zu ruhe kommen und mich appliciren wolte gutten freunden zu avisiren, wie mir bieshero gegangen, so erhielt schreiben von Hrn. D. Schuller, und wie gleich in der beantwortung hierauff innerhalb 6 tagen andere, von ihm dadurch verständiget worden, daß unser freund im Haag presente D. Schullero bey gutten verstande, und nachdem er disponiret wie es mitt hinterlaßenen manuscriptis solte gehalten werden, verstorben, worbey ingleichen ein schreiben von Hrn., dadurch mich dero annoch befindlichen gesundheit zu erfrewen gelegenheit gehabt; was aber sonst anlangt die conversation mitt animalibus diversae a tua naturae, quod primarium est, unde omnia caetera Tibi incommoda, wundere mich nicht, den solches so wohl erfahren, daß mich von den Meinigen licet non exiguo labore opus fuerit ac singulari dexteritate loß practicirt, auch alle kräfte anwenden werde, ins künfftige solchen vorzukommen, maßen die Meinigen mich nacher hauße fordern, welches den auch ieder zeit die ursache geweßen quod multis innotescere subterfugiam, dieweil wohl weiß sowohl experientia als ratione, wie großen schaden man darvon hatt, wie den auch hier so viel als möglich suche mihi ut solus vivam, cum sic vivam caeteris, si vero aliis ipsis et mihi, mortuus mihi videar. Mit den Hrn. Borello habe eintzige conversation, so ein feiner man und den Tractatum de motibus animalium nuhmero fast zu ende gebracht; Gottignies, ein Jesuit hier in den Collegio Romano, ist der beste so mir noch vorkommen

in Mathematicis; sonsten habe den Hrn. Kircherum noch nicht sprechen können, weil er fast stets zu bett, habe doch hiertzu gelegenheit in sperantz; was sonsten verlanget wird von mir hier den Hrn. zu procuriren, auch zu notificiren wihl (obschon vorietzo noch nicht erlanget auß kürtze der zeit als des bevorstehenden osterfestes wegen) nicht manquiren, was möglich dem Hrn. und iederzeit mitt aufrichtiger Freundschafft an die hand zu gehen. Man hatt hier Relatione della Corte di Roma del Signor Cavaliere Girolamo Lunadoro, Venetia Anno 64 in 12°, welches ein buch wie L'estat de France und welches sehr dienlich; von büchern habe nichts curieuses gesehen als Prodromo o vero saggio di alcune inventioni nouve premesso, Autore Francesco Lana, in Brescia anno 70 in folio, in welchen buche recht curieusse inventiones. Der Hr. Bocone ist nicht hier zu Rom, habe verstanden, daß er zu Genua sich auffhalten solte. Hr. Mohren habe in Paris verlassen, der in willens umb ostern nachher holland zu gehen. Zu Paris habe von Hrn. Oldenburgern gedachte brieffe erhalten, aber aus mangel der zeit noch bies dato nicht antworten können. Das einen neuven modum die radices irrationales omnium aequationum zu determiniren gefunden annoch in Paris, habe in selbigen Schreiben, so damahl an den Hrn. abgehen laßen, nebenst andern realien notificirt; damitt aber der Hr. siehet wie candide verfahre, so wihl selbigen communiciren. Die gantze difficultet bestehet hierinne: daß wir alle intermedios terminos ex quacunque aequatione können wegbringen, dieweil den also unus incognitus terminus und unicus quoque cognitus, patet radicis extractio: ferner dieweil in keiner aequation eintziger terminus kan weggebracht werden ipsa immutata, so ist nöthig, das eine gegebne aequation in eine andere transmutirt werde, darin die intermedii termini können tollirt werden. Dieses kan ferner also geschehen: Sit aequatio quaecunque $xx - px + q \infty 0$ sive cubica $x^3 - pxx + qx - r \infty 0$ etc; si jam saltem unicus terminus debeat auferri, supponatur $x \infty a + y$ et transmutatur aequatio, in qua unicus terminus debet auferri ope $x \infty a + y$ in aliam, ubi y incognita radix, in qua ponatur ille terminus auferendus $\infty 0$, atque sic inveniemus qua ratione a sit assumenda ad terminum illum auferendum. Sit igitur in hac aequatione $xx - px + q \infty 0$ auferendus secundus terminus, fiat $x \infty y + a$; jam vero

$$\begin{array}{rl} xx \infty & yy + 2ay + aa \infty 0 \\ -px \infty & \quad - py - pa \\ +q \infty & \qquad\quad q \end{array}$$

adeoque ponendo $2\,ay - py \infty 0$ erit $2a - p \infty 0$ et $a \infty \frac{p}{2}$; hinc patet debere fieri $x \infty y + \frac{p}{2}$ ad secundum terminum in aequatione quadratica tollendum, atque sic non solum terminus unicus aufertur et in quacunque aequatione, sed et radices quadraticae aequationis determinantur, prout hoc quoque

a Schottenio in Commentariis ostenditur. Si jam velimus duos terminos in quacunque aequatione auferre, supponendum saltem $xx \infty ax + b + y$, si tres $x^3 \infty axx + bx + c + y$, si quatuor $x^4 \infty ax^3 + bxx + cx + d + y$, atque sic in infinitum, non obstante demonstratione qua contrarium evincebat Gregorius, prout scribit Oldenburgerus, et operatio instituenda eadem prorsus ratione ut antea; verum tute adjuvem quantum possum, si forte haec introspicere animus sit, cum consectariorum utilissimorum haec methodus sit ferax. Sit ex. gr. cubica aequatio $x^3 - pxx + qx - r \infty 0$, verum cum jam unicum terminum ex aequatione possim tollere, compendiosius progredior (id quod semper observatum in superioribus aequationibus multum calculi abscindit) supponendo saltem $x^3 - qx - r \infty 0$ et supponendo $xx \infty ax + b + y$, hinc enim

$$\text{A}\quad \begin{array}{rrrr} y^3 & + 3byy & + 3bby & + b^3 \\ & - 2qyy & + 3ary & - 2qbb \\ & & - 4qby & + 3bar \\ & & + qqy & + \; qqb \\ & & - aaqy & - \; aqr \\ & & & - aaqb \\ & & & + a^3r - rr \end{array} \quad \infty\, 0$$

Jam ponatur $3b - 2q \infty 0$ eritque $b \infty \frac{2q}{3}$ et secundo fiat $3bb + 3ar - 4qb + qq - aaq \infty 0$ et erit, restituto b, quantitas $a \infty \frac{3r}{2q} + \sqrt{\frac{9qq}{4qq} - \frac{q}{3}}$. Jam cum in aequatione A duobus terminis sublatis (id quod fiet a et b substituendo prout jam inventae) y possit inveniri sitque $y \infty$ $\sqrt[3]{4rr - \frac{27r^4}{2q^3} - \frac{8q^3}{27} + \frac{4qr}{3} - \frac{9r^3}{qq}\sqrt{\frac{9rr}{4qq} - \frac{q}{3}}}$, erit in aequatione $xx \infty ax + b + y$ substitutis a, b et y

$$x \infty \frac{3r}{4q} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{9rr}{4qq} - \frac{q}{3}} +$$

$$\sqrt{\frac{9rr}{8qq} + \frac{7q}{12} + \frac{3r}{4q}\sqrt{\frac{9rr}{4qq} - \frac{q}{3}} + \sqrt[3]{4rr - \frac{27r^4}{2q^3} - \frac{8q^3}{27} + \frac{4qr}{3} - \frac{9r^3}{qq}\sqrt{\frac{9rr}{4qq} - \frac{q}{3}}}}$$

desiderata radix cubicae aequationis. Haec nulli hactenus praeter D. Mohr et D. Schullero communicavi. Sed Oldenburgero id non rescribam, nisi postquam ad ultimam perfectionem deduxero. Praeterea in utilissimas hoc in itinere quandoque speculationes incidi, sed nescio num tempus unquam habiturus sim, ea quae annotata saltem habeo in praxin deducendi; inter alia in modum incidi admodum naturalem, omnium irrationalium quantitatum expressionem cujuscunque gradus sint, per infinitas series obtinendi, absque ulla extractione radicum. Sit ex. gr.

2aa ∞ xx dico quod x aequale sit $a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} - \frac{a}{348} + \frac{a}{2030}$ etc. et $a \infty x - \frac{x}{3} + \frac{x}{21} - \frac{x}{119} + \frac{x}{697} - \frac{x}{4059}$ etc. quas series nescio num per Methodum Gregorii possint terminari, et posses Dn. Neutonio proponere saltem series hasce terminandas, aut quod idem in progressione hac $\frac{a}{1}, \frac{3a}{2}, \frac{7a}{5}, \frac{17a}{12}, \frac{41a}{29}, \frac{99a}{70}$ ultimum seu maximum terminum invenire; est enim $a \infty \frac{a}{1}$, $a + \frac{a}{2} \infty \frac{3a}{2}$, $a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} \infty \frac{7a}{5}$, $a + \frac{a}{2} - \frac{a}{10} + \frac{a}{60} \infty \frac{17a}{12}$ etc. progressio vero numerorum sic procedit: ad fractionis praecedentis $\left(\text{ex. } \frac{7a}{5}\right)$ numeratorem (7) adde denominatorem (5) et habebis (12) semper subsequentis fractionis denominatorem; secundo ad hunc denominatorem (12) inventum adde praecedentis fractionis $\left(\frac{7a}{5}\right)$ denominatorem (5) et habebis (17) numeratorem subsequentis fractionis (quae itaque erit $\left.\frac{17a}{12}\right)$. Methodum quoque qua haec inveniuntur, si desideras, sequentibus communicabo nec credo mihi, qua es facilitate, sententias tuas paradoxas admodum quas eruisti in Tamesis ostio nec non quaecunque se tibi memorabilia offerunt, esse celaturum. Quoad demonstrationem tuam de ente perfectissimo, hanc a D. Schullero transmissam accepi, admodum placuit, sed quae de Cartesio habes, pace tua dicam, nullius roboris sunt; 1. enim Cartesius non ad experientiam provocat, quod nullibi legi, imo potius indicavit qua ratione homines incidant in notionem entis perfectissimi, dum dicit quod affirmando aliquid in positivo dehinc assurgant ad comparativum et sic porro ad superlativum, et quia haec operatio admodum familiaris est hominibus ut vel de quibusvis rebus in superlativo loquantur, non video quare homines possint recusare se non intelligere quid sit ens perfectissimum atque sic per consequens recusare demonstrationem quam ipsis exhibuit existentia DEi. 2. Verum licet hoc maximum usum habeat adeo ut et stupidi quivis possint convinci existentia Dei, attamen Philosophis non satisfactum fuisset, cum cognitio talis entis perfectissimi, prout vulgus concipit, satis crassa cognitio est, adeoque Cartesius dilucide et variis in locis explicat (adeo ut mirer te haec negare) quid per perfectionem intelligat, dicit itaque perfectionem ac realitatem unum et idem ipsi esse, item in alio loco per perfectionem intelligit quod de esse participat, quo magis itaque res de esse participant, eo sunt perfectiores (hinc est quod Cartesius dicit substantias esse perfectiores modis) sic e contra ipsi est imper-

fectum, quod de non esse participat seu ut ipsius phrasi utar de nihilo, veluti dubitatio, ignorantia, divisio etc. Cum itaque omnia distincta sint in ipsius definitione, nescio qua re demonstratio huic soli innixa possit rejici. 3. Colliges quanta sit differentia definitio Cartes. et Tuae. Ens enim perfectissimum sic conceptum et Ens quod ejusmodi infinitis perfectionibus constat, differunt et qui priore definitione utitur, saltem necesse ei est ut ostendat ea quae comprehendit distincta cognitione constare, prout facit Cartesius juxta annot. 3, qui vero secunda utitur, is debet prius probare prout optime fecisti, quod tales infinitae perfectiones possint in eodem subjecto esse. Possem 4. ostendere quod ex hac posita definitione entis perfectissimi juxta Cartesium statim tua sequatur definitio tanquam corrolarium, sed tempus revera non permittit, ut Metaphysicis speculationibus ulterius incumbam. Et saltem has eo congessi rationes, ne tibi viderer ex passione loqui, ut qui tibi hac in re maxime suspectus sum, et ut ingenue loquar, mirares, si non passione aliqua colerem Cartesium, cui tot nominibus devinctus sum et a quo tam multa et perquam utilia addidici. Sed ut videas hanc passionem mihi oculos non obcaecare atque adeo noxiam esse, libere dicam, perplures et qualitate grandes errores in Cartesii scriptis contineri, imo plus, me hanc quam attulit de Deo demonstrationem non magni facere, licet legitima sit, et hoc est quod semper conquestus sum, non quod methodum quae per definitiones (quam ipse approbo) procederet improbarem, sed quod inquirendae sint definitiones adaequatae omnium rerum. Quod autem non adaequata sit eo senso quo Cartesius sumit, patet, quia revera infinita ex Dei natura sequuntur quae nescio an Cartesius ex hac posita definitione deduceret, cum tamen si adaequatam Dei definitionem nobis tradidisset, omnia nobis deberent obvia esse quaecunque in Deo sunt, imo nobis aeque clara ac certa ac ipsi Deo. Et licet non mihi ullo modo jam tempus sit Metaphysicis delectari, hoc enim tempus si habuero, forte a Mundo penitus abstractus vivam adeoque quaecunque jam circa talia affirmo, saltem inter conjecturas et probabilia pono, attamen non intermittere possim quin dicam, mihi eam definitionem quam tradidit mortuus noster videri adaequatissimam, dum Deum definit per substantiam absolute infinitam. Substantia autem per ens quod in se est seu quod idem, quod per se concipitur; prima enim definitio (quod in se est) exhibet naturam substantiae qualis in se est absque respectu nostrae naturae; secunda definitio (quod per se concipitur) exhibet naturam substantiae, quatenus a nobis concipitur; hisce enim positis non credendum quam ardua et quam tamen magna facilitate deducantur, et infinitae difficiles admodum quaestiones quae omnibus crucem fixere in Metaphysicis quanta claritate decidantur.

Et quia percipere possum te legisse scriptum ejus hac de re elaboratum, non opus erit adeo prolixe esse ad aliquod meae assertionis argumentum proferendum. Sic itaque ex definitionibus quas ibi tradit et axiomatibus primae partis aliquando deduxi (seu potius collegi aut contraxi quae prolixius habeat, ne videar quod alterius est mihi attribuere) demonstrationem sequentem existentia Dei.

1. Propositio

Substantia est ens absolute infinitum.

Substantia est ens quod in se est, adeoque non est in alio, nec in ullo alio quocunque (alias enim non esset in se absolute loquendo). Unde a nullo alio absolute terminatur, adeoque absolute infinitum est.

2. Propositio

Substantia necessario existit.

Substantia est quod per se concipitur adeoque non est effectus alterius rei (Effectus enim per aliud, hoc est per suam causam debet concipi) nec cujuscunque alterius rei effectus (alias enim non per se conciperetur absolute loquendo). Unde nullam causam habet absolute suae existentiae adeoque per se ipsum existit sive ex vi suae naturae seu quod idem, necessario existit. NB. hinc clare sequitur extensionem absolute sumptam necessario semper extitisse.

3. Propositio.

Deus necessario existit.

Substántia est ens absolute infinitum (per primam prop.) quodque necessarium existit (per secundam) adeoque ens absolute infinitum, hoc est Deus (per definit.) necessario existit.

Nec credo te hanc definitionem contradictionem posse involvere entis quod in se est, nimirum Dei et Mundi, id quod in alio; nullus enim vel puer est qui non adaequatam hujus rei habet cognitionem, et quoque hoc ipsum non circa Cartes. definit. entis perfectissimi debebas timere. Ponamus enim Cartes. definitionem Dei per ens perfectissimum etiam juxta mentem Cartes. superius expositam in se contradictionem involvere, dico tamen eandem legitimam esse, sit enim talis definitio quam contradictionem involvere existimamus ac ponamus quod necessario hac posita existentia definiti sequatur, dico quod eo ipso essentia definiti hoc est ipsa definitio nullam contradictionem involvat; si enim existentia hac posita possibilis erit, etiam essentia ejus prout supposita possibilis, adeoque ut quia posito ente perfectissimo necessaria adeoque et possibilis est existentia ejus (prout ipse fateris) e contrario etiam conceptus

hujus entis perfectissimi debet possibilis esse et si possibilis (. . . . . fateris) etiam ejus existentia necessaria. Caeterum rogo ut condones, si forte aliqua in re lapsus sum ob nimiam prolixitatem; gaudeo praeterea Claris. Hugen. bene valere, cum mundus paucos sui similes habet, eo plures sunt aestimandi, et quia revera hominum utilitas a talibus expectanda qui sincere intellectum excolunt, non deberent non in eo omnes toti esse (si verum suum utile nossent) ut horum esse quam maxime conservarent; ego eo reflectens non possum quin ut tibi restituaris ex animo optem, et si aliquid unquam erit quo tibi inservire possim, id sine fuco, astutia, uno verbo candidissimo pectore exsequar, immemor tuae suavissimae conversationis, cui aeternum obligatus vivo, in aeternum quoque Tuus sincerus etc.

P. S. Zu Turin habe einen bratenwender so singular gesehen: Es war oben in schorstein nur ein loch etwan einer elen in diametro, in welchen ein rad, an welchen wie pinnae lamineae, dieses füllete das loch fast gar auß, der rauch aber der durch muste, wendete solches so an einer stangen war, continuirlich herumb. Durch eben dieser hülffe wurde der bratspies umbgedrehet, und zwar mit solcher proportion, war viel fewer, so drehete er sich geschwind herumb, und also auch der bratspies, wie den erfordert wird, wo was daran nicht verbrennen soll, war wenig fewer, so gieng solches langsam gleichfals in dienlicher proportion hierzu. Mich bedünket dieses instrumenti figur in Joco seriis des Schooti gesehen zu haben. Endlich ersuche, so was würdiges in Mons. Newton briefen, mir zu communiciren, oder auch sonst was mir dienen köndte. Adieu.

III.

Tschirnhaus an Leibniz.

Ich wihl nicht zweifeln, Sie werden unlängst von mir abgegebnes erhalten haben; mitt ietzigen überschicke nebst . . . . begrüßung ingelegtes wie von Sie verlanget worden, worbey notificire, das dieser Francesco Nazari, so author des Giornali alhier, sowohl entrée chez la Reine et les Cardinaux, als auch erkennet, das er ein feiner habiler man, welcher mich versichert, dieweil er dem Hrn. durch M. Oldenburgers notifizirung erkennet, das Ihm recht angenehm dero correspondenz sein soll, nur verlanget selbiger von Ihm durch ein briefgen hierin vollkomner (ob Ihm schon dieß was mir überschrieben

worden, leßen laßen) informirt zu werden, wie auch dieweil er nicht gerne seine brieffe durch deß Settimii Paluzzi hende wolte gehen laßen, eine addresse entweder zu Venedig oder wo sonst beliebet würde, damitt solche sicher fort köndten kommen. Ich habe solches bald melden wollen, damitt, dieweil annoch 4 monath gedenke hier zu verbleiben, in der Zeit, was dem Hrn. hier zu erhalten dienlich, mitt deßen satisfaction, ins werke konte stellen. Er wohnet sonsten nel corso prope Dominum Rospigliosum, und scheint Tinctus in omni scibili, wobey er sehr diensthafft und human sich gegen mir erwießen. Ich lebe sonsten gar vergnügt; wegen ziemlicher hietze habe alle studia quittiret, tractire nur eintzig die Italienische als Franzoische sprache, wozu gutte gelegenheit. Den Hr. Kircherum habe bey vielen mahlen gesprochen, und bin in deßen abwesenheit in deßen Gallerie noch belieben, worinnen curieuse Machinen, als auch alle seine opera. Mochte wießen ob den Hrn. ein modus Generalis bekandt: ex data alicujus spatii, curva Geometrica terminati, mensura centrum gravitatis in axe determinandi, es würde mir in gewießer inquisition dienen. Es hatt wohl der des Cartes einen ingenieusen modum hierin den Schotenio communicirt, so in deßen Commentarien enthalten, aber nicht universal beglaube zu sein. Meine letzte exercirung, damitt meine studia mathematica beschloßen, hatt mich auff einen so leichten Methodum, omnium curvarum quantitatum hactenus cognitarum mensuram zu erhalten gebracht, als mir nicht wießend, maßen solches solo calculo (ohne inquisition der Tangenten, noch supposition indefinitae alicujus parvae lineolae neque centri gravitatis cognitio) eoque facillimo, duobus aut tribus saltem lineolis constanti beschiehet. Mochte wießen ob man die quadratur dieser spatiorum, deren natur in folgenden aequationen

$y \infty \sqrt{xx - x^4}$	$y \infty \sqrt{x^6 - x^8}$	$y \infty \sqrt{x^{10} - x^{12}}$	atque sic in infinitum
$y \infty \sqrt{x^4 - x^7}$	$y \infty \sqrt{x^{10} - x^{13}}$	$y \infty \sqrt{x^{16} - x^{19}}$	
$y \infty \sqrt{x^6 - x^{10}}$	$y \infty \sqrt{x^{14} - x^{18}}$	$y \infty \sqrt{x^{22} - x^{26}}$	

welche alle ad mensuram reduciret, wie auch infinita andere, so surdis signis miris modis implicirt, ... solche nicht meinen, das circuli quadratura sehr probabel . . . . weil die quadratura dieses spatii $y \infty \sqrt{xx - x^4}$ seu $y \infty x\sqrt{1 - xx}$ bekandt, nehmlich $\infty \frac{2}{3}$, und ad circuli quadraturam nichts mehr zu finden nöthig, als summa omnium $\sqrt{1 - xx}$. Sed satis harum rerum pro hac vice; die zeit ob visitirung vieler bekandten so abreisen, laßet mir nicht mehr zu als zu versichern etc.

IV.

Tschirnhaus an Leibniz.

Rom. d. 27 Januar. An. 1778.

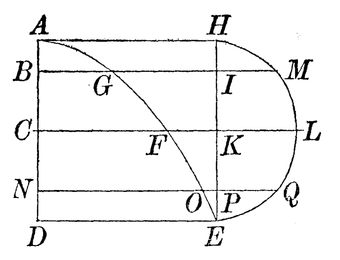
Tam amplas literas jam dum ante duos menses ad Te*) transmisi, ut mihi viderer omnem scribendi modum excessisse, et quia binarum literarum quas ope Dn. Paluzii ad Te magno abhinc temporis spatio destinaram, nondum tamen responsum accepissem, eas potius ad Dn. Schüllerum misi, ut Tibi hac ratione et secure et citius redderentur. In iis autem ad omnia quae tunc desiderabas, quantum vires permisere, respondi et inter alia Methodum communicavi, qua omnium quantitatum possibilis proportio determinatur, omnesque quantitates irrationales ad infinitas series reducuntur, ubi ostenditur $\sqrt{2}$ aequari $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{1}{60} - \frac{1}{348}$ etc. et alia hujus generis; hoc solum hic addam 1. Quod haec Methodus facilius multo intelligatur, si explicetur per continuas subtractiones et prout quoque primo adinveni, sed prolixior mihi visa illius explicatio, adeoque malui alteram per divisionem ipsi praeferre; 2. quod data aliqua serie infinita, statim ejus conversa (uti sic eandem soles vocare) possit inveniri; ostendi enim ibi, qua ratione data aliqua serie haec ad infinitas aequationes possit transferri, comparando omnes terminos hujus seriei cum terminis generalis cujusdam seriei et quod ex hisce aequationibus duae semper series infinitae possint elici, prout altera quantitatum cognita aut incognita supponitur. Siquidem tempus id permittet ut haecce omnia denuo accuratius retractare possim, tentabo quae conversa series, supposita tua circuli quadratura, proveniat hac methodo et alia quae ad ultimam perfectionem hujus Methodi desiderantur. Porro circa Metaphysica quoque quaedam erunt ibi exposita, sed rudiora forte quam quae Tibi placere possint. Interim gaudeo quod Virum offenderis, ex cujus conversatione satisfactionem circa talia habere possis, sed nescio sane, ob quam rationem nomen ejus mihi retices, quod mihi utique pergratum esset cognoscere, uti et aliquando quae circa haec inter Vos peracta. Stenonem cognovi Virum admodum religiosum esse et certe ingenio pollentem, interim tamen non miror, quod Te disserentem haud assecutus fuerit, cum aliquatenus interiora ejus penetrare mihi licuit et ratio Tua circa haec allata praeprimis Ipsi conveniens esse videtur In Oldenburgero nostro utique multum

*) Leibniz hat bemerkt: non vidi.

perdidimus, et vellem libenter per Te addiscere, quis ei successurus sit, uti et alia quae in Anglia jam curiosa occurrunt, quia literarum commercium inter me et illos hac ratione interruptum. Instructionem quoque uberiorem (postquam eadem potitus fueris) circa calculi curationem apprime desiderarem. Interim ut D. Justelio inservire possem, specialius determinandae commoditates vitae, quas Ipse praecipue respicit, et licet mihi persuadeam, hoc praecipue dependere a cognitione verae Philosophiae, attamen quoque necesse est, ut concedam, Nobis tam multa per experientiam innotuisse, ut hisce, praeeunte sano judicio, adhibitis, magna jucunditate vitam transigere liceret. Verum talia credo Ipsi plura nota esse quam mihi, quicquid sit; si specialius haec rescivero, et forte aliquid circa haec occurrat, non denegabo communicationem, quo inserviam tam utili proposito. Hoc praeterea mihi persuadeo, ut alia taceam, per plurimas posse excogitari corporis exercitationes, quae illud ad omnia aeque aptum reddant quaeque mentem hinc ad quaevis exsequenda aptissimam efficiant, aliasque utilissimas observationes, quae Homini Philosopho perquam necessariae videntur. Quoad externa quoque quot non hinc ad nos commoda derivantur, cum pleraque quae jam hominum opera fiunt, per artificiosas machinas credo posse exsequi, cum permulta jam quae antea hominum labore fiebant, nunc ope aquae, venti, animalis aut alterius motoris et machinae cujusdam ope peraguntur, tam quae ad necessitatem spectant, quam quaedam quae ad jucunditatem (uti Musica illa instrumenta quae quasvis melodias exhibent, inter quae artificiosum hic Romae visitur Machinamentum, quo artificiosius nunquam vidi et cujus effecta descripta habentur in libello quodam hic impresso). Nec video qua ratione non eadem via parari possint et omnis generis panni, quae tam ex lino, serico aut alia quavis materia efficiuntur ac in majori multo copia quam jam, imo Tibi alia ac alia infinita talia, et tam laboris plenae scissurae ac politurae lapidum ac marmoris, item Agricultura et in genere omnia Artificia, quae satis distinctis operationibus in sensus occurrunt, ac proinde a quovis satis perfecte addiscuntur, nam quoad alia, licet quoque probabilia mihi se primo intuitu offerant quoad eorum possibilitatem, forte tamen machinarum talium productio plus laboris requireret, quam id ipsum, quod ejus ope praestaretur. Hic autem ex occasione notabo, mihi relatum Venetiis machinae ope lentes in magna copia una et eadem opera omnes simul posse elaborari, quamque me scire credo; in mechanicas autem inventiones Marchionis cujusdam Tiberis coercendi etc. responsum fuit, id Venetiis peractum circa similem materiam, sed artificium nondum hic constare, nisi quod Hollandus quidam simile fere consilium dederit hic loci circa Tiberim et quoque bono cum successu

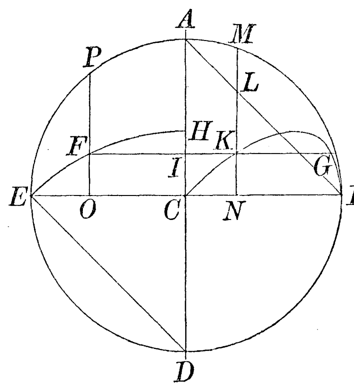
exsequutus fuerit, prout hic ipse vidi. Sed res non est tanti momenti ut pluribus exponam.

Pat. Gottignies in sua Logisticae Idea An. 1677 hic impressa pag. 207 hisce verbis quadraturam suam circuli mundo annunciat: Nemo hactenus inventus est, qui in rigore Geometrico solverit quadraturam circuli, tametsi certo constat solvi posse; utrum legitimam ejus solutionem ego invenerim, tunc alii statuent, quando publici juris facta erunt, quae hactenus inter privata mea scripta delitescunt. Multoties contuli cum Ipso, sed multas conjecturas habeo, quae mihi contrarium suadent, et revera si obtinuisset, eas non video, quare non publici juris faceret; sed forte probabilitate deceptus possibilitatis incidens in talia problemata, quae solutum facilia videbantur, quaeque circuli quadraturam supponebant, prout quaedam Ipse in praedicto Tractatu recenset, et revera mihi non saepe (credo facile et aliis has materias tractantibus) talia se obtulere, quanquam nunquam probabilius specimen sequente: Sit Parabola ADE cujus axis AD, sitque DE ∞ AD; jam fiat AB ∞ DN et ductis lineis BM et NQ parall. ad. AH fiat BG ∞ OQ et NO ∞ GM; idem fiat ubique et exsurget spatium AHLEFA ∞ Parabolae ADE; Dico jam dato solido quod fit a figura HLE circa axim HE (seu ut dicis momentum figurae HLE) dari quadraturam circuli; quis primo

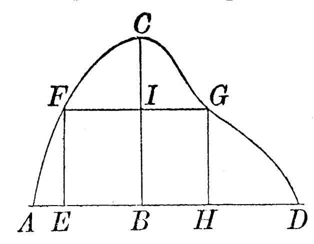


intuitu non existimaret hoc possibile esse cum 1. quadratura spatii HLE detur, 2. solidi dimensio quod fit a figura HKL circa axim KL, ac cum tertio spatium hoc HLE tantam affinitatem habeat cum Parabola, cujus quadratura datur, hac probabititate allectus me ad hoc solvendum accinxi et vidi statim, totam difficultatem in eo consistere, ut centrum gravitatis hujus figurae HLE determinetur in axe KL, adeoque inquisivi in Methodum Generalem, ex datae figurae quadratura centrum gravitatis determinandi, et cum non videretur juxta vota progressus, ad Te confugi et revera non potuisses aptius respondere quam referendo idem prorsus exemplum, in quod incidi (uti perfacile ex applicatione apparebit licet primo intuitu diversa videantur) loco responsionis, cum annexa ingeniosa reflexione ex tua Cyclometria, quod tam generalis circuli quadratura non possit dari, cum (prout, si recte memini, recenses) hinc alias Anguli trisectio, ope circuli possit exhiberi et similia, seu quod idem, aequationes cubicae ac superiorum dimensionum horum angulorum sectiones exprimentes possent ad quadraticam reduci, quod utique non possibile videtur, licet nullam hac de re demonstrationem habeam nec adhuc videam impossibilitatem hujus solidi

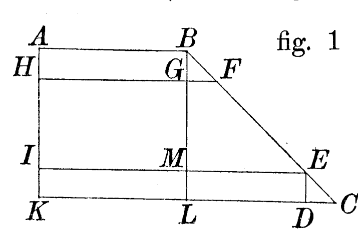
dimensionem impetrandi aut certae cujusdam partis saltem, hicque obiter velim scias, per hoc ipsum instrumentum quo me vidisti Angulum datum in quotvis aequales partes posse dividere, quoque me jam, invariato prorsus eodem, quotcunque medias proportionales designare posse. Quae de Fractionum reductione ad numeros decimales innuis, bene percepi, et ut omnia universalia magni admodum facio, ac si per tempus licebit non ad decimalem sed ad quamcunque ejusmodi divisionem ut binalem, trinalem, septinalem etc. applicabo; verum non omni ex parte percepi, qua ratione hinc curvarum quadraturae possint derivari nec quod alio loco scribis, Te idem negotium per Logarithmos posse absolvere, et horum cognitio mihi pergrata esset. Quoad Methodum, in quam incidi, ope cujus majori facilitate quam hactenus vidi, quadraturas curvarum quantitatum exhibeo, non credo displicebit ejus communicatio; sequentia autem circa illam annoto 1. non existimo me dixisse ipsam absolvi absque Methodo indivisibilium, ut vulgo vocant, sed saltem non opus esse ut consideremus rectangula, cujusdam altitudo indefinite parva; fateor enim considerandas esse vel solas lineas rectas aut superficies planas ut solet Cavallerius, vel universalius cum Cartesio nihil aliud considerandum esse quam solam relationem, qua ille solet uti ad curvarum naturas calculo designandas, prout statim apparebit. Interim si hisce non directa Methodo quadraturas curvarum quantitatum obtinendis credis, utique nec Methodus mea hoc praestabit; ostendam autem hic prius ex occasione, quomodo didici quadraturam Lunulae Hippocratis posse demonstrari per simplicem linearum transpositionem absque Euclideo illo Theoremate, quod insinuas: sit circulus EABD centro C, radio CA descriptus, ductis jam diametris AD et EB normaliter se intersecantibus in C ac linea recta AB, tunc fiat (ducta ad libitum MN parallela AC) ML ∞ KN et sic ubique eritque spatium CKGB hinc proveniens aequale spatio AMBL fiat denuo KG parallela CB ac semper aequalis FI, eritque hinc productum spatium EFHC aequale spatio AMBL adeoque semilunula EPAHFE ∞ Triangulo ACB seu Triangulo ECD, et facile hinc porro possem ostendere EFH curvam esse arcum circuli radio DE descriptum, ac proinde semilunulam EPAHF esse eandem quam Hippocrates considerat. Sed hoc Tecum agendo utique superfluum esset; hoc ex occasione noto, si AMB sit curva Parabolica et



fiat continue ac ubique ML ∞ KN, et hinc KG ∞ FI, FO esse quartam partem GP adeoque spatium ACBM ad Triangulum ut 4 ad 3, et sic in quibusvis figuris haec applicando aut quadraturas datorum spatiorum assequi licet aut quadaturas ad minimum semper alicujus alterius spatii. Sed haec forte non recenseri merebantur. 2. Itaque me ad Methodum modo promissam, quam breviter ac clare potero, explicandam accingo:



Sit figura quaecunque CBD, jam concipiatur alia figura quaecunque CBA perpendiculariter erecta supra lineam CB Atque sic ex infinitis rectangulis FIG formetur solidum quoddam: dico jam infinitas intersectiones hujus solidi secundum lineam IG parallelam BD aequari infinitis intersectionibus hujus solidi secundum lineam HG parallelam BC, seu quod idem Omnia rectangula FIG aequari omnibus spatiis ABIF. In hoc unico ac tam facili consistit haec Methodus, quod qui bene percipit, in reliquis nullam difficultatem experietur. Et mirum posset videri haec tam facilia non potuisse alicui in mentem venire, cum ingeniosissima hujus seculi extant inventa, nisi viderem tam infinita numero praeclara Theoremata tanta facilitate hinc posse deduci, quorum permulta ab aliis, sane non difficiliore Methodo fuissent exhibita, si haecce ipsis nota fuissent. Sed infinita cum extent facilia, ad quae nimirum penetranda non multum requiritur ingenii et quae tamen maximi usus, non mirum est ut nos quibus infinita percurrere non datum, quaedam subterfugiant, licet et facillima et perquam utilia, et posito quoque haec nota extitisse aliis, ut vix dubitare possum, non forte ipsis quoque notum fuit, haec tam utilia esse ad quadraturas eruendas et praeterea ea plerumque magni aestimamus quae elicienda multum ingenii requiritur, videtur adeoque quae imaginationem late afficiunt ac admirationem in nobis excitant potuisse homines ad tam sublimia pertingere; ea vero proinde parum aut nullius fere momenti quae quam maxime universalia et facilia quaeque ideo ordinarie solemus negligere. Sed satis praefati (ne ridiculum videatur me velle rem primo intuitu nullius momenti in tantum extollere) ad rem ipsam proprius accedamus: Formetur primo tale

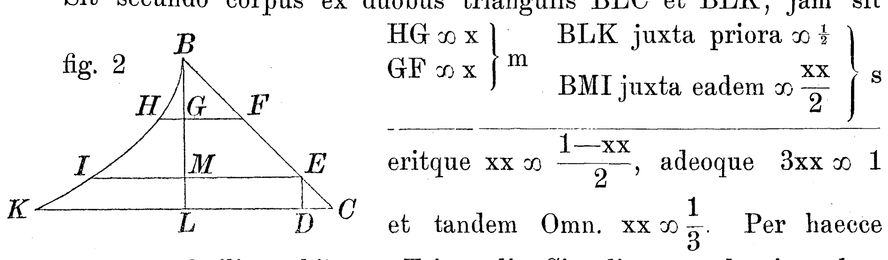


solidum ex quadrato ABLK et triangulo BLC, sitque BL seu LC ∞ 1; jam fiat BG ∞ x ad primam sectionem HGF calculo exprimendam; secundo ponatur LD ∞ x (NB. si linea LC major aut minor BL, potius LD litera y aut simili significanda est ob confusionem evitandam) ad secun-

dam sectionem ut supra dixi IMLK calculo exprimendam, haecque generaliter in omnibus sequentibus notanda. Jam itaque

$$m\left\{\begin{matrix} HG \infty 1 & IM \infty 1 \\ GF \infty x & ML \infty 1-x \end{matrix}\right\} m;$$ jam omnes intersectiones HGF aequantur omn. rectang. IML h. e. Omn. HGF ∞ x ∞ $1-x$ ∞ om. IMLK adeoque $2x \infty 1$ et omnes $x \infty {}^1/_2$.

Sit secundo corpus ex duobus triangulis BLC et BLK; jam sit

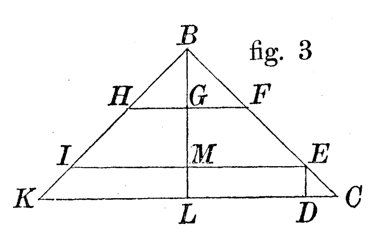


$$\left.\begin{matrix} HG \infty x \\ GF \infty x \end{matrix}\right\} m \quad \left.\begin{matrix} BLK \text{ juxta priora } \infty \frac{1}{2} \\ BMI \text{ juxta eadem } \infty \frac{xx}{2} \end{matrix}\right\} s$$

eritque $xx \infty \frac{1-xx}{2}$, adeoque $3xx \infty 1$ et tandem Omn. $xx \infty \frac{1}{3}$. Per haecce tam pauca et facilia exhibetur Trianguli, Circuli cum ad triangulum reducatur, Cycloidis, Parabolae, Coni, Sphaerae, Spiralis, Conoidis Parabolici, Conoidis hyperbolici dimensio, id est praecipua inventa Veterum ac infinita numero recentiorum. Sed ulterius progrediamur.

Sit tertio solidum constans ex triangulo seu figura ubi GF ∞ x et figura BLK ubi GH ∞ xx. Jam

$$m\left\{\begin{matrix} HG \infty xx & KBL \text{ per priora } \infty \frac{1}{3} \\ GF \infty x & IMB \text{ per eadem } \infty \frac{xx}{3} \end{matrix}\right\} s$$



eritque $x^3 \infty \frac{1-x^3}{3}$ adeoque $4x^3 \infty 1$ et $x^3 \infty \frac{1}{4}$, atque sic progrediendo eadem facilitate invenies $x^4 \infty \frac{1}{5}$, $x^5 \infty \frac{1}{6}$ atque sic in infinitum, ubi notes posse eadem inveniri si figura BLK in 2da et 3tia figura invertatur. uti et tam haec quam omnia sequentia posse quasi innumeris modis inveniri.

Sit jam porro solidum (respice 1. fig.) constans ex duabus superficiebus BLKA et BLC, in quibus GH ∞ 1 et GF ∞ xx; jam ut supra

$$m\left\{\begin{matrix} HG \infty 1 & IM \infty 1 \\ GF \infty xx & ML \infty 1-\sqrt{x} \end{matrix}\right\} m$$

$$\text{et erit} \quad xx \infty \quad 1-\sqrt{x}$$

adeoque $\sqrt{x} \infty 1-xx$ et hinc per priora Omn. $\sqrt{x} \infty \frac{2}{3}$. Sit jam (respice 2. fig.) GH ∞ x et GF ∞ xx; jam

$$m\left\{\begin{array}{ll} HG \infty x & BLK \infty \frac{1}{2} \\ GF \infty xx & BMI \infty \frac{1}{2}\sqrt{xx} \end{array}\right\} s$$

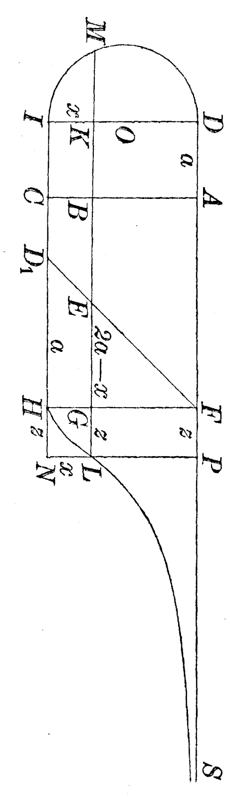
et erit $x^3 \infty \frac{1-\sqrt{xx}}{2}$ adeoque $\sqrt{xx} \infty 1-2x^3$, hoc est $\sqrt{xx} \infty \frac{2}{4}$. Jam assumendo GH ∞ xx et GF ∞ xx invenies $\sqrt{x^3} \infty \frac{2}{5}$, assumendo vero GH ∞x^3 et GF ∞ xx invenies $\sqrt{x^4} \infty \frac{2}{6}$, et sic porro $\sqrt{x^5} \infty \frac{2}{7}$, $\sqrt{x^6} \infty \frac{2}{8}$, atque sic porro in infinitum. Tertio si assumanus HG ∞ x et GF ∞x^3, 2do HG ∞ x et GF ∞x^3, 3tio HG ∞ xx et GF ∞x^3, 4to GH ∞x^3 et GF ∞x^3 atque sic porro, inveniamus $\sqrt[3]{x} \infty \frac{3}{4}$, $\sqrt[3]{xx} \infty \frac{3}{5}$, $\sqrt[3]{x^3} \infty \frac{3}{6}$, $\sqrt[3]{x^4} \infty \frac{3}{7}$, atque sic indefinite. Eadem ratione invenio sic progrediendo $\sqrt[4]{x} \infty \frac{4}{5}$, $\sqrt[4]{xx} \infty \frac{4}{6}$, $\sqrt[4]{x^3} \infty \frac{4}{7}$, $\sqrt[4]{x^4} \infty \frac{4}{8}$, item $\sqrt[5]{x} \infty \frac{5}{6}$, $\sqrt[5]{xx} \infty \frac{5}{7}$, $\sqrt[5]{x^3} \infty \frac{5}{8}$, atque sic in infinitum. Semper aequales erunt tales quantitates fractioni, cujus numerator exponens signi radicalis, denominator summa exponentis signi radicalis, et exponentis quantitatis x. Et hisce paucis me existimo 1. omnium Parabolarum, Spiralium et Conoidum Parabolicarum dimensionem ac infinitarum praeterea superficierum ac solidorum dimensionem ea facilitate exhibuisse, qualem hactenus non vidi; 2. quoque omnium quantitatum quae ab harum compositione exsurgunt, uti sunt omnia conoidea Parabolica a Parabolis infinitis circa basin genita atque infinitae aliae tales quantitates; 3. quia compositarum ex surdis quantitates infinitis modis possunt exprimi, ab unica tali compositione infinitarum quantitatum mensura dependet ex. gr. $\sqrt{x} + \sqrt{x^3} \infty$ juxta priora $\frac{2}{3} + \frac{2}{4} \infty \frac{7}{6}$; verum haec quantitas infinitis modis potest exprimi ex. gr. multiplicando in se quadratice, cubice etc. et extrahendo radicem quadraticam, cubicam etc.; sic multiplicando in se quadratice hanc quantitatem et extrahendo radicem erit $\sqrt{x + x^3 + 2\sqrt{x^4}} \infty \frac{7}{6}$ etc. ubi notandum quod quandoque egregia hinc assequuntur, si extractio procedit velut in praesenti exemplo, erit enim $\sqrt{x + x^3 + 2xx} \infty \frac{7}{6}$ (Nota: quid probabilius, jam hinc dari $\sqrt{x + 2xx}$, cum detur $\sqrt{x + 2xx + x^3}$ hoc est hyperbolae quadratura, sed probabilibus in hoc negotio non credendum, interim ad minimum inter-

polationis negotium a Wallisio exhibitum multum hinc adjuvabitur). Quot jam existimas quantitatum mensuram dari conjugendo tali ratione omnes binas, ternas, quaternas etc.? Attamen in eo non terminatur Methodus, sed progressum jam scio in infinitum haec continuandi ad binomiorum, trinomiorum etc. impetrandi mensuram, et cum jam Omnium curvarum possibilium numerum determinarim (ut ex receptis a me literis te intellexisse spero) et facile in hoc negotio omnes possibiles combinationes determinare liceat, credo si tempus haberem me posse hinc determinare tam omnes possibiles quadraturas, quam quae non quadraturam admittunt, et alia quae ad ultimam hujus methodi perfectionem requiruntur. Verum ut aliqua saltem Tibi communicem exempla quantitatum compositarum, in quae incidi ulterius progrediendo, observari Omnes $x\sqrt{1-xx} \infty \frac{2}{2,3}$, $xx\sqrt{1-x^3} \infty \frac{2}{3,3}$,

$$x^3\sqrt{1-x^4} \infty \frac{2}{4,3} \text{ etc. item } x^3\sqrt{1-xx} \infty \frac{8}{4,15}, \; x^5\sqrt{1-x^3} \infty \frac{8}{6,15},$$

$$x^7\sqrt{1-x^4} \infty \frac{8}{8,15} \text{ etc. item } x^5\sqrt{1-xx} \infty \frac{48}{6,105}, \; x^8\sqrt{1-x^3} \infty \frac{48}{9,105},$$

$x^{11}\sqrt{1-x^4} \infty \frac{48}{12,105}$. Atque sic talia magno numero communicare possem. Jam interim ad alteram partem hujus Methodi me convertam, quae consistit ut dato aliquo spatio mensura ejus detegatur (loquor saltem de superficie, quia omnes aliae quantitates ad has reduci possunt) tuncque sic procedo: conjungendo primo rectangulum cum proposita figura formo solidum hinc ut antea, et si quidem hinc non mensura patet progrediendo ut supra, assumo alias ac alias figuras quadrabiles et efficio hinc solida priori aequalia et tunc ut antea progredior formando semper aequationes inter diversas illas sectiones, cumque semper spatia illa quadrabilia in certa progressione assumo, debent provenientia quoque semper in certa progressione progredi, adeoque ut facile videam, num hac methodo intentum assequi liceat, ostendam speciminis loco, qua ratione Circuli ac aliarum figurarum novas hac methodo detexerim quadraturas. Primo sit semicirculus DMI et assumamus rectangulum DACI ita ut radius IO aequalis DA. Sed cum hac ratione nihil invenimus quod tendat ad nostrum scopum, ut tentanti constabit, assumo Triangulum FHD_1, in quo FH ∞ D_1H et efficio solidum priori aequale hoc est efficio ut rectangulum MKB semper aequale sit rectangulo EGL. Ponamus itaque in hunc finem IK ∞ x ∞ HG ∞ NL et posito OI ∞ a, erit DK seu FG ∞ $2a - x$ ∞ EG. Iam sit HN seu GL ∞ z et fiat rectangulum MKB aequale rectangulo EGL eritque $a\sqrt{2ax - xx} \infty$



$2az - xz$, quibus reductis invenitur $x \infty \frac{2azz}{aa + zz}$, ex quibus patet curvam hanc HLS esse eandem qua egregie Circulum quadrasti. Sed videamus, qualis Quadratura ex hac Methodo proveniat. Cum itaque jam omnia rectangula EGL juxta superiora aequalia sint omnibus spatiis DHGE supra NL, hoc sic calculo exprimo DEGH ∞ FHD — FGE hoc est DEGH $\infty \frac{4aa}{2} - \frac{4aa - 4ax + xx}{2} \infty \frac{4aa - xx}{2}$, restituatur jam x et erit $\frac{8aazz}{aa + zz} - \frac{4axz^4}{\overline{aa + zz}^2}$ hoc est $\frac{8a^4zz + 4aaz^4}{a^4 + 2aazz + z^4}$, hoc si dividatur per 2 et erunt omn. $a\sqrt{2ax - xx} \infty \frac{4a^4zz + 2aaz^4}{a^4 + 2aazz + z^4}$, quod si in hac fractione loco $2aaz^4$ esset $4aaz^4$, posset haec fractio dividi per $aa + zz$ atque sic in Tuam Quadraturam inciderem, quod aliquando examinabo num possibile sit hinc quoque educendi: qua ratione vero jam haec fractio ad infinitam seriem reduci debeat, Tibi notius jam est ex Dn. Mercatoris Methodo, quam ut prolixior eo sim. Annoto saltem si ponamus FG seu DK ∞ x (quod in sequentibus quoque facio) inveniatur $a\sqrt{2ax - xx} \infty \frac{2a^6}{a^4 + 2aazz + z^4}$. Sit secundo curva DMB talis cujus natura $\sqrt[3]{2axx - x^3}$ eritque supposito $a\sqrt[3]{2axx - x^3} \infty xz$, $x \infty \frac{2a^4}{a^3 + z^3}$. Jam omnes FGE supra PL aequales omnibus rectangulis EGL hoc est $\frac{xx}{2} \infty \sqrt[3]{2axx - x^3}$, hoc est, restituto x erit $a\sqrt[3]{2axx - x^3} \infty \frac{2a^8}{a^6 + 2a^3z^3 + z^6}$. Eadem ratione invenies $a\sqrt[4]{2ax^3 - x^4} \infty \frac{2a^{10}}{a^8 + 2a^4z^4 + z^8}$ atque sic in infinitum, infinitas quadraturas per series infinitas non ineleganter expressas. Possem jam ulterius progredi et eadem facilitate ostendere, tam quae Parabolis infinitis analoga quam alia innumerabilia spatia indefinitae longitudinis ad finitam mensuram reducendi, sed credo haec ex superioribus satis abunde constare. Hoc interim adjungam, cum Tota haec Methodus saltem in eo consistat, ut R e l a t i o n e s e j u s d e m q u a n t i t a t i s a d d i v e r s a s l i n e a s a d a e q u e m u s (atque proinde reflectando ad pag. 39 Geom. D. des Cartes mihi certo persuadeo hanc ipsam ipsius quadraturas investigandi Methodum adfuisse, quam, cum tam

facilis existebat, potius indigitare volebat, quam prolixe explicare, prout ipsi familiare erat circa talia) hocque sic praecise spectatum non saltem solidis applicabile (in hoc siquidem tali occasione incidi): Sit linea

A C B
x y

AB ∞ a, jam AC ∞ x et CB ∞ y, hinc a ∞ x + y, aa ∞ xx + 2xy + yy, $a^3 \infty x^3 + 3xxy + 3xyy + y^3$ atque sic in infinitum; demonstraveram autem omnes x aequari omnibus y, omn. xx ∞ omn. 2xy ∞ omn. yy, item omn. x^3 ∞ omn. 3xxy ∞ omn. 3xyy ∞ omn. y^3 atque sic infinitum semper continuam aequalitatem intra hasce infinitas quantitates existere; verum demonstratio haecce cum difficilis esset, eo ipso mihi displicuit, quapropter in faciliorem inquirens, vidi primo facile patere quasvis infinitas dignitates ab alia parte hujus lineae incipiendo aequari infinitis dignitatibus eadem ratione compositis incipiendo ab altera ejusdem parte ac proinde omnes x ∞ omn. y, omn. xx ∞ omn. yy, omn. x^3 ∞ omn y^3 etc. item omn. xxy ∞ omn. xyy atque sic quoad similia, adeoque saltem demonstrandum faciliori via omn. xx aequari omn. 2xy, item omn. x^3 aequari omn. 3xxy, atque sic continuo aequalitatem intra diversi generis dignitates. Variis autem tentatis viis res sic facillime successit. Dico itaque 1. omnia 2xy ∞ xx seu omnia rectangula AHF aequari omnibus quadratis AH (in 1. fig.) et sic demonstro: Omnia enim rectangula AHF bis aequalia sunt omnibus rectangulis EHD bis, hoc est solido a $\triangle$ ABF et $\triangle$ altero AFG perpendiculari ad AF, hoc est omnibus intersectionibus CD bis ejusdem solidi, hoc est omnibus triangulis AHE bis hoc est omnibus quadratis AH. Q. E. D. Dico secundo omnia 3xxy ∞ x^3 et sic demonstro: Omnia enim producta ex quadratis AH in HF ter aequalia sunt omnibus productis ex quadratis EH in HD ter, hoc est aequalia solido ex triangulo AFB et figura altera AFG perpendiculari ad lineam AF ter, hoc est omnibus intersectionibus secundum lineam CD parallel. AF ter, hoc est omnibus spatiis AHE ter, hoc est omnibus rectangulis AHE, hoc est omnibus cubis AH. Q. E. D. Atque sic porro progrediendo cum tantam facilitatem haecce sic demonstrandi observarem, hisce insistens in jam modo communicatam Methodum incidi. (Verum cum omnia, quae contra consuetudinem fiunt, ordinarie risum movent, non dubito quin eadem ratione tam extraordinariam

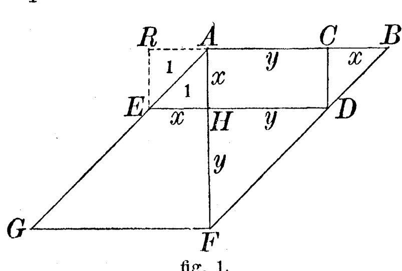
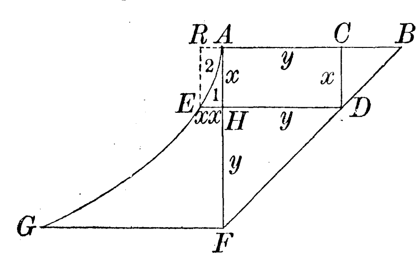
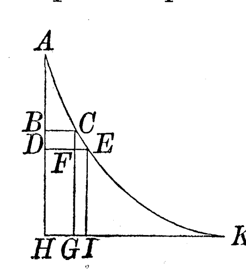


fig. 1.



parenthesin excipies, quod nec absque usu fiet, siquidem nimia attentio circa talia studia plerumque efficit ut vultus nostri constitutio tristitiae statui vicinior esse appareat quam hilaritatis). Idem quoque tentavi in superficiebus, et non contemnendum observavi successum. Attamen recordatus, quod Cavallerius solas lineas et superficies considerando, in superficiebus et corporibus sibi ipsi impedimento fuerit, quominus curvarum ac superficierum curvarum dimensiones exhiberet atque sic suam Methodum ad summam perfectionem reduceret, quod post ipsum egregie ab Aliis praestatum, considerantes in superficiebus rectangula cujus altitudo indefinite parva atque sic in aliis quantitatibus semper homogenea indivisibilia: reflectens, inquam, ad ea, vidi haec optime succedere, quanquam ob temporis brevitatem impossibile mihi fuit haec ex professo pertractare, quod ad quietiorem statum reservo: jam vero



mentem meam sic explico: Sit AHK quaecunque figura sitque AB ∞ x, BC ∞ y, BD seu CF ∞ o seu quantitas omni assignabili minor, qua utitur Fermatius et multi post ipsum ad Tangentes determinandas, Tu vero ad quasvis quantitatum transmutationes in alias solo calculo peragendas; AH ∞ 1 ∞ HK, hincque HD seu FG ∞ $1 - x - o$; porro calculi facilitas maxima erit, si postquam quantitas o certam dimensionem acquisivit, omnes quantitates includentes plures ejusdem o dimensiones omittamus; sit itaque primo natura hujus spatii hac aequatione expressa y ∞ x adeoque

1o.

$$\left.\begin{array}{l} \text{DE} \infty o + x \\ \underline{\text{BC} \infty x} \end{array}\right\} s$$

$$m\left\{\begin{array}{l} \text{FE} \infty o \\ \underline{\text{FG} \infty 1 - x - o} \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} \text{BC} \infty x \\ \underline{\text{CF} \infty o} \end{array}\right\} m$$

jam omn. rectangl. GFE ∞ $o.1 - o.x$ ∞ $o.x$ ∞ omn. rect. BCF

adeoque $2x \infty 1$ et $x \infty \frac{1}{2}$.

2do.

Sit y ∞ xx adeoque

$$\left.\begin{array}{l} \text{DE} \infty xx + 2.ox \\ \underline{\text{BC seu DF} \infty xx} \end{array}\right\} s$$

$$m\left\{\begin{array}{l} \text{FE} \infty 2.ox \\ \underline{\text{FG} \infty 1 - x - o} \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} \text{BC} \infty xx \\ \underline{\text{CF} \infty o} \end{array}\right\} m$$

rectangl. GFE ∞ $2.ox - 2.oxx$ ∞ $o.xx$ ∞ rectangl. BCF

ergo $2x \infty 3xx$, hoc est juxta priora $xx \infty \frac{1}{3}$.

3tio.

Sit $y^3 \infty x^3$. Jam

$$\left.\begin{array}{l} DE \infty x^3 + 3.oxx \\ DF \infty x^3 \end{array}\right\} s$$

$$m \left\{\begin{array}{l} FE \infty 3.oxx \\ FG \infty 1 - x - o \end{array}\right. \qquad \left.\begin{array}{l} BC \infty x^3 \\ CF \infty o \end{array}\right\} m$$

omn. rectangl. GFE ∞ $3.oxx - 3.ox^3 \infty ox^3 \infty$ rectangl. BCF adeoque $3xx \infty 4x^3$, et hinc juxta priora $x^3 \infty \frac{1}{4}$.

Atque sic in infinitum. Sed haec etiam alia adhuc via ac faciliori possunt exhiberi, et haec ad explicationem superiorum sufficiant. Ubi animadvertere licet: hanc viam per superficies solas in eo superare priorem, quod hic ad quantitatum dimensionem obtinendam non opus alterius diversae superficiei dimensione habere, sed solam naturam superficierum nobis datam, et credo hanc ultimam esse perfectionem quam desiderare possunt Mathematici circa Quantitatum mensuras veluti aliquando me spero ostensurum. Circuli Tui quadraturam statim hinc deduco et quaecunque hactenus vidi egregia, ac mihi persuadeo quicquid humanitus potest deduci circa hanc materiam (licet subridendo forte existimabis me hancce phrasin contraxisse a Viro, quem me scis magni admodum aestimare et qui aliqua captum humanum superantia credidit quae tamen recentiorum industria detexit). Nec hinc Gregorius amplius Algebrae defectum incusaret circa quantitatum mensuras prout facit in Praefatione Geometriae suae universalis. Ultimo possem hic ostendere tam qua ratione per eandem Methodum hinc deduxerim duo Theoremata Tibi transmissa ad centra gravitatis curvarum quantitatum determinanda, quam qua ratione ope horum centra gravitatis majori facilitate ac supra curvarum quadraturae assignari possint, sed brevitatis causa hic omitto, cumque haec non difficulter jamjam pateant. Tuam Cyclometriam omnes maxime desiderant quibus insinuavi inventa quae continet, ac optat praeprimis Dn. Nanzarius ut quam primum hujus Tractatus exemplar possit impetrari, qua de re ut et circa hactenus desiderata a Te literae hisce inclusae pleniorem spero instructionem exhibebunt. Dn. Fabri nondum visitavi ob multas rationes, attamen non discedam ipso insalutato; de Borellio non dissimile mihi judicium vestro; Kircherum vero multoties salutavi ob diversas rationes; in Musicis impetravi quaedam eorum quae reticet in sua Musurgia; jam Artis suae Combinatoriae secundus Tomus qui dicitur Ars analogica, Amstelodami imprimitur; in Hetruria describenda modo occupatur.

Ceterum adeo ejus interiora penetravi tam ex lectione quam Ipsius conversatione, ut quousque ipsius Methodo pertingere liceat, quaeque paradoxa hinc deducere, me credam aliquatenus videre, de quibus, ut spero, aliquando oretenus. Auzout non Romae est; Francisc. Levera vero mortuus. Cassini inventa de duobus aliis Planetis circa Saturnum praeter Hugenianum hic in dubium vocantur. Caeterum quoad optica vitra et hic et alibi egregia vidi; Divini vero non est Romae; Bacone Genuae occupatur in scribendo certo libro. Vidi librum Francis. Bayle Tolosae impres. An. 77 hoc titulo: Problemata Physica et Medica, in quibus varii Veterum et Recentiorum errores deteguntur; item Dissertationes ejusdem Physicae; non potui eo ob certas rationes, nisi duarum horarum spatio frui; inter multa quaedam nova quoque indigitabat quaedam circa refractionis materiam et tam defectus demonstrationis Fermatii quam Cartesii in hoc negotio mihi videbatur ingeniose detegere ac emendare. Posses submonere Dn. Hugenium hac de re, quem meo nomine officiosissime salutes; licet non libenter talia literis committam, attamen ob ea quae tam praestanti Viro debeo, non possum quin indicem, Italos de ipso admodum male judicare ac conqueri ipsum ultra viginti propositiones ex Gallileo hausisse in suo Horologio oscilatorio, nec ipsius tamen mentionem fecisse; desiderat quoque Dn. Riccius ab eo jam a longo tempore responsum. Dicunt huc allatum esse horologium ex Gallia, quod praestantius sit ultima inventione Dn. Hugenii; spero hoc me brevi visurum. Perhibetur quoque Becklinium, quae circa viventia sub aquis in lucem emisit, curiosa esse. Caeterum quo feliciori in statu te esse scio, eo mihi hoc semper gratius erit; sed revera dolorem vix continere possem, licet studioso sapientiae videretur inconveniens, si scirem aliquid esse quod te impediret, quominus in sapientiae studio progredereris, cum revera Nullum Tui similem nullibi jam sciam, quod revera ex conscientia loquor, et si respiciam quanta obstent impedimenta, quominus quis eam perfectionem sibi acquirat ac in ea aetate, non possum non quin optem ut libertatem Tuam sartam tectam retineas. Et revera Mundus tam egregios Viros perdidit, quosque jam dolet et praecipue ob id, quod ipsis non melior occasio data, quo majora ipsis augmenta sapientiae reliquissent, quique jam adeo animum suum praeparant, ut quae difficillima jam aliis, ipsis facilia fuissent, adeo ut existimem omnes qui haecce bene norunt, ac existimare sciunt, non debere non in eo totos esse, ut talibus procurent quicquid ab ipsis ad hoc desiderari potest, et credas firmissime me Te eo affectu prosequi, ut quicquid vires meae unquam permittent, id in gratiam Tui liberrime exsequar. Sed licet haec non respicerem, talia sunt judicia Tua de me, ut fatear (licet ob meam propriam potius aestimationem mearum acti-

onum delectari, quam alienam assuetus sim) non injucundum tamen est me a Tanto Viro aestimari, ac praeterea officio tam generoso, ut haec me Tibi aeterno nexu obligant. Scripsi non ita pridem (in tam saepe nominatis literis) meam circa haec sententiam; sed non displicent quae suggeris modo; me informabo circa Canonicatus tales; interim expecto literas a Meis, quibus receptis melius potero determinare, quod mihi imposterum sit aggrediendum, atque tunc cogitationes meas Tibi rescribam, ac quando Roma discedam, quod tamen credo intra duos menses effectum dabitur; quo autem tunc pergam, incertus adhuc, nisi quod sim etc.

V.

Leibniz an Tschirnhaus.*)

Venio ad ea quae de dimensionibus curvarum habes, peringeniosa more tuo. Sed nolim putes ad eorum demonstrationem opus esse rectangulis exiguae altitudinis. Nam ex multis planis non fit solidum nec ex multis lineis spatium, sed ex multis rectangulis vel parallelepipedis exiguis. Ea quam explicas in literis methodus tua est affinis ductibus figurae in figuram, quos primus invenit et cum fructu adhibuit P. Gregorius a S. Vincentio, postea generalius adhibuit Pascalius. Ego talia et innumera alia calculo solo complector, ex. causa sit y aequ. $\sqrt{x^2 + b^2}$, z aequ. $\sqrt{bx + b^2}$, et yz aeq. aω aequ. $\sqrt{bx^3 + b^3x + b^2x^2 + b^4}$, erunt plana solidi ductu ordinatarum y, z in se invicem facti proportionalia seu homogenea planis seu, ut ita dicam, ordinatis solidi ductus**). Si jam solidum alio modo secari possit quomodocunque et alia figura plana curvilinea reperiatur, cujus ordinatae v sint proportionales planis sectionis, patet cum solidum diversis modis sectum semper sit idem,

---

*) Von der Antwort Leibnizens fand sich nur das folgende Bruchstück.

**) Leibniz macht hierbei die Marginalbemerkung: Methodum illam tuam per solidorum ductuum diversas sectiones hac complector aequatione transcendente $\int \overline{zydx}$ aequ. $\int\int \overline{\overline{zdx}\, dy}$, ubi tantum ipsarum z et y relationem ad x in ipsarum locum substitui oportet. Unde infinitae deduci possunt quadraturae absolutae vel hypotheticae, sed infinitas alias ejusmodi aequationes habeo non minus feraces, ut intelliges calculo meo intellecto.

summam omnium v haberi posse ex data summa omnium ω vel contra. Eadem methodo usus est P. Honor. Fabri in suis Geometriae Elementis ad demonstrandas quadraturas, sed plerasque dudum notas. Sed neminem autorem vidi, qui hujus rei pariter ac multarum aliarum vim animo complexus sit. Te certe unum hunc ductuum usum satis universaliter considerasse arbitror. Unus olim P. Gregorius a S. Vincentio aliquid hujusmodi quasi per nebulam vidisse videtur, sed calculi defectu latius extendere non potuit. Sed nonnulla ex his variosque alios vastissimos conceptus Tibi aliquando in schedis meis dudum notatos monstrabo, si modo Tibi tanti videtur. Caeterum omnes hujusmodi methodos puto imperfectas, habent enim aliquid a casu. Et data problemata earum ope solvere non possumus, nisi condita Tabula. Nescio an demonstrare possis ope Tuae methodi (sectionis ductuum) omnes quadraturas possibiles provenire, puto tamen multas pulcherrimas progressiones ejus ope provenire posse. Ego (si methodos hujusmodi sequi libet) methodum per differentias habeo pro perfectissima, ejus enim ope omnes curvas quadrabiles in Tabula exhiberi posse certum et demonstrabile est, quod me Tibi alias dicere memini. Altera pars quoque Methodi tuae pulcherrima haud dubie theoremata et progressiones exhibebit. Puto autem hanc methodum tuam fore aptissimam ad Wallisianas interpolationes demonstrandas et universaliores reddendas. Caeterum annotare operae pretium est ad tuam Methodum nos devenire sine ulla solidi contemplatione, hoc unum tantum adhibendo, quod summa summarum idem sit cum momento figurae alicujus vel seriei*). Et similia theoremata etiam ad imaginarias dimensiones produci possunt, cum scilicet aequalitates sectione alicujus figurae imaginationi exhibere non licet. Calculum autem habeo pro talibus theorematis eruendis peculiarem, qui cum calculo, quo ad tangentes utor, convenit. Caeterum hujus calculandi rationis circa transcendentia ne primi quidem aditus Cartesio fuere noti, non defectu ingenii, sed (ut in aliis hominibus) defectu reflexionis. Quare non potui non risitare nonnihil, cum putes Cartesio methodum investigandi Quadraturas tuam innotuisse. Pari jure poteris dicere eam innotuisse Cavalerio, aut nescio cui non. Ego pro certo habeo, Cartesium in his rebus non multo longius fuisse provectum, quam Cavalerium, nam Cavalerii tantum more quaerebat summas ordinatarum in figuris. Si vero intellexisset satis Archimedeam Geometriam, nunquam dixisset, non posse inveniri lineam curvam rectae aequalem, facile enim judicasset, dari posse curvam, in qua (polygoni infinitanguli instar considerata) latera procederent ut or-

---

*) Leibniz hat am Rande bemerkt: id est $\int \overline{zydx}$.

dinatae parabolae alteriusve figurae quadrabilis; potuisse autem talia invenire, si se applicuisset, non dubito, non tam vi methodi suae, quam vi ingenii. Caeterum progrediendo in lectione literarum tuarum video te subjecisse pulcherrimas quasdam et universalissimas contemplationes, ex quibus illa semper mirifice placuit, quod omn. x^2 aequ. omn. $2xy$ aequ. omn. y^2, et ita de caeteris, posito AB esse constantem seu $y + x$ aequ. a, et AC aequ. x et CB aequ y. Haec contemplatio penitus nova est et te digna: nec enim hoc theorema alibi videre memini, et gaudeo id a te facile demonstrari, est enim momenti maximi. Non vidi illa duo theoremata circa centra gravitatis curvarum, quae mihi transmisisse ais. Ego non dubito, si ita pergis, quin tandem ad intima atque universalissima sis perventurus, in quo si tibi sparsae et variae, atque ut ita dicam, desultoriae meditationes meae utiles esse possunt, quas in his rebus habeo, equidem mihi gratulabor. Vicissim a te multa et pulcherrima mihi ignota expecto. Optime facies si quae de periodis fractionum ad numeros decimales reductarum innuis, etiam ad alias progressiones . . . .

$A \quad C \quad B$

VI.

Tschirnhaus an Leibniz.

Romae d. 10 Aprilis An. 1678.

Literas tuas binas recepi easque gratissimas; ad priores non licuit prius respondere, cum responsum ad Meas ex Patria nondum receperam; jam vero ad quid determinatus sim, paucis significabo. Cum huc Romam veneram et paucis instabat ad Patriam reditus, hoc est plena libertatis meae cessatio, coactus fui minus malum eligere, hoc est omnibus mediis attentare itineris mei prolongationem, quam quoque obtinui et plus salva libertate mea quam existimaram, ope cujusdam Baronis de Nimptsch ex Silesia, prout in literis ad Schüllerum datis notum feci. Sed cum audirem, Meis displicere quam maxime quod ad ipsos revertere tardarer, licet causae hujus ignari, difficultas supererat, ut hoc ab Ipsis via quam maxime moderata impetrarem, et post id quod recessum ex Patria ab Ipsis impetrarim, credo me secundum miraculum effecisse ut hoc alterum quoque mihi concesserint, et revera magna dexteritate ad hoc ac singulari artificio opus fuit. Sed quam maxime mihi inculcatum ne ipsum unquam desererem ac quo cum Patria certo repetenda, adeoque sic tempus ultra terminum quem mihi

praefixerant Mei, satis bene prolongaram, praesertim cum Dn. Baronis intentio erat, statim post paschale tempus proficiscendi Sienam, Florentiam, Livornum versus atque sic in Hispaniam, ex qua regredi in Italiam ac postquam reliqua loca vidisset in Galliam pergere animus erat, atque sic per Angliam et Hollandiam ad suos revertere. Verum Parentes huic jam non amplius subscribunt, utpote qui desiderant ut postquam reliqua loca Italiae transierit, Genevam versus pergat et dehinc ad aulam Imperatoris, quo clavem cameralem sibi acquirat, cujus rei spes aliqua facta et quod credunt Parente Ipsius vivente (et qui satis provectae aetatis) facile succedere posse, secus post obitum; quae unica causa mihi praesagire videtur, quod ultra sex aut septem menses in Patria non secus ac musca in melle haerebo; licet contrarium sibi persuadeat Dn. Baron qui adhuc responsorias circa hoc negotium desiderat; quicquid sit, hoc saltem scio, nullo in loco diu nos permoraturos atque adeo vix mihi in studiis multos progressus persuadeo. Ex quibus primo colliges, mihi plane impossibile esse ut ad Vos me conferam, quod in optima forma quaeso excuses eaque adjungendo quae Aulici mores desiderant quaeque Tibi, cum satis perspecta me longius in hisce non detinebo nec quoque in gratiis reddendis pro tanto favore quo tale quid mihi procurare conatus fuisti, idque multis rationibus exponendis persuadere, cum Tibi reciprocum meum affectum sufficere satis scio et de quo velim eoque intentissimo nunquam dubitas. Sed quaeso si unquam Te rogavi ne me ulli innotescere facias, hoc praecipue enixe rogo de Talibus, nisi haberes maxima indicia ea quae statim indicabo, Te posse ab his impetrare, et licet aliquando cogitationes habuerim d'estre aupres d'un jeune Prince cadet etc. prout scribis, hae plane jam immutatae sunt. Estque Meum propositum efficere ut mea natura a quam minimis externis dependeat atque sic fortuna potius a me quam ego ab ipsa, hoc est ut Libertatem Philosophicam ex integro quantam possibile obtineam, sine hac enim vix progressus mihi tales quales vellem in studiis meis persuadeo, verum est quod dicas: On vit icy dans une grande Liberté, sed ex iis quae ad id confirmandum subjungis, video hanc libertatem ab hac ipsa quam multa experientia didici opus esse ad philosophandum, prorsus differre, quod quidem quo minus hac vice probem prolixius, temporis brevitas me continet; ad priorem vero obtinendam tertio ac amico miraculo adhuc opus, quodque maxime posset facilitari, si saltem 3 aut 4tuor centum imperiales annatim obtinendi spes esset, prout quoque literis ad Te datis, ope Dn. Schulleri significarem. Ac praeterea si fictas literas acciperem domi constitutus aut prius quam dico, quasi a Principe quodam ad me directas quae mihi honorabile aliquod offi-

cium offerent, sic enim si a Meis saltem denuo recedendi libertas facta, possem me conferre ubi consultius judicarem ac praetendere ob Principis istius negotia quaedam peragenda me eo contulisse, ne haecce ficta aut saltem non tam cito animadverterent. Verum si non haec, quae quidem non libenter subirem, alia forte quae cogitavi succedent, imo fortunam omni tempore mihi adeo favorabilem expertus, ut nec in futurum desperem. Si secus accidat, consilium tuum quidem non contemnendum, sed Mei non concederent ut Aulam Catholici Principis peterem (quod tamen mitigari posset multis rationibus), nec multo minus si non ante abitum jam certior factus quo officio apud ipsum fungi deberem, licet haec saltem ficta essent, nec tandem ipse hoc facerem nisi scirem quod mihi deinde libertas daretur recedendi quo existimarem me in . . . . circa studia exsequi posse commodius; si possibile erit, veniam ante regressum in Patriam Hannoverae, quo de talibus liberius conferre liceat quid in posterum sequendum*).

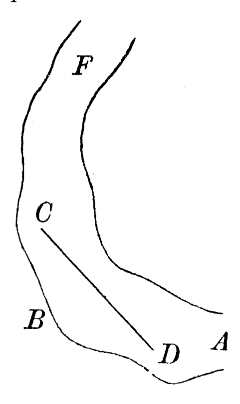
Colliges quoque quam impossibile mihi erit Tibi satisfacere circa libros quos desideras, sed circa haec ac alia quaecunque de me rogas, non credo Te meliori haec via posse impetrare quam ope Dn. Nanzarii. Dn. Riccio Te innotescere feci facta mentione quadraturae tuae circuli inventae, idque magis fiat transmisso aliquo exemplari ejusdem, impressione peracta. Dn. Steph. Gradium forte aditurus sum, si per negotia licebit, sed librorum ille censor, de quo loqueris, hic nullius est aestimationis, adeo ut multi mirentur ipsum ad hoc officium promotum. Florentiae aliisque locis in omnia curiosa inquirere intermittam; quoad vero machinamentum illud musicum, hic Romae descriptionem aliqualem

*) Um Tschirnhaus einen Beweis seiner hohen Achtung und Freundschaft zu geben und seinen Wünschen entgegenzukommen, beschloß Leibniz, um eine Stelle für ihn am Hofe des Herzogs von Hannover sich zu bemühen. Unter seinen Papieren ist folgendes unvollendete Schreiben vorhanden:

Monseigneur

Ayant appris dernierement qu'il y a encor à Rome un gentilhomme Allemand du pays de Lausniz ou Lusace, que j'ay connu à Paris, j'ay jugé à propos d'en entretenir V. A. S. par ce qu'il faut que j'avoue que je souhaiterais le voir à son service, à cause des belles qualités que j'ay remarquées en luy. Son nom est Tschirnhaus, et son pere qui est encor en vie a des terres proche de Gorlitz. Il entend les mathematiques à merveille, il a du genie pour les mecaniques, il a étudié à fonds des Cartes et les autres modernes, et il a connu fort particulierement feu M. Spinosa. Sans parler des autres études et exercices, dans lesquels il a fort bien reussi, je l'ay reconnu fort sage et fort modeste. Outre cela il est sans ambition, et ne pretend point d'avancement. Tout son dessein est de vivre en repos, et comme son pere l'a voulu retirer chez luy pour le marier, il a tousjours evité de retourner au logis, et c'est pour cette raison qu'il cherche service à fin d'avoir des moyens et des raisons pour s'en defendre. Je croy qu'un poste de gentilhomme de la cour de V. A. S. luy seroit tout à fait convenable, pourveu qu'il y ait place pour luy. Mais je n'ay eu garde d'avoir appris la volonté de V. A. S.

ejus Kircherus in sua Phonurgia exhibet. Dom Justelio autem, cum tales commoditates respiciat, non potero sane inservire, cum hactenus necessitas me non coegit, ut ad alia reflecterem quam quae admodum ordinaria aut quae ad minimum Ipsum non latere possint. Caeterum quae Marchio Palombara adinvenerit, nec adhuc mihi constat, ea autem quae hic circa similem materiam executa, cum ita desideras, sic expono:



Sit flumen Tiberis ADCF qui hic ante portam Populi tam flexuoso itinere incedens ac partes B Romam spectantes cursu suo rapido concutiens satis magnam minam fecit ac majorem in futurum minabatur adeoque Hollandus opere quodam DC ex variis palis ligneis confecto ei sic praevenire credidit, cum hac ratione maxima vis fluminis in loco DC frangeretur ac versus partes F inclinaretur, nullo interim aut parvo admodum impulsu versus B ruente, quodque satis bene successit; verum cum opus illud DC non tam bene ac alte, prout viderim similia in nostris regionibus, exstructum, vix hoc adeo diu duraturum sperem. Jam autem Tua venia ad Mathematica me converto; et primo quoad Methodum, qua usus fui ad quadraturas, quamque ultimis literis communicaram, responsio Tua efficit, ut sequentia adhuc annotare necesse habeam: Gregorius a S. Vincentio non solum tam universaliter, ut hoc explicas, sed neque tam generaliter, prout ego percipio, haec intellexit, uti statim dicam; porro nec aliquid essentiale meae Methodi habet, quod enim talia solida considerat, id quoque a Cavalerio factum et saltem accidentale hujus Methodi, ex quo patet, quod prorsus hancce Methodum non sciverit, ut clarius ex infra dicendis constabit, ac proinde ut non videam, quare ipsi hoc attribuendum; ac idem de Pascalio judico, cum revera si haec ipsi perspecta fuissent, non subticuisset, cum tanta facilitate res peragatur ac universalitate, quod utrumque de sua Methodo ostendere ipsius intentio erat. Fabri Synopsin Geometricam nunquam legeram, sed hujus rei admonitus ab Dn. Nanzario impetratam totam evolvi; fateor praeter alia multa satis bona, quod quoque aliquarum parabolarum dimensionem tradit (nam omnium sane mensuram non exhibet) quodque in quibusdam earum solidis iisdem mecum utatur, quodque haec solida in eadem elementa resolvat, ut ego; sed quod inde mecum concludit prorsus diversa ratione efficit, cum non elementa omnia ad invicem adaequet, ut ego, ac via prolixiori, cum alio diverso insuper ad hoc probandum Theoremate opus habeat, quod mihi nullatenus necessarium; praeterea semper quantitates in Heterogenea Elementa resolvit,

quod meae Methodi saltem particularis casus est, veluti statim dicam, licet credebam, me hoc sufficienter in literis meis indicasse. Quod autem praeterea addis, quod putes, Te dudum ea de re mecum locutum, utique nescio, ad quae referas; hoc certus sum, quod de illis omnibus, quae Tibi transmisi, hanc Methodum concernentia nunquam aliquid mihi indicaras, imo nec ipse eo tempore adhuc ad illa reflexeram et revera admodum contra mores meos esset tale quid committere, licet quoque variam tam ipse, quam ex aliis mihi compararim cognitionem circa quadraturas, attamen non mihi hac in re prorsus satisfeci. Fateor interim quod tres Methodos praecipue aestimo: prima est, qua vidi Dominum Heuratium uti ad curvarum in rectas transmutationem, quam sincere et universaliter explicat, ejusdem Methodi deinde Dn. Barrow varia exempla suppeditavit satis egregia; secunda Methodus est Tua, qua solo calculo soles unam figuram in aliam transmutare exprimendo calculo quantitatem rectanguli altitudinis indefinite parvae, efficiendoque hoc alteri aequale, quam ex Te addiscere licuit, prout in meis literis ingenue, prout mea est consuetudo, confessus et qua fateor me admodum delectatum fuisse, cum non solum hinc quadraturae, sed et Tangentes ac alia egregia deducantur; tertia est haec ipsa, quam Tibi transmiseram, qua cujuscunque quantitatis (adeoque vides, quod de solidis dixi, quoque saltem corollarium meae Methodi esse) elementa homogenea (Heterogenea etenim specialem saltem casum constituunt non secus ac Cavalerii Methodus harum trium Methodorum saltem corollarium existit) omnibus modis, quibus ut diversa considerari possunt, sibi ad invicem adaequantur atque sic ope aequationum quadraturas elicui; quae revera si Tibi nota fuerit, saltem non mihi unquam indicasti, uti probe scies, hanc autem satis clare me exemplis indicasse putem. Nec porro Parabolarum quadraturas saltem dedi, in solidis Heterogenea Elementa, hoc est omnes superficies horum ad invicem adaequando, sed et in ipsis superficiebus homogenea elementa, hoc est rectangula altitudinis indefinite parvae ad invicem comparando, quod a nullo addidici, et variis admodum modis hoc idem et alia similia hac methodo praestare possum. Ulterius si sit quantitas quaedam, primo quoque Elementa ejus varie ad invicem adaequando, hoc universali ratione efficio, sed diversa a Tua expressione, qua tres sectiones differentes solidorum a me consideratorum exhibes, meoque judicio magis intelligibili ac ordinaria, cum novitatem in definitionibus vocum quantum possum effugio, hoc enim nihil aliud est quam scientias difficiles reddere, nec deinde quoque opus habeo in similibus quantitatibus ad figuras earum reflectere, licet a principio ad tales aequationes efficiendas hoc apprime necessarium: sed hoc saltem compendium est Methodi, non ipsa Methodus, et quorum alia ad

huc et majoris momenti scio. Si autem jam memorata Methodo facilior ac universalior existit, qua uteris ope Logarithmorum quadraturas exhibendi, ejus communicationem apprime desiderarem, uti et omnia quae a Te proficiscuntur, nec non Methodum, qua infinitas series elicis ex infinitis aequationibus. Videbis mea recepta (quod non dubito, cum ne unica litera ad Schullerum data jam per quatuor annos perdita fuerit) in quantum consentiat cum Tua, estque illa corollarium illius Methodi, qua omnem possibilem rationem seu proportionem duarum quantitatum determino. Tales aequationes vero, in quibus incognita exponentem ingreditur, non opus habui adhuc resolvere; interim hoc jam video plures tales posse resolvi omnium aequationum radicibus universaliter determinatis; nunc omnes nondum examinavi. Tria alias existimavi mihi superanda difficilia admodum in Mathematicis, quibus intentis me aliorum omnium adhuc desideratorum participem fieri posse persuasi, aut quae cum horum respectu facilia, quoque iis superandis me non imparem futurum, primum est: Omnium quantitatum quadraturas una et generali Methodo determinare, in quo licet varia sciam, imo rem eo reduxerim, ut saltem triginta quantitatum quadraturis determinatis omnium exhibuerim, nihil tamen hactenus conceptibus meis correspondens. Sed reliqua duo penitus absolvi et ultimum juxta propria vota est; autem secundum, Omnium curvarum possibilium determinatio, quod credo Te jam percepisse ex literis, quarum tam saepe mentionem feci, et licet quaedam adhuc ad ea perficienda desiderari possint, haec jam omnia in mea potestate esse scio, modo occasio detur me hisce applicandi. Tertium est: Generalis Methodus omnium aequationum radices exhibendi et in iisdem literis tres methodos hoc ipsum exsequendi transmiseram; verum primam non amplius pro mea cognosco, cum meliorem scio, ut statim dicam, cujus illa saltem corollarium, praeterea prolixa admodum, cum calculus, quo aequationis quinti gradus radicem universalem cohibeo, et quem Parisiis Dn. de Graaff in Hollandiam perficiendum miseram, vix octiduo absolvi possit, cum jam horae spatio rem eandem peragere sciam, altera methodo adjutus. Dicam itaque me non ita pridem in talem Methodum incidisse, quae mihi omnimodo satisfecit, credo et Tibi; haec praeter magnam facilitatem in respectu priorum hoc etiam peculiare habet, quod omnis calculus, qui ad eam acquirendam adhibetur, non inutilis prorsus, uti in prioribus et quod praecipue rem taediosam efficit, sed totius Algebrae praecipua Elementa ac Compendia et primaria Theoremata exhibet ac primas ejusdem quaestiones compendiosa admodum reductione resolvit. Hanc hic sincere Tibi ac distincta quam fieri poterit (nullum laborem respiciens ac temporis jacturam, quo licet premar quasi) explicatione describere constitui, iisque compen-

diis (primariis tamen) quibus intra quatuordecim dies (imo intra admodum breve tempus, si saltem generales radicum expressiones desideremus) ipsam absolvi posse crediderim (hoc est, usque ad duodecimum gradum, hinc enim, credo, progressio patebit) quaeque talia sunt et tam necessaria, ut sine his ordinaria via procedendo non eo perduci posset, si decem homines seculum in eo calculando consumerent, imo nullatenus cum papyrus hujus terrae non sufficeret, ut facile ostendere possem, hanc autem rigidissimis tuis censuris subjicio.*)

Methodus Generalis omnium aequationum radices exhibendi.

1mo assumantur tales quantitates x ∞ a + b et y ∞ ab, tum x ∞ a + b + c et y ∞ ab + ac + bc et z ∞ abc, porro x ∞ a + b + c + d, y ∞ ab + ac + ad + bc + bd + cd, z ∞ abc + abd + acd + bcd, t ∞ abcd etc. atque sic porro ab hisce formentur omnes potestates, quod in 1ma et 2da Tabula**) incepi efficere, id quo facillime exsequatur notandum, 1. efficiendam primo esse Tabulam, in qua omnes variationes quantitatum a, b, c, d etc. id quod facillime perago duabus regulis, literis ex tempore statim sic assignando

			A	B	
a	aa	a^3	a^4	a^5	a^6 ***)
	2ab	3aab	$4a^3b$	$5a^4b$	$6a^5b$
		6abc	6aabb	$10a^3bb$	$15a^4bb$
			12aabc	$20a^3bc$	$30a^4bc$
			24abcd	30aabbc	$20a^3b^3$
				60aabcd	$60a^3bbc$
				120abcde	$120a^3bcd$
					90aabbcc
					180aabbcd
					360aabcde
					720abcdef

---

*) Leibniz hat bemerkt: Nihilominus erronea est. Res tota huc redit: Dantur v. g. aequationes tres: x^4 aequ. a xy aequ. b xyz aequ. c. Ex his tribus aequationibus tres
y^4 xz
z^4 yz
incognitae x, y, z quaeruntur. Et sane haberentur, si ex datis reperiri posset $x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4$ aequ. . . . . uti habetur $x^4 + y^4 + z^4$ aequ. a, et uti habetur $x^4y^4z^4$ aequ. c^4. Sed has tres simul ex his datis ita haberi impossibile est.

**) Die beiden Tafeln liegen bei. In der ersten sind $x = a + b$, $x = a + b + c$, $x = a + b + c + d$ bis zur 9ten Potenz erhoben, in der zweiten ist $y = ab + ac + bc$ ebenfalls bis zur 9ten Potenz erhoben.

***) Die Tafel ist bis zur 12ten Potenz fortgesetzt.

Regulam primam ad literas formandas sic exemplo declaro: sit data series A, ex hac seriem B sic formare licet, a^4 primae quantitati seriei A vel praeponi potest litera aequalis, vel inaequalis, et hinc a^5 et a^4b termini primi secundae seriei B; secundo a^3b apponi denuo potest vel litera diversa vel aequalis et hinc a^3bb et a^3bc; tertio aabb apponi rursus potest litera aequalis vel diversa eritque aab^3 vel aabbc (ubi nota, quod aab^3 non valet quid eandem variationem refert ac a^3bb, id quod an jam fuerit, ex eo cognoscitur quod si aequalis litera apponatur, potestas posterior major est priori, quod nunquam hic potest esse, nisi eosdem terminos velimus bis annotare, quod est contra propositum ut facile patet); quarto ex aabc et abcd ultimis duabus quantitatibus seriei A eadem ratione ut antea saltem formantur aabcd et abcde atque sic series B formatur ex data A. Eadem methodo semper subsequentes series ex proxime antecedentibus formantur et per consequens ex prima (ubi saltem quantitas a) hac ratione omnes. Quorum omnium ratio sola quoque multiplicationis natura perspecta patet, et eadem demonstratio hic posset adhiberi qua idem de numeris modo statim ostendere constitui.

Regulam secundam ad formandos numeros quoque declaro. Sint dati numeri quantitatibus in serie A praefigendis; assumatur jam in serie B quantitas aabbc; ut sciamus quis numerus huic quantitati praefigendus, auferamus primo a et remanet abbc, cui juxta seriem A (nam respondet huic quantitati aabc) praeponendus 12, qui numerus notandus; secundo auferatur b et remanet aabc, cui juxta seriem A itidem praefigitur 12, qui numerus denuo notetur; tertio auferatur quoque litera c et remanet aabb, cui in serie A praefigitur 6, qui denuo notetur; jam tres illi numeri 12, 12, 6 addantur et erit 30 numerus praefigendus quantitati aabbc, id quod facile demonstratur; quantitas enim aabbc formata fuit dum potestates ex continua multiplicatione (prout modo dixi nobis propositum est) conficiuntur adeoque per tres literas a, b, c multiplicata fuit, cum autem per a multiplicaretur, erat abbc cui praefixns erat numerus 12, cum per b multiplicaretur, erat aabc, cui itidem praefixus 12 et cum per c multiplicaretur, erat aabb, cui praefigebatur b, adeoque tandem ex horum conjunctione (quia sic multiplicatae eandem semper quantitatem aabbc producunt) debet exsurgere 30 aabbc.

2. Juxta hanc Tabulam formantur ex tempore potestates superiorum quantitatum, uti jam satis hisce de rebus in literis ad Dn. Schullerum datis ex occasione tuarum dixeram; formentur autem primo omnes potestates a quantitatibus $x \propto a + b$, $x \propto a + b + c$, $x \propto a + b + c + d$ (id quod in Tab. 1), hisce peractis formantur facile ope priorum potestatum quoque potestates a quantitatibus $y \propto ab + bc + ac$, $y \propto ab$

$+ ac + ad + bc + bd + cd$, item $z \infty abc + abd + acd + bcd$; ex. ad formandas omnes potestates a $z \infty abc + abd + acd + bcd$ pono $abc \infty a$, $abd \infty b$, $acd \infty c$, $bcd \infty d$ et respicio omnes potestates formatas a $x \infty a + b + c + d$, id quod in Tab. 2 incepi.

3. Quia omnes potestates a quantitate $x \infty a + b + c$ includunt omnes potestates a quantitate $x \infty a + b$ (atque generaliter omnes sequentes potestates omnium priorum quantitatum includunt semper potestates priores) quando accedimus ad formandas omnes potestates a $x \infty a + b + c$, poterunt primo statim scribi potestates omnes a $x \infty a + b$ jam formatae, atque sic porro quando formandae omnes potestates a $x \infty a + b + c + d$ poterunt primo statim annotari omnes jam formatae potestates a $x \infty a + b + c$, atque sic porro.

4. Si iidem numeri ac signa semper praefigendi, id saltem in principio fiat, prout in Tab. 1 et 2 vides, idem fiet si eaedem semper sint literae prout in Tab. 4 observatum.

5. Quoad omnes possibiles variationes ejusdem quantitatis inveniendum, id facile quoque et ex tempore fieri poterit; sit ex. a^4bbc, primo video hanc quantitatem ex tribus diversis constare, □to □tum nimirum, □to et Radice. Incipiendo itaque semper a dextra parte primo omnes variationes facio radicis, caeteris invariatis; supponamus itaque literas datas seu radices esse a, b, c, d, poterit fieri a^4bbc, a^4bcd, nec ulla alia; jam progredior ad □tum et aliud, assumo loco b eritque a^4cc atque tum caeteris invariatis denuo omnes variationes appono Radicum et obtineo a^4ccb, a^4ccd, jam cum nulla praeterea variatio detur, iterum muto □tum ut habeam a^4dd atque tum denuo omnes possibiles radices appono eritque a^4ddb, a^4ddc; jam deberem denuo mutare □tum, sed hoc non possibile, cum non plures literae extent (ex suppositione), progredior itaque ad □to □tum quod muto et eadem ratione ut antea posito invariato a^4 effeci a^4bbc, a^4bbd, a^4ccb, a^4ccd, a^4ddb, a^4ddc. Sic jam posito b^4 efficio b^4aac, b^4aad, b^4cca, b^4ccd, b^4dda, b^4ddc, et tunc assumendo c^4 efficio c^4aab, c^4aac, c^4bba, c^4bbd, c^4dda, c^4ddb, et tandem posito d^4 efficio quoque d^4aab, d^4aac, d^4bba, d^4bbc, d^4cca, d^4ccb, atque sic negotium hocce absolutum esset: quod si vero fuisset adhuc praeterea cubo □tum, adeoque ut habuissemus d^5a^4bbc, cum jam omnes variationes factae essent Radicis, □ti atque □to □ti invariato semper ejusdem literae □ti cubo nimirum d^5, jam mutandum hoc esset et assumendus esset □ti cubus alterius literae, atque sic porro idem processus continuandus quibuscunque quantitates constent potestatibus.

6. Potestates ex. a quantitate $x \infty a + b$ formandae usque ad duodecimam, prout egi, saltem ad nonam produxi, et hoc idem debet effici

in omnibus illis superioribus quantitatibus et continuari saltem usque ad aequationem $x \infty a + b + c + d + e + f$, tunc etenim certo progressio in toto hoc negotio constabit, ut ex infra dicendis plenius patefiet, quando in Tab. 4 nobis sermo erit de aequationibus ibi contentis A, B, C etc. quarum tunc progressio absque dubio re eo perducta manifestabitur. Atque hic non possum quin obiter adjiciam quod multi admodum falso credant artem combinatoriam esse separatam scientiam, ac ante Algebram ac alias scientias addiscendam, imo sunt qui credunt Artem combinatoriam plura in se continere quam Artem vulgo Algebram dictam, hoc est filiam plus scire quam matrem, nam revera si ex nulla alia re id vel ex sola potestatum compositione patet Artem combinatoriam ex ipsa Algebra addisci, cum revera sub hac ipsa multiplicatione omnis artis combinatoriae Thesaurus (ut solent loqui) latet et unica regula (hoc est quantitatum $a + b$, $a + b + c$, $a + b + c + d$ etc. et aliarum supra traditarum continua in se invicem multiplicatione) omnes regulae quae hactenus hac de re traditae continentur, imo facilius hinc possent earum praxes educi quam hactenus factum vidi et prout specimina supra exhibui. Sed ad sequentia majorisque momenti compendia progrediamur.

2[do]. Notandum quod omnes quantitates quae in Algebraicis occurrunt vel sint aequaliter compositae vel secus, et quoad aequaliter compositas, hae sunt vel primae, vel a primis derivatae (non secus ac in numeris), primae denuo sunt vel simplicissimae vel non adeoque simplicis compositionis. Primae sunt

$$
\begin{array}{c|cc|ccc|}
a & a+b & ab & a+b+c & ab+ac+bc & abc \\
 & aa+bb & & aa+bb+cc & aabb+aacc+bbcc & \\
 & a^3+b^3 & & a^3+b^3+c^3 & a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3 & \\
 & \text{etc.} & & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
a+b+c+d & ab+ac+ad+bc+bd+cd \\
aa+bb+cc+dd & aabb+aacc+aadd+bbcc+bbdd+ccdd \\
a^3+b^3+c^3+d^3 & a^3b^3+a^3c^3+a^3d^3+b^3c^3+b^3d^3+c^3d^3 \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
abc+abd+acd+bcd & abcd \\
aabbcc+aabbdd+aaccdd+bbccdd & \\
a^3b^3c^3+a^3b^3d^3+a^3c^3d^3+b^3c^3d^3 & \\
\text{etc.} &
\end{array}
$$

atque sic quousque necessarium. Cum itaque hactenus Theoremata multa obtinuimus expressa Tab. 1 et 2, Theoremata autem illa seu potestates constent quidem quantitatibus aequaliter compositis, sed non omnes primis, primo omnes quantitates derivatae ex hisce primis formandae et tum restituendae in prioribus potestatibus aut potius x, y, z

etc. quae hisce primis supra aequaliter positae, quo haec Theoremata simplicissime exprimamus, id quod ostensum Tab. 4, ubi notandum est ut hocce negotium quoque perquam facillime expediatur, primo non opus esse ad multiplicandum $a + b + c$ in $ab + ac + bc$ et similes quantitates primas in se, ut haec multiplicatio penitus absolvatur, sed saltem a multiplicandam esse in $ab + ac + bc$ atque tunc habetur $aab + aac + abc$, hinc regula pro producto erit $aab \cdot 3abc$, id quod significat productum constare ex omnibus possibilibus aab et abc ter, idem de caeteris notandum prout prolixe in Tab. 4 ostensum; secundo hisce omnibus possibilibus multiplicationibus peractis (quae tamen eousque in eodem genere quantitatis saltem continuandae usque dum progressio patet quod 4ta aut 5ta multiplicatione patet, prout quoque ex Tab. 4 clarum) videndnm ubi hac occurrunt in superioribus potestatibus et loco quantitatum quae aequaliter compositae et derivatae, substituendae hac primae quantitates ex quibus componuntnr aut potius quae ipsis aequales, quo universalius ..... haec et facilius succedat; sic potestas cubica $a\,x \infty a + b + c$ quantitates derivatas habet 3aab, 6abc, jam cum hac constent ex $ab + bc + ac \infty y$ in $a + b + c \infty x$, poterit loco earundem scribi 3xy; jam vero $3xy \infty$ omnibus possibilibus $3aab + 9abc$ adeoque $abc \infty z$ pluries adest quam debet, nimirum ter (erat enim in potestate 6abc) adeoque subtrahendum 3z, erunt itaque omnes possibiles $3aab + 6abc \infty 3xy - 3z$ adeoque cubus $a\,x \infty a + b + c$

erit $x^3 \infty \begin{matrix} a^3 \\ b^3 \\ c^3 \end{matrix} + 3xy - 3z$, hoc est aequatio ex meris primis quantitatibus

constans. Idem de caeteris judicandum, id quod in 4ta Tabula mnltis exemplis illustratum. Tandem haec continuanda usque dum progressio harum pateat, id quod credo clarum erit ad summum in 4ta aut 5ta operatione prout ego duas perfeci, cum literarum x, y, z, t etc. progressio statim patet, numerorum vero ex continua additione resultet, sic in Tab. 4 (vid. aequat. A) progressio numerorum 2, 5, 9, 14, 20 etc. fit ex continua additione numerorum 2, 3, 4, 5, 6 etc., progressio autem numerorum 2, 7, 16, 30 etc. fit ex additione numerorum 2, 5, 9, 14, 20, id est proxime antecedentium; eadem ratione progressio numerorum 2, 9 etc. fit ex addit. 2, 7, 16 etc. adeo ut quoad has aequationes A non ulterius continuare opns sit operam susceptam, quia jam earum progressio nota, quae extemporanea scriptione absolvitur; secundo ad aequationes B quod attinet primo series 1ma, 2da, 3, 4, 5 etc. eadem sunt quae priores in aequationibus A et hoc cum semper fieri debeat (posteriores enim aequationes semper includunt priores, posito enim in his aequationibus B z aequale o provenient priores A, quod

compendium magni momenti ab eo dependet, quod semper simplices quantitates a, b, c, d, e etc. per x designamus, omnia vero bina per y, omnia terna per z etc. quod in sequentibus semper observandum) efficit ut non facile erremus in calculo, eumque facilitat dum ad aequationes B accedendo jam statim aequationes A poterimus assignare, atque sic semper ad posteriores accedendo proxime antecedentes, quod equidem hac expressione Tab. 4ta non observavi (licet multum laboris potuissem praescindere) uti et alia quae modo scio, sed quam primum per tempus mihi licebit, totum hunc calculum ipse quam accurate potero absolvam. Secundo series numerorum 5, 12, 21, 32, item 7, 24, 54 atque sic in infinitum fiunt ex continuata additione duarum serierum 2dae et 7timae, item 3 et 8tavae atque sic porro, hoc est $2 + 3 \infty 5$, $2 + 3 + 3 + 4 \infty 12$, $2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 \infty 21$, item $2 + 5 \infty 7$, $2 + 5 + 12 + 5 \infty 24$, $2 + 5 + 12 + 5 + 9 + 21 \infty 54$ etc.; deinde omnes series quae incipiunt a $3z$, $3zz$, $3z^3$ etc. fiunt continua additione, sic a prima 3, 4, 5, 6, 7 continua additione fit secunda 3, 7, 12, 18, ab hujus continua additione 3, 10, 22, etc. atque sic porro. Sed bene esset has aequationes aliquantulum adhuc continuare usque ad duodecimam aequationem, quo magis securi essemus de progressionis continuatione. Aequationes C eosdem numeros praefixos habent quam aequationes B, atque sic porro progrediendum usque dum horum Theorematum progressio obvia. Quibus jam inventis aequationibus et quae ex simplicissimis primis quantitatibus constent, infinitae aliae inveniri possunt supponendo alias primas quantitates, sic exempli gr. supponendo $aa + bb \infty z$ et $x \infty a + b$, jam ut omnes aequationes A reducantur ad x et z, saltem inveniendum y ex dato x et z, quod sic fiet: $aa + bb \infty x^3 - 2y$, hoc est ex jam facta suppositione $z \infty x^3 - 2y$ adeoque $y \infty \frac{x^3 - z}{2}$, unde restituta hac quantitate $\frac{x^3 - z}{2}$ loco y in aequationibus A habebimus intentum et alia Theoremata; eadem ratione omnes binae primae quantitates possunt assumi hoc est $a + b$ et $a^3 + b^3$, $a + b$ et $a^4 + b^4$, item $aa + bb$ et $a^3 + b^3$ etc. omnes ternae, quaternae etc. atque hinc progredi ut ante, quod idem de aequationibus B, C, etc. notandum, et hinc varias ejusdem aequationis radicum expressiones obtinere licebit, ut intra ultimo loco dicemus. Atque in hisce mihi videntur consistere prima et praecipua totius Algebrae Elementa; horum autem usus permagnus non in tota hac arte, uti suo tempore ostendam, eaque hinc non concludam quae nescio num existimes fieri posse; desiderantur hic adhuc quae circa signorum variationes occurrunt, cum hic saltem respeximus ad quantitates aequaliter compositas per signa +; sed haec alio in loco exhibebo, ubi plura Elementa

concernentia erunt. Jam saltem ostendam, qua ratione ex hisce primis Theorematibus Algebrae magna facilitate difficile admodum problema de Radicum omnium aequationum universali expressione deducam, et quidem si ab ullo ante me haec Theoremata exhibita fuissent, magno labore potuissem supersedere, tunc etenim ad hoc ipsum problema solvendum sequentia saltem annotassem.

3. Hisce aequationibus A, B, C etc. aut Theorematibus inventis restituendae quantitates y, z, t etc. id quod variis modis fieri potest adeoque varias obtinebimus aequationes, cum quibus comparatio instituenda cum quadam generali et ejusdem gradus aequatione (quae quoque a priori possem deducere, sed tempus non permittit ut omnia hic accurate tractem) id quod unico exemplo declaro. In aequationibus A $y \infty ab$ hoc restitutum exhibet

$$\begin{array}{l} xx - 2ab - aa \\ \qquad\qquad\;\; - bb \\ x^3 - 3abx - a^3 \\ \qquad\qquad\;\; - b^3 \qquad\qquad F \\ x^4 - 4abxx + 2aabb \\ \qquad\qquad\;\; - a^4 \\ \qquad\qquad\;\; - b^4 \\ x^5 + 5abx^3 + 5aabbx - a^5 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;\; - b^5 \end{array}$$

aequationes F quae comparatae cum aequationibus
$xx - p \infty o$, $x^3 - px + q \infty o$, $x^4 - pxx + q \infty o$, $x^5 - px^3 + qx - r \infty o$ etc. exhibent Radices harum aequationum in infinitum, quae ad instar Cardanicarum in cubicis sunt compositae. Cum vero x sit $\infty a + b$ et $a \infty x - b$, hoc restitutum in quantitate $y \infty ab$ exhibet y quoque aequale $bx - bb$, quae quantitas restituta in iisdem aequationibus A exhibet alias aequationes quam erant F, quae comparatae cum generalibus prout modo indicatum exhibent harum omnium aequationum radices et quae ad instar □ticae sunt compositae, et notandum quod itaque jam generales tam pro □tica quam cubica aequatione radicum expressiones obtinuimus, quod ad Demonstrationem infra intelligendam necesse erit. Porro compendium magni momenti hic observandum circa comparationem et consistit in eo quod aequationes quae per comparationem habentur, semper ad aequationes possint reduci, ubi incognitae aequaliter compositae et simplicissimae ex aequaliter compositis, quod reflectendo ad aequat. A, B, C etc. Tab. 4tae unico intuitu patet, idque exemplo declarabo. Sit $x^4 - 4yxx + 4zx + 2yy - a^4 - b^4 - c^4 \infty o$, jam $y \infty ab + bc + ac$ et $z \infty abc$ adeoque

$$\begin{array}{l} x^4 - 4abxx + 4abcx + \text{bis } \square \text{to á } ab + bc + ac - a^4 - b^4 - c^4 \infty\, o \\ \quad - 4acxx \\ \quad - 4bcxx \end{array}$$

Fiat jam comparatio (prout ex Des Cartes Geom. satis notum) cum generali $x^4 - pxx + qx - r \infty\, o$ et obtinebimus sequentes 3 aequationes

$$\begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4ab + 4ac + 4bc \infty\, p & 4abc \infty\, q \end{array}$$

$$\text{redigantur ad } ab + ac + bc \infty \frac{p}{4} \qquad abc \infty \frac{q}{4}$$

$$3$$

$$2\, \square \text{tum a } ab + ac + bc - a^4 - b^4 - c^4 \infty - r$$

$$a^4 + b^4 + c^4 \infty \frac{pp}{8} + r$$

Juxta priora jam ponatur brevitatis causa $\frac{p}{4} \infty\, d$, $\frac{q}{4} \infty\, c$ et $\frac{pp}{8} + r \infty\, f$ et habebimus $ab + ac + bc \infty\, d$, $abc \infty\, e$ et $a^4 + b^4 + c^4 \infty\, f$ atque sic aequationes superiores 1, 2, 3 erunt ad tales reductae, ubi incognitae a, b, c aequaliter compositae et quae quantitates constituunt $ab + ac + bc$, abc, $a^4 + b^4 + c^4$ simplicissimus ex aequaliter compositis. Atque sic totum negotium ad infinitas quaestiones seu Problemata aequaliter composita reduximus. Superest ut addam 1. hinc patere, quae quaestiones primae existunt in Algebra resolvendae, et videbis aliquando qua ratione ego has dispositas proponam quod apud alios instar chaos cujusdam confusi existit. 2do ostendam qua ratione hae quaestiones magna facilitate possint solvi, et quod alias Methodos sequendo non in anno, hic duabus horis posse fieri (quod facile credes si haec digneris aliquantulum introspicere) 3. Ne quis existimet se operam quam hic ostendo impendendam frustra impendere, demonstrabo hac via certo omnium aequationum radices obtineri. Quae omnia unica et eadem opera ut ostendam et absolvam, sic progredior. Sit

$$1$$

$$x + y \infty\, a \text{ et } xy \infty\, b$$

$$\text{erit } x \infty\, a - y \text{ et } ay - yy \infty\, b \text{ ac } yy - ay - b^{*)} \infty\, o$$

$$2^{do}$$

$$\text{sit } xx + yy \infty\, a \text{ et } xy \infty\, b, \text{ fiat primo } xxyy \infty\, bb$$

$$\text{jam } xx \infty\, a - yy \text{ et } ayy - y^4 \infty\, bb \text{ ac } y^4 - ayy - bb \infty\, o$$

$$3^{tio}$$

$$\text{sit } x^3 + y^3 \infty\, a \text{ et } xy \infty\, b, \text{ fiat } x^3y^3 \infty\, b^3$$

$$\text{jam } x^3 \infty\, a - y^3 \text{ et } ay^3 - y^6 \infty\, b^3 \text{ ac } y^6 - ay^3 - b^3 \infty\, o$$

Atque sic in infinitum.

---

*) Muß offenbar $+b$ heißen. Ebenso in den folgenden Gleichungen.

Hinc patet primo omnes has aequationes*) reduci ad

$$yy - ay - b \infty o, \quad y^4 - ayy - bb \infty o, \quad y^6 - ay^3 - b^3 \infty o \text{ etc.}$$

harum autem radices habentur, si quadraticae seu prima $yy - ay - b \infty o$ radices notae; hae autem nobis dantur per superiora ut monui adeoque harum omnium radices inventae et per consequens (cum per aequationes A effecimus ut ad radices cubicas designandas sit opus saltem hasce aequationes resolvere $x^3 + y^3 \infty a$ et $xy \infty b$; hasce autem reducuntur ad hanc $y^6 - ay^3 - b^3 \infty o$ cujus radices dantur per modo indigitata) quoque radices cubicae aequationes. Jam progrediamur et sint $x + y + z \infty a$, $xy + xz + yz \infty b$, $xyz \infty c$, hac resolutae reducuntur ad aequationem

$$y^3 - ayy + by - c \infty o$$

2do sint $xx + yy + zz \infty a$, $xy + xz + yz \infty b$ et $xyz \infty c$ priusquam jam ad reductionem progrediamur, primo ope superiorum Theorematum seu aequationum C (quod semper notandum et in eo solo consistit compendiosa reductio de qua supra locutus, quam unico exemplo declarasse sufficiat) redigantur ad hasce $xx + yy + zz \infty a$, $xxyy + xxzz + yyzz \infty b - 2ac \infty f$ et $xxyyzz \infty c$, quae reductae exhibebunt $y^6 - ay^4 + fyy - c^2 \infty o$, sic adhibito hoc compendio $x^3 + y^3 + z^3 \infty a$, $xy + xz + yz \infty b$, $xyz \infty c$ resolutae reducuntur ad hanc $y^8 - ay^6 + by^3 - c^3 \infty o$. Atque sic porro; ad quarum ultimarum radicum exhibitionem, cubicarum radix necessaria quae ex proxime ostensis data adeoque et horum omnium radices determinatae. Sed cum per aequationes B ut aequationis $\square$to-$\square$ticae Radices obtineantur, id reducatur ad solutionem hujus quaestionis $x^4 + y^4 + z^4 \infty a$, $xy + xz + yz \infty b$, $xyz \infty c$, haec autem reducatur per ultima ostensa ad aequationem cubicam cujus radices datae, quoque $\square$to $\square$ticae aequationis radices determinatae. Sic jam progredi liceret ostendendo quod ad quaestiones sequentes resolvendas

$x + y + z + t \infty a$, $xy + xz + xt + yz + yt + zt \infty b$, $xyz + xyt + xzt + yzt \infty c$, $xyzt \infty d$

$xx + yy + zz + tt \infty a$, $xy + xz + xt + yz + yt + zt \infty b$, $xyz + xyt + xzt + yzt \infty c$, $xyzt \infty d$

$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 \infty a$, $xy + xz + xt + yz + yt + zt \infty b$, $xyz + xyt + xzt + yzt \infty c$, $xyzt \infty d$

$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 \infty a$, $xy + xz + xt + yz + yt + zt \infty b$, $xyz + xyt + xzt + yzt \infty c$, $xyzt \infty d$

hae reducantur ad aequationes $\square$to-$\square$ticae eadem ratione procedendo ut supra, quarum itaque radices per modo dicta habentur, et quod

---

**) Darüber geschrieben quaestiones.

denuo Radices 5ti gradus hac ratione determinentur. Atque sic haec porro sese ita in infinitum habere; sed prolixioribus non opus, cum operanti juxta ea quae diximus haec sese statim manifestabunt. Attamen ut omni ex parte satisfaciam, Demonstratio possibilitatis poterat universalius et facilius sic absolvi: aequationes seu quaestiones ex aequaliter compositis primis et simplicissmis quantitatibus $x + y \infty a$ et $xy \infty b$ reducuntur ad $\square$ticam $yy - ay + b \infty 0$; $x + y + z \infty a$, $xy + xz + yz \infty b$, xyz ad cubicam $y^3 - ayy + by - c \infty 0$; $x + y + z + t \infty a$, $xy + xz + xt + yz + yt + zt \infty b$, $xyz + xyt + xzt + yzt \infty c$, $xyzt \infty d$ ad $\square$to $\square$ticam $y^4 - ay^3 + byy + cy - d \infty 0$ atque sic porro ubi jam notum et facillime demonstratur.

Jam vero 2do aequationes

$xx + yy \infty a$, $xy \infty b$ possunt reduci ad $xx + yy \infty a$ et $xxyy \infty bb$ etc.

$x^3 + y^3 \infty a$, $xy \infty b$ $\qquad$ $x^3 + y^3 \infty a$ $\quad$ $x^3y^3 \infty b^3$

$x^4 + y^4 \infty a$, $xy \infty b$ $\qquad$ $x^4 + y^4 \infty a$ $\quad$ $x^4y^4 \infty b^4$

Item per superiora Theoremata aequationes

$$xx + yy + zz \infty a,\ xy + xz + yz \infty b,\ xyz \infty c$$
$$x^3 + y^3 + z^3 \infty a,\ xy + xz + yz \infty b,\ xyz \infty c$$
$$x^4 + y^4 + z^4 \infty a,\ xy + xz + yz \infty b,\ xyz \infty c$$

reducuntur ad aequationes

$$xx + yy + zz \infty a,\ xxyy + yyzz + xxzz \infty \text{cognitae}\quad xxyyzz \infty cc$$
$$x^3 + y^3 + z^3 \infty a\quad x^3y^3 + y^3z^3 + x^3z^3 \infty \text{quantitati}\quad x^3y^3z^3 \infty c^3$$
$$x^4 + y^4 + z^4 \infty a\quad x^4y^4 + y^4z^4 + x^4z^4 \infty \qquad x^4y^4z^4 \infty c^4$$

Atque sic quousque placet; hae ultimae vero aequationes reducuntur ad aequationes primae hujus demonstrationis partis supponendo saltem

xx, x^3, x^4 etc. ∞x adeoque et hae

yy, y^3, y^4 etc. ∞y

zz, z^3, z^4 etc. ∞z

reductae ad $\square$ticam, cubicam, $\square$to $\square$ticam reducuntur. 3tio ostensum satis ex superioribus quod antequam ad cujuscunque gradus aequationes solvendas accedamus, semper prius hac ratione obtineamus Methodum extrahendi radices earum aequationum, ad quas reducuntur. Adeoque hac Methodo omnium Aequationum radices haberi. Q. E. D. Nec mihi possibile prolixioribus haec ostendere hac vice, quanquam satis prolixus fuerim. Haec autem via, si bene a Te fuerit penetrata, non forte poenitebit laboris suscepti, ac tunc credo Tibi persuades mecum viam hanc perquam naturalem esse, praesertim si aliquando videbis expressam prout in conceptu meo habeo. Sed hoc plus otii requirit, praesertim cum Publicae luci destinabo; proposui enim mihi tam accurate in omnibus procedere ut certus sim, aliquid a me publicatum decennium post non posse displicere, cujus

norma aliquo modo mihi perspecta. Hoc unicum adjungam, quod ejusdem aequationis varias radicum expressiones hac methodo impetrare licet assumendo alias ac alias primas quantitates et formando hinc alia ac alia Theoremata, prout sub finem secundae partis monui; comparando denique has cum generalibus ac ejusdem generis aequationibus.

Tandem ut ad ea revertar quae loqueris de lingua Philosophica ac aliis similibus, non utique haec percipio, nec quoque quod dicis de lingua quadam Geometrica, qua Dom. Desargues subtilissimas ratiocinationes instituit sine figuris et calculo, nunquam sane haec vidi nisi quae de Sectionibus habet Conicis perpulchra, sed quae aliquo modo imaginationem fatigant. Hoc quidem mihi persuasi et certus sum, nos posse in rebus philosophicis ad veritates incognitas indagandas eadem ratione calculo uti simili Algebraico, sed hic primo definitiones rerum tradendae, quae satis perspicax ingenium desiderant, nec ad eas formandas praestantiora praecepta unquam vidi, quam quae habet Dn. Spinoza de Emendatione intellectus, quod manuscriptum a Dn. Schullero mihi transmissum penes me habeo; utinam omnia reliqua ejus opera! Et in eo totus ero, postquam mihi in Mathematicis satisfecerim, si quidem fata concedant. Sed quod non adeo facile sit, definitiones rerum tradere accuratas, id vel ex hoc solo constat, quod et in Mathematicis non semper tales traditae; sic ne unicum vidi qui veram definitionem tradiderit proportionis, imo quod magis mirandum rei simplicissimae, hoc est lineae rectae nullam accuratam definitionem, nisi per solas proprietates, quod nimirum sit brevissima eosdem terminos habentium, quod extrema obumbrent omnia media . . . .*)

Relegendo supra conscripta de . . . aequationum, vidi me omnium maximum compendium omisisse, tradidi enim hac methodo non solum omnium Radicum generalium expressionem, sed et earum qui (quae?) in quocunque gradu eandem compositionem ut illi (illae) obtinent, quod magni usus est in Algebraicis aliquando ostendam et quod constructiones multarum celebrium quaestionum facilitat. Attamen si saltem prius desideramus hoc multo breviori temporis spatio assequi poterimus, imo tam brevi, ut nesciam num ulla alia Methodo tanta facilitate haec impetrari liceat. Tandem quaeso ne ad haec rescribas, quia intra quatuordecim dies hinc discessurus incertus adhuc, num in Hispaniam aut quae alia loca petam, nec vellem ut in aliorum manus venirent tuae responsoriae; quam primum autem ullo in loco fixus haerebo aut si occasionem videbo, me Tuas certo posse recipere, statim hoc per literas

---

*) Das Folgende ist dadurch, daß ein Stück Papier im Manuscript abgerissen ist, zu verstümmelt, als daß es hier wieder gegeben werden könnte.

indicabo, atque tunc magna aviditate Tuas expectabo, et commercium nostrum restabilitum esse gaudebo. Nec aliquid intermittam, ex quo non semper amicitiae verae evidentia signa colliges, atque quod sim indissolubili affectu ad quaecunque servitia amica Tui gratia subeunda etc.

VII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Rom d. 30. Aprilis Anno 1678.

Zweifele nicht unlängst abgegebenes vor 14 tagen, worin die Methodus radices exprimendi, werden Sie in gutter gesundheit erhalten haben; weilen den darin wieder meinen willen gedencken müßen, daß Sie mir zu antworten etwas inzuhalten beliebten, auß dahmahlen erwähnten ursachen, solche aber geändert, als daß mir nicht gerne auß händen gehen laße die so hohe ergötzung welche mir allezeit Dero brieffe verursachen, so gedenke daß morgen von hier nacher Sicilien, umb Palermo, Messina, den berg Aetna als andere curiositäten zu sehen gehen werde, und den so ferner gar bieß nach Malta; weilen den wohl bey 2 monathen und drüber zubringen möchte bies wieder allhier zurück nach Rom gelangte, so ersuche höchlich die angefangene correspondenz zu continuiren und mir die satisfaction zu geben, das auff vorige brieffe hier in meiner zurückkunfft eintzige antwort finden köndte. Viele negotia die mich drücken, lassen mir nicht zu meiner Schuldigkeit beßer vorietzo nachzukommen; doch wiel als obiter andienen, wie daß fast einen Universalem Methodum gefunden, oder rechter zu sagen bey anderer Methodo dießes hierbey gethan, daß fast allen derselbigen figuren so man hactenus nicht quadriren können, ihre quadraturas determiniren kan, oder wo nicht, die impossibilität solcher gar leicht demonstriren, und ereignet sich in circulo was sonderbahres, worvon ins künfftige; vorietzo vermelde in höchster eyl, da mir fast papier, feder und tinte ermangelt, nichts mehr, als das versichere nächst bester Empfehlung iederzeit zu sein etc.

VIII.

Leibniz an Tschirnhaus.*)

Ex quo Tibi scripsi, binas a Te accepi, priorem prolixam, (qua Methodum inveniendi aequationum radices describis, alteram brevem, qua iter tuum significas; respondissem priori statim, nisi vetuisses ob iter instans tuum. Nunc respondeo, quia ita posterioribus jussisti. Spero Te ex Siculo itinere salvum reversum aut mox reversurum. Quanquam autem sciam Te satis in itineribus circumspectum esse, quia tamen multis casibus expositi sunt peregrinantes, non desinam de Te esse solicitus, donec Te reversum intellexero. Schillerus noster jam sex et ultra mensibus nihil a Te accepisse scribit, quare vereor, ne literae Tuae ad me, quas Schillerianis inclusisse scribis, cum illis perierint. Certe eas, quibus exposuisse scribis methodum exprimendi quamvis rationem vel proportionem per seriem infinitam, non accepi; quare nec illud vidi, quod illic ais a Te descriptum modum investigandi numerum omnium curvarum. Quod Methodum tuam aequationum Radices inveniendi tam ample et distincte non sine labore mihi describere voluisti, multum me Tibi debere profiteor. Legi diligenter et ni fallor intellexi et deprehendi tandem, nondum omnino rem absolutam esse, imo si quid judico hac quidem via ne absolvi quidem posse. Nimirum tota res huc redit: Sit aequatio $x^4 + yx^2 + rx + s$ aequ. 0. Ponitur x aequa. $a + b + c$, unde aequationem aliam excitas, quam priori comparando facis: $ab + ac + bc$ aequ. m, abc aequ. n, $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l. Hinc derivare vis sequentes aequationes:
$a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l, $a^4b^4 + a^4c^4 + b^4c^4$ aequ. e, $a^4b^4c^4$ aequ. n^4. His tribus novissimis obtentis fateor haberi quaesitas a, b, c adeoque et x. Verum ajo ipsas et nominatim aequationem penultimam sive quantitatem desideratam e, valorem scilicet cognitum ipsius $a^4b^4 + b^4c^4 + b\,c^4$, ex prioribus assumtis deducere impossibile esse, nisi forte per aequationem aeque difficilem ac est resolvenda. Cujus sententiae meae demonstrationem in adjecta Charta explicui, addidique qua ratione mihi ad aequationum radices perveniri posse videatur, ubi et demonstrationem futuri successus adjeci. De quo sententiam tuam expecto. Certe haec sola est via mihi nota, qua secum fert successus demonstrationem.

---

*) Leibniz hat bemerkt: Romam ad Dn. Tschirnhusium fine Maji 1678. — Tschirnhausius accepit Epistolam, nam respondit et in responsione verba mea allegat.

In hac Epistola explicui jam Tschirnhusio generalem meam methodum investigandi quadraturas: item notam definitionis realis, qua est possibilitas. Ipse post utrumque sibi ascripsit.

Intelligis etiam inde non pauca eorum, quae in literis tuis exposuisti et mihi jam olim fuisse explorata sive tentata et inprimis illam methodum tuam ex aequationibus $ab + ac + bc$ aequ. m, abc aequ. n, $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. l inveniendi e et per consequens x, olim mihi quoque mirifice blanditam, sed postea irritam deprehensam. Pulchra habes theoremata circa formas ex literis similiter se habentibus ortas, in quo genere et ego multum laboravi, de quo et prioribus literis Tibi scribere memini. Ex. gr. tabulam habeo, per quam statim apparet, quot cujuscunque formae sint exempla in dato literarum numero, v. g. formae ab, datis tribus literis, exempla sunt 3 ab, ac, bc. Haec tabula secundum quandam regulam facilem conditur, quam tamen et Tibi satis animadversam ex literis tuis apparet, ni fallor. Aliam habeo majoris momenti circa multiplicationem formae in formam v. g. a^2b in ab, positis literis 4, a, b, c, d:

	ab	ac	ad	bc	bd	cd
$a^2b)$	a^3b^2	a^3bc	a^3bd	a^2b^2c	a^2b^2d	a^2bcd
	$\frac{12}{12} = 1$	$\frac{12}{12} = 1$	$\frac{12}{12} = 1$	$\frac{12}{12} = 1$	$\frac{12}{12} = 1$	$\frac{12}{4} = 3$
		2 (ac, ad)		2 (bc, bd)		

seu a^2b in ab dat

$$a^3b^2 + 2a^3bc + 2a^2b^2c + 3a^2bcd$$

Nimirum non tantum omnia exempla unius formae in unum exemplum alterius duco (quemadmodum et Tu notasti) ad formas provenientes inveniendas, sed et ad numeros formis provenientibus praefigendos cuilibet formae provenienti subscribo quotientem ex divisione numeri exemplorum formae multiplicantis, hoc loco a^2b (qui numerus est hic 12) per numerum exemplorum cujusque formae provenientis, ut a^2bcd in literis 4 exempla sunt 4, et 12 per 4 dat 3. Si forma saepius proveniat, multiplicandus quotiens per numerum repetitionum. Notabile est, in quibusdam casibus quotientem esse fractionem, sed eam postea semper multiplicatione per numerum repetitionum tolli. Hujus autem regulae ope Tabulam condere coepi, cujus ope primo aspectu statim formae in formam ductus sciri possit, et vero pulchras illa habet progressiones, quarum magnam partem jam video. Porro in Algebra quoque pulcherrimos ea Tabula usus habebit, non tantum in problematibus illis, ubi literae incognitae se eodem habent modo, sed et in aliis omnibus, quia problemata omnia tandem reduci possent ad problemata incognitarum se similiter habentium: quod est utilissimum, quia tunc plerumque pulchra compendia se proferunt et (quod sane magni momenti est) una aequatio omnibus illis incognitis simul inveniendis servit, et

diversae illae incognitae sunt aequationis ultimo inventae radices: unde semper summae earum et summae rectangulorum ex ipsis et parallelepipedorum seu rectangulorum solidorum summa etc. inveniri potest. Ex ipsa nimirum aequatione ultimata, nam in ea secundus terminus aequatur summae radicum, tertius summae rectangulorum etc., cumque radices aequationis ultimatae sint eaedem cum indeterminatis seu incognitis pluribus in problemate resolvendo adhibitis patet, de illis hoc verum esse, quod earum summa et summa rectangulorum etc. habeatur. Ex. g. si $x + y$ aequ. a et xy aequ. b^2, fit aequatio $y^2 - ay + b^2$ aequ. 0, cujus aequationis una radix erit y, altera x. Hinc etiam patet, cum omnia problemata possint reduci (vel calculo vel linearum ductu) ad incognitas similiter se habentes, et in problematis similiter se habentibus ad ultimatam aequationem reductis habeatur omnium incognitarum summa et summa rectangulorum etc., hinc utique omnia problemata tandem his tantum adhibitis resolventur seu ut tuis literis utar, positis incognitis problematis a, b, c, d, e inveniendis, invenientur ope ipsarum x, y, z etc. posito x aequ. $a + b + c +$ etc., y aequ. $ab + ac +$ etc., z aequ. $abc +$ etc. [Sed tunc non vicissim a, b, c servire debent ad inveniendam x, quod in aequationum radicibus investigandis fit, adeoque tunc non ipsarum y, z etc. valores primum quaerendi, sed ipsarum a, b, c etc. per $a^4 + b^4 + c^4$ aequ. . . . . ., $a^4b^4c^4$ aequ. . . . .]. Et hoc mihi inter maxima totius Algebrae arcana habendum videtur, cum illius ope omnia problemata reducantur ad pauca, et tabulae condi possint, per quas cuncta sine calculo inveniantur. Haec etiam vera videtur esse via inveniendi constructiones Geometricas elegantes. Haec Tibi candide perscribere volui, quia et haec et multa alia a Te potissimum perfici posse spero. Analytici nostri (si Vietam excipias) parum de constructionibus elegantibus solliciti sunt, calculum exhibere contenti; cum tamen problemata ista pleraque ingenii potius quam praxeos causa quaerantur, hinc mihi videtur semper elegans quoque constructio esse quoad licet quaerenda. Hugenius mihi dixit, se aliquid meditatum circa demonstrationes ex calculo concinnandas elegantes more Veterum, longe diversum a Schoteniano: ego circa artem inveniendi constructiones elegantes multa habeo notata, sed tamen nondum perfecta; potissimum autem arcanum consistit, ut dixi, in eo ut quaerantur incognitae plures se similiter habentes, item pauciorum radicum. Saepe enim ratio, cur problemata justo altius ascendunt, oritur non tam ex ipsorum natura, quam ex natura incognitae assumtae, quae plures habet radices, cum tamen problema resolvi possit per aliam incognitam habentem pauciores. Ex. g. si pro incognita sumas distantiam puncti quaesiti a centro sectionis Conicae, pauciores orientur radices, quam si sumas di-

stantiam a foco, quia duo sunt foci, adeoque et duae distantiae satisfacientes, loco unius. Sed haec obiter. Ad reliqua literarum tuarum capita venio. Methodi qua circa quadraturas uteris, scripseram vestigia quaedam in Fabrio et Pascalio extare, sed et me tale quiddam subinde tentasse. Hoc Tu ita interpretari videris ac si suspicarer Te aliunde hausisse, quod mihi nec per somnium in mentem venit. Scio enim eam Tibi ingenii vim esse, ut etiam praestantiora excogitare possis. Tota res huc redit, ni fallor, quemadmodum in figura plana quadraturam dare possim, vel quaerendo summam omnium y vel quaerendo summam omnium x, ita in solido, ubi tres sunt indeterminatae x, y, z, etiam tribus modis in plana resolvi solidum potest, unde comparando inter se valores totius contenti semper ejusdem aequationes tetragonisticae oriuntur. Ex his autem aequationibus tetragonisticis variae oriuntur quadraturae, ut explicuisti. Ego non hunc tantum, sed et infinitos alios modos habeo obtinendi aequationes tetragonisticas per calculum, cujus istae a Te propositae sunt casus tantum. Calculum autem hunc exequor per nova quaedam signa mirae commoditatis, de quibus cum nuper scripsissem respondes, tuum exprimendi modum magis ordinarium ac intelligibilem esse, et Te novitatem in definitionibus rerum quam maxime effugere; hoc enim nihil aliud esse quam scientias difficiles reddere. Sed idem olim opponere potuissent veteres Arithmetici, cum alii recentiores loco characterum Romanorum Arabicos introducerent, aut veteres Algebraici, cum Vieta pro numeris literas afferret. In signis spectanda est commoditas ad inveniendum, quae maxima est, quoties rei naturam intimam paucis exprimunt et velut pingunt, ita enim mirifice imminuitur cogitandi labor. Talia vero sunt signa a me in calculo aequationum tetragonisticarum adhibita, quibus problemata saepe difficillima paucis lineis solvo. Ex. g. problema illud, quod Cartesius in Epistolis frustra aggressus est: invenire curvam talem ut intervallum AT inter tangentem CT et ordinatam EA in axe sumtam sit recta constans, meis characteribus adhibitis tribus quatuorve lineolis solvo. Est enim mihi pro methodo tangentium inversa et methodo tetragonistica calculus idem, eadem signa. De his omnibus me jam olim Tibi loqui memini, sed parum attendenti; itaque tantum abest, ut Te tuam istam methodum quadrandi a me hausisse putem, ut contra potius animadverterim Te ad multa a me proposita non satis attendisse, quoniam nescio qua praeventione semper suspicabaris, meas methodos esse tantum particulares et parum naturales; illis itaque neglectis Tu tua sponte quaerebas eadem, et cum denique non raro ad illa ipsa per Te venisses, quibus ego usus fueram, tunc Tibi universalia admodum ac naturalia videbantur et diversa plane a meis prius propositis appare-

bant, tum quod ea aliter exprimeres quam ego, tum quod Tibi viae ac processus, quo ad ea perveneras, conscio magis blandirentur, quam cum a me proponebantur, quia Tibi quippe minus attendenti processum meum et inveniendi modum non exposueram. Fateor hoc Te commodi inde reportasse, tum quod ista hoc modo tua fierent, tum quod ita in inveniendo Te exerceres; verum potuisses labori et tempori parcere et inveniendi artem in aliis adhuc intactis exercere. Nam ut in genere dicam, quod sentio, si me jam olim audivisses, tempus quod quadraturis et aequationum radicibus hactenus impendisti, magnam partem aliis impendisses, quia ultra ea, quae ex Parisiensibus nostris collationibus sumi poterant nondum profecisti. Nam et ego jam Parisiis omnem comparationem referebam ad rectangula ab, abc etc. inveniendarum radicum causa: et quod quadraturas attinet, Methodum per differentias quam jam olim Tibi proposui, omnibus aliis praefero. Omnis enim figura differentialis est quadrabilis, et contra omnis figura quadrabilis est differentialis. Differentialem voco, cujus ordinatarum series coincidit seriei differentiarum ab alia serie: quaerendum est ergo tantum, an data figura sit differentialis: id vero invenitur comparando aequationem figurae datae cum aequatione generali figurae differentialis, ope enim hujus aequationis differentialis generalis possunt enumerari omnes aequationes speciales, quae sunt ad figuras quadrabiles, et ita facile condi posset tabula omnium figurarum quadrabilium. Duo tamen adhuc desidero in hac methodo, primum quod tantum exhibet figuras illas, quarum quadratrices sunt analyticae [quadratrix figura est, cujus figura differentialis est figura data, seu quae ita se habet ad datam, ut series aliqua ad suas differentias], non vero eas quadratrices, quae sunt transcendentes. Ex. g. non ostendisset, quod quadratrix Hyperbolae sit logarithmica. Hac utique methodo area figurae propositae non potest inveniri, quando nec per aequationem exprimi potest, per aequationem, inquam, communem, alioqui enim etiam quantitates transcendentes seu (si ita apellare libet) non-analyticae per aequationes, sed transcendentes (in quibus incognita exponentem ingreditur) exprimi possent. Haec itaque methodus, etsi ostendat Circulum et Hyperbolam non habere quadratricem analyticam, non tamen ostendit, qualem habeant quadratricem; et non potest ostendere haec methodus, utrum forte figura aliqua proposita si non absolute, saltem ex supposita alterius v. g. Circuli aut Hyperboles quadratura possit inveniri, ex. g. utrum curva Ellipseos inveniri possit supposita Circuli vel Hyperbolae vel utriusque quadratura, quemadmodum ego inveni curvam Hyperbolae aequilaterae ex supposita Hyperbolae quadratura. Habeo etiam varias artes, quibus huic defectui mederi licet. Alter hujus methodi defectus est, quod et-

si ostendat figuram aliquam non esse quadrabilem analytice quadratura universali omnibus portionibus communi, seu non habere quadratricem analyticam, non tamen ostendit, utrum non specialis aliqua portio speciali ratione quadrari possit. Atque ita hodieque ignoramus, utrum possibile sit, inveniri quadraturam specialem certi alicujus sectoris vel segmenti circularis vel etiam integri circuli. Habeo quidem varias vias, quibus speciales hujusmodi quadraturas invenio, sed nullam habeo ita comparatam ut ejus ope determinare possim, an quadratura aliqua specialis proposita, v. g. integri circuli sit possibilis (per quantitatem analyticam ordinariam seu non-transcendentem), an vero impossibilis. Hujusmodi itaque difficultates a Te quaeri optarem, quas scilicet nos nondum in potestate habemus. Ego nullam hactenus aliam viam demonstrandi tales impossibilitates specialium portionum quadraturas inveniendi agnosco, quam per resolutiones aequationum transcendentium, seu ubi incognita exponentem ingreditur. Nam qui ejusmodi aequationem $x^y + \overline{ya}^x +$ etc. aequ. 0 solvere seu in aliam ordinariam mutare, seu impossibilitatem in ordinariam mutandi ostendere potest, is etiam perfecte omnes quadraturas invenire potest, aut demonstrare impossibilitatem, quia omnes quadraturae per hujusmodi aequationes transcendentes exprimi possunt Itaque restat perficienda analytica ista transcendens, qua absoluta omnia habebimus, quae nunc quaerimus in hoc genere. Quae ideo annotare volui, quoniam scribis, nondum Te opus habuisse his aequationibus: quod non miror, quoniam nec alius quisquam earum usum perspexit, aut analyticam satis generaliter tractavit. Methodus mea resolvendi quadraturas per logarithmos coincidit cum methodo ista reducendi eas ad aequationes transcendentes. Est autem utique generalissima, quia omnibus curvis analyticis pariter ac transcendentibus communis est. Eam quia breviter satis describere non possum, et alioqui haec epistola prolixissima est, alteri tempori servo. Tres ais methodos quadraturarum a Te aestimari, unam qua Heuratius, Barrovius, aliique passim utuntur ope tangentium, alteram meam transmutandi figuram unam in aliam ope calculi, tertiam tuam per diversas ejusdem solidi sectiones. Ego vero omnes istas tres methodos pro partibus habeo generalis Calculi mei Tetragonistici, cujus exemplum tantum erat methodus illa transmutatoria, quam Tibi communicavi. Nam et caetera omnia per calculum certum et constantem efficio, unde plurima theoremata methodique a Gregorio aliisque data mihi non habentur tanti: nam inter mea tantum rudimenta fuere; postea vero ista omnia calculo consequi didici, et eadem opera nactus sum multo majora. Itaque non sine causa optavi, ut in alia potius inquireres momenti majoris, et quae nondum sunt in potestate, veluti (1) demonstrationem

impossibilitatis quadraturae portionis alicujus specialis, ex. g. Circuli integri; (2) Methodum tangentium inversam, quando scilicet curva quaesita est transcendens, nam quando est analytica, tunc etiam methodum tangentium inversam universaliter in potestate habeo; in transcendentibus autem calculus quidem meus tetragonisticus saepissime satisfacit, sed supersunt tamen aliqua, quae nondum satis excussi, adeoque nondum possum pronuntiare, me ea habere in potestate; (3) Resolutionem aequationum, in quibus incognita in exponentem ingreditur ac proinde inventionem radicis sive per valorem transcendentem (literas vel numeros irrationales in exponente exhibentem) sive per valorem communem (cum non nisi numeri rationales exponentem ingrediuntur) quando id fieri potest. Hoc autem tertio capite effecto, duo priora, quadratura scilicet et methodus tangentium inversa, statim absoluta erunt. (4) Resolutionem problematum Geometriae communis (quae scilicet ad aequationes ordinarias revocantur) per calculos brevissimos et constructiones elegantissimas lineares: huc pertinet ars contrahendi calculum ab initio, ut postea non sit opus depressione; ars ex calculo concinnandi elegantes constructiones lineares, imo ars perveniendi ad constructiones sine calculo per analysin seu non tam magnitudinis (quae ad calculum pertinet) quam situs, in quo mihi videntur aliquid habuisse Veteres, quod obliteratum hodie restitui, ac forte longius produci posset. Haec tractatio, etsi minus sit grandisona quam priores, est tamen magis captui communi accommodata, nec minus ingenii desiderat quam ulla aliarum; caeterum jam supra aliquid ex ea attigi. (5) Resolutionem problematum Numericorum Diophanteorum, sed in eo sum, ut hunc articulum expungam. Nam aliquot ab hinc septimanes viam et facillimam et generalissimam reperisse videor, omnia haec problemata resolvendi, et quando id in numeris rationalibus fieri non potest, demonstrandi impossibilitatem. Caeterum haec quatuor aut quinque desiderata a Te examinari optarem. Haud dubie enim multa in illis magni momenti detegeres; in aliis vero quae jam in potestate nostra sunt, Te parciorem esse suaderem, nisi ubi forte elegantes progressiones et pulchra theoremata reperies. Nam etiam quando aliquid in potestate habemus, non ideo tamen pulchra theoremata in eo latentia eruimus atque animadvertimus. Itaque tametsi utique manifeste habeamus in potestate enumerationem omnium curvarum analyticarum communem, quoniam tamen calculus ad eam rem necessarius, nisi arte tractetur, satis prolixus est, ideo pulchrum aliquid et difficile praestabis, si veram curvarum hujusmodi progressionem in infinitum progredientem nobis deteges. Saepe enim fit, ut diversae inter se aequationes, tamen ejusdem generis sint, ex g. xy aequ. a^2 et x^2y^2 aequ. b^2, utraque aequatio est ad

Hyperbolam; hoc autem in altioribus constanti ac facili ratione detegere posse magni momenti foret. Illud etiam nosse vellem, quomodo ut ais, triginta tantum quadraturis determinatis, alias omnes exhibere confidas. Caeterum dum reliqua tuarum literarum percurro, obiter animadverto Te scribere: „multi admodum falso credunt Artem Combinatoriam esse separatim scientiam et ante Algebram ac alias scientias addiscendam, imo sunt qui credunt Artem Combinatoriam plura in se continere quam artem vulgo Algebram dictam, hoc est filiam plus scire quam matrem, nam revera si nulla alia re id vel ex sola potestatum compositione patet, Artem Combinatoriam ex Algebra addisci". Hactenus verba tua, quae haud dubie in me diriguntur. Illi enim multi, qui ita, ut Tu ais, putant, praeter me opinor pauci sunt; puto autem Te recte sentire, quia me non videris percepisse. Nam si combinatoriam habes pro Scientia inveniendi numeros variationum, fatebor Tibi lubens eam scientiae Numerorum esse subordinatam et per consequens Algebrae, quia et scientia Numerorum Algebrae subordinata est, utique enim non invenies numeros illos nisi addendo, multiplicando etc., Multiplicandi autem ars ex scientia generali de quantitate, quam nonnulli Algebram vocant, descendit. Verum mihi aliud longe est Ars Combinatoria, scilicet scientia de formis seu de simili et dissimili, quemadmodum Algebra est scientia de magnitudine seu de aequali et inaequali; imo Combinatoria parum differre videtur a Scientia Characteristica generali, cujus ope characteres apti ad Algebram, ad Musicam, imo et ad Logicam excogitati sunt aut excogitari possunt. Hujus scientiae etiam portio est Cryptographia, quamquam in ea non tam componere quam resolvere composita et ut ita dicam radices investigare difficile sit. Nam quod radix in Algebra, id clavis in Cryptographia Divinatoria. Algebra a se ipsa tantum habet regulas aequalitatum et proportionum, sed quando problemata difficiliora sunt et aequationum radices valde involutae, cogitur mutuo sumere aliqua a scientia superiore de simili et dissimili seu a Combinatoria. Nam artificium comparandi aequationes similes seu ejusdem formae jam Cardano aliisque fuit notum et a Vieta distinctissime descriptum, proprie ex Arte Combinatoria petitum est, nec tantum cum de formulis magnitudinem exprimentibus atque aequationibus resolvendis agitur, sed etiam aliarum formularum nihil cum magnitudine commune habentium clavis involuta evolvenda est, adhiberi potest ac debet. Ars etiam quaerendi progressiones et condendi tabulas formularum est pure Combinatoria, neque enim tantum in formulis magnitudines exprimentibus, sed et aliis omnibus locum habent. Possunt enim etiam formulae exceptari exprimentes situm atque ductum linearum et angulorum, magnitudinibus licet non consideratis, cujus ope facilius

utique elegantiores constructiones reperientur, quam per calculum magnitudinum. Quod Triangulorum eosdem angulos habentium latera sint proportionalia, hoc demonstrari potest ope theorematum Combinatoriorum (seu de simili et dissimili) longe naturalius, quam fecit Euclides. Fateor interim nusquam pulchriora, quam in Algebra Artis Combinatoriae sive Characteristicae generalis specimina edita esse, ac proinde qui Algebram teneat, facilius Combinatoriam generalem constituturum, quia semper ad scientias generales facilius a posteriori ex specialibus exemplis, quam a priori pervenitur. Ipsam autem Combinatoriam seu Characteristicam generalem longe majora continere, quam Algebra dedit, dubitari non debet; ejus enim ope omnes cogitationes nostrae velut pingi et figi et contrahi atque ordinari possunt: pingi aliis ut doceantur; figi nobis ne obliviscamur; contrahi ut paucis; ordinari ut omnia in conspectu meditantibus habeantur. Quamquam autem sciam Te nescio qua de causa praeoccupatum ab his meditationibus meis fuisse alieniorem, credo tamen, ubi serio rem examinaveris, mecum sensurum, generalem hanc Characteristicam incredibilis usus fore, cum et lingua sive scriptura ejus ope excogitari possit, quae paucis diebus disci possit et omnibus exprimendis, quae in usu communi occurunt, sit suffectura et ad judicandum atque inveniendum mire valitura, exemplo characterum numeralium; utique enim facilius multo arithmeticis characteribus calculamus, quam Romanis idque vel calamo vel mente: haud dubie quia characteres Arabici commodiores sunt, id est genesin numerorum melius exprimentes. Nemo autem vereri debet, ne characterum contemplatio nos a rebus abducat, imo contra ad intima rerum ducet. Nam hodie ob characteres male ordinatos confusas saepe notitias habemus, tunc autem ope characterum habebimus facile distinctissimas; erit enim in promptu velut Mechanicum meditandi filum, cujus ope idea quaelibet in alias, ex quibus componitur, facillime resolvi possit, imo charactere alicujus conceptus attente considerato, statim conceptus simpliciores, in quos resolvitur, menti occurrent: unde quoniam resolutio conceptus resolutione characteris ad amussim respondet, characteres tantum aspecti nobis adaequatas notitias sponte et sine labore ingerent in mentem, quo nullum ad perfectionem mentis majus auxilium sperari potest. Haec ad Te paulo fusius perscribere volui, mi Amice, ut experirer plusne apud Te rationes quam praejudicatae opiniones valerent; si dices, rem esse praeclaram sed difficilem, satis a Te obtinui. Nam difficultas me non terret, cum satis videam certas et ni fallor commodissimas superandi eam rationes. Spinosae opera posthuma prodiisse non ignorabis. Extat et in illis fragmentum de Emendatione intellectus, sed ubi ego maxime aliquid expectabam, ibi desinit In Ethica non ubique satis sententias

suas exponit, quod sic satis animadverto. Nonnunquam paralogizat, quod inde factum, quia a rigore demonstrandi abscessit; ego certe puto, utile esse in Geometricis discedere a rigore, quoniam in illis facile caventur errores, at in Metaphysicis et Ethicis summum demonstrandi rigorem sequendum puto, quia in illis facilis lapsus; si tamen Characteristicen constitutam haberemus, aeque tuto in Metaphysicis ac in Mathematicis ratiocinaremur. Ais definitiones rerum esse traditu difficiles: intelligis fortasse conceptus quam maxime simplices et ut ita dicam originarios, quos tradere fateor difficile esse. Verum sciendum est ejusdem rei plures esse definitiones, id est proprietates reciprocas rem ab aliis omnibus distinguentes, et ex una quaque nos omnes ducere posse alias rei proprietates, quod etiam non ignoras, sed ex his definitionibus aliae aliis perfectiones sive primis atque adaequatis notionibus propriores sunt. Et quidem certam habeo notam definitionis perfectae atque adaequatae, quando *scilicet percepta semel definitione dubitari amplius non potest, utrum res, ea definitione comprehensa, sit possibilis vel non.* Caeterum qui Characteristicam seu Analyticam universalem constituere velit, initio quibuscunque uti potest definitionibus, quia omnes continuata resolutione tandem in idem desinunt. Quod ais in rebus valde compositis opus esse calculo, in eo plane mecum sentis: idem autem est ac si dixisses opus esse characteribus, nihil aliud enim est *Calculus* quam operatio per characteres, quae non solum in quantitatibus, sed et in omni alia ratiocinatione locum habet; interea quando id fieri potest, magni aestimo, ea quae sine calculo prolixo, id est sine charta et calamo, sola vi mentis peragi possunt, quia quam minimum pendent ab externis, et in Captivi quoque, cui negatur calamus aut cui ligatae sunt manus, potestate sunt. Itaque exercere nos debemus tum in calculando, tum in meditando, et debemus conari ea quae calculo sumus nacti, etiam sine calculo postea sola meditatione demonstrare, quod saepe succedere expertus sum. Sed non dubito, quin de multis idem sentiamus, et si differamus sequendi ratione, quam nolim dissensus inter nos causam esse, quemadmodum nec dissensus amicitiam minuet. Quare spero sinceritatem meam Tibi non ingratam fore, qua sententiam de tua radicum ex aequationibus extractione exposui; quoniam enim a scopo abludere putavi, volui id Tibi significare, ut labori parceres. Vicissim de mea exspecto judicium tuum, cui sane multum tribuo, nec dubito profiteri et plurima me didicisse a Te et etiamnum discere posse, Teque egregiarum inventionum esse capacem, et quae ab aliis atque etiam me jam exhibita sunt, etiam per Te praestare posse, si animum attendas. Malim tamen publici boni causa Te animum potius applicare

ad intacta, et quae nondum in potestate habemus; spero etiam praejudicia nonnulla, quae contra meas opiniones quasdam habere videris, magis magisque deletum iri. Quod superest, vale faveque ac sanitatis pariter tuae statum ac studiorum egregiorum progressum significa etc.

IX.

Tschirnhaus an Leibniz.

Cum*) jam dum, postquam ex Siculo itinere reversus essem, Romae ultra mensem ob excessivum calorem detinerer, mirabar me nihil responsionis a Te accipere, quapropter cum instabat abitus, praecipua quae se mihi obtulerant curiosa in peracto itinere Tibi literis significabam, quas Te recepisse autumo; rogabam in iis si placeret responsorias ad hasce dare, ut mitteres Genevam (vulgo Genf) quia ibi quibusdam commiseram, ut literas ad me directas interim reciperent. Sed cum eo pervenissem, nihil a Te vidi; quapropter judicare poteris, quo gaudio affectus fuerim, cum literas tuas Romae adhuc eo ipso die quo secessi, recepi. Ad illas autem respondere hactenus non licuit, cum nullam occasionem habuerim, ut certus essem Te hasce recepturum, jam vero cum Parisiis sim, id nullatenus negligere volui; quae autem in itinere quod ultra aliquot menses duravit, se mihi obtulere, quidque novi hic audiverim, literis ad Dn. Schuller eodem tempore significo, quem rogavi, ut Te eorum participem facere velit, ne eadem bis repetere mihi opus foret. Quapropter me accingo, ut literis Tuis respondeam, et primo quoad Methodum meam radices exhibendi non miror, quod talia profers, hanc enim plane non percepisti, quod quidem ex Tuis literis mihi clarissimum, ut postmodum ostendam. Duo autem video in causa fuisse: primum quod non sufficienter satis demonstrationem illius explicarim, hoc est nimis breviter, licet revera contineat omnia, quae ad eam necessaria sunt, et revera haec praevidebam, adeoque eandem bis repetii, quamque in superioribus exemplo, sed unico saltem declararam; verum cum admodum prolixus fuerim in antecedentibus, vix me tum longius extendere poteram; secunda fuit, quod quia absque dubio principium attentius quam reliqua respexisti, hoc est primam partem (in tres etenim partes divido, quae Tibi circa haec communicavi) hicque quaedam occurrebant, quae videbantur cum tuis cogitatis consentire,

*) Ohne Ort und Datum.

omnia sequentia illis applicasti, hoc est rebus quae ab iis diversissimae, adeoque non miror Te ea non assecutum, omnia enim illa quae in prima parte explico, saltem accidentalia sunt hujus Methodi, sed ipsa essentialia parte secunda continentur, et revera melius fecissem, si secundam partem primo collocassem, quod certe si denuo eam in ordinem redigere tempus erit, non omittam, ne aliis quoque id impedimento sit, quominus eandem facile percipiant, quod fusius jam et clarissime ostendam. Dicis itaque primo, posito ab etc. $= y$, abc etc. $= z$, a^4 etc. $= h$, a^4b^4 etc. $= e$, $a^4b^4c^4 = z^4$, invenire ipsam e ex datis y, z, h aeque difficile esse quam invenire aequationis propositae radicem etc. quae omnia si Tibi concedam, nihil hoc ad me, nam quae hic habes et quae in sequentibus porro deducis, me nullatenus tangunt; tali enim ratione ego prorsus nego me procedere. Et haec, me hercle, clarissime ostendunt Te Reductionem meam quoque non percepisse adeoque nec demonstrationem hujus Methodi quae ea nititur. Adeoque vides Te hisce meam Methodum non destruere (siquidem verum est quod jam suppono; statim autem exemplo aliquo demonstrabo, me talem viam radices determinandi non inire) is enim qui hoc ostendere vult, debet meam demonstrationem aggredi quam bis repetii in fine tertiae partis, ubi ostendi quod hac Methodo infallibiter radices habeamus; hanc autem ostendere falsam, judico impossibile, nam profecto licet authoritas mea hic non valeat, possum tamen dicere, quod licet attente respexerim ad rem, quae revera facilis, attamen nihil potuerim invenire quod non solide concludat; sed non tam facilis apparebit, nisi illis qui attente artificium considerabant, quod tradidi, quo reductio aequationum (quae post comparationem restat peragenda) facile peragitur. Illi enim qui easdem aequationes reducere conabuntur, via ordinaria ac experto labore respicient mea et mecum calculabuntur, absque dubio percipient reductionis meae facilitatae formam ac qua ratione in eam inciderim ex notatis parte secunda, atque si tum dignabuntur respicere ad demonstrationem meam, absque dubio hanc optime percipient, confidoque hanc firmissimam eos esse experturos. Verum propius ad ipsam rem accedo et pergo ostendere, quae effecere, quominus eandem perceperis. Dicis itaque: *facile errorem deprehendi, quia plane olim similia cogitabam, a quibus postea tempus et progressus meditandi me liberarunt*, et paulo post: *Res eo tota redire videtur, ut potestates exprimamus per rectangula ab, abc, abcd etc., haec ergo ratio mire mihi blandiebatur, quemadmodum et Tibi arrisisse video, sed tandem irritam deprehendi.* Hucusque tua verba; ad quae respondeo, me absolute negare, quod in eo consistat mea Methodus, quodque e contra ex ea pateat, qui tale quid aggrediuntur, scopum

nullatenus posse attingere (et revera candide fateor, me nec de illis quidem quantum scio cogitasse) quod non melius ostendere potero, quam si breviter declarem, in qua consistit mea Methodus, illudque omne uno exemplo illustrem, quo nulla obscuritas remaneat. Sit itaque linea recta quam vocemus x, haec concipiatur divisa esse in duas partes, in tres, in quatuor etc. atque sic in infinitum, quas vocemus a, b, c, d etc.; erit itaque $x = a + b$, $x = a + b + c$, $x = a + b + c + d$ etc. Jam fiant a qualibet tali aequatione omnes potestates x (hic forte statim credes, hoc cum tuis cogitationibus alias habitis, ut certo loco tuarum literarum innuis, consentire, sed quaeso ne properes, mox diversissima sentias, et qui hucusque saltem pervenit, quidem in via recta est, prout credo multos ad haec reflexisse, sed ad progrediendum infinitae viae se offerunt quibus in avia deducimur et fateor me in vera obtinenda diu hic laborasse et observasse, sed tandem in eam incidi quae talis) sit ex. $x^4 = a^4 + 4a^3b + 6aabb + 12aabc$. Considerando hasce quantitates

b^4	b^3a	etc.	etc.
c^4	a^3c		
etc.	etc.		

observavi 1. eas omnes aequaliter compositas esse; 2. hasce quantitates aequaliter compositas duorum generum esse, quaedam enim sunt primitivae quae non dividuntur nisi per se ac unitatem, aliae quae ab his derivatae ac divisionem patiuntur, prioris generis sunt $a^4 + b^4 + c^4 + \ldots aabb + acc + bbcc$, posterioris $a^3b + b^3a$ etc. item aabc etc. 3. Inter quantitates primitivas denuo esse hanc differentiam, quod vel omnes termini, ex quibus constant, sint quantitates simplices ex. $a + b$, $a + b + c$, item $ab + ac + bc$ etc. $abc + abd + bcd + acd$ etc. et has primitivas simplicissimas voco, vel quod omnes termini, ex quibus constant, sint potestates $a^3 + b^3 + c^3$, $a^4 + b^4 + c^4$ etc. item $aabb + aacc + bbcc$, item $aabbcc + aabbdd$ etc. 4. Hinc jam mea intentio in ejusmodi potestatibus omnia reducere ad primitivas quantitates, adeo ut nullae adessent quae non sint primitivae, uti fit supra, ubi adest a^3b etc. aabc etc. quae non sunt primitivae quantitates. Et in eo consistit essentiale meae Methodi, de quo tamen ne quidem mentionem facis in responsione tua, quasi ne quidem hac de re locutus fuissem in principio partis secundae, et ac si absque eo Methodus illa consistere queat. Jam quae sequuntur accidentalia sunt et possunt variis modis fieri, sed simplicissimam credo qua usus, et quae directe ex prioribus sequitur. 5. Ut itaque id quod non est primitivum in ejusmodi potestatibus ad tales reducerem, id conatus fui efficere ope quantitatum primitivarum simplicissimarum, de quo supra annotot. 3. adeoque supposui praeter $x = a + b$, $x = a + b + c$, $x = a + b + c + d$ etc. etiam $y = ab + bc + ac$, $z = abc$ etc. quae omnes

talis sunt conditionis, et qua ratione porro ex iis intentum meum obtinuerim, parte prima prolixe ostendi. Sed notandum, ut ibi etiam notavi, non necessarium esse licet optimum ad tale quid efficiendum, ut utamur quantitatibus primitivis simplicissimis, quibuscunque enim aliis suppositionibus, modo quantitates sint primitivae, poterimus efficere ut potestates superiores ex puris quantitatibus primitivis constent (quod etiam non attendis, cum loqueris quod sola rectangula adhibeam, cum tamen aliquot exempla in communicatis ostenderim); num vero semper potestates sic reductae ad primitivas quantitates adhibeant medium ad radices determinandas, eo demonstrationem tunc non extendi, quia nondum tempus habui haec ad finem optatum deducere, et quia ea ipsa quae tunc inveneram ad id sufficiebant determinandum. Ex quibus patet haec nihil aliud esse quam perfectionem Elementorum lib. 2. Euclidis; qui si bene processisset nobis talia Theoremata debebat exhibere, ille saltem unicum communicat prout ego desidero ex. $xx = aa + 2ab$, ubi
bb
utique tota potestas ex puris primitivis. Ac tandem hinc parte tertia ostendo ope talium Theorematum quae tunc inveni, hoc est potestatum quae fiunt a linea recta secta in quotcunque partes et quae ex puris primitivis quantitatibus constant. non solum omnium aequationum radices universales deter, minari, sed et particulares quae eandem cum prioribus compositionem obtinent, quam demonstrationem si destruere valeas magnum quid mihi praestabis. Ex quibus percipies quantum haec differant a tuis cogitatis, primo enim potestates illas non refero ad rectangula, sed ad primitivas quantitates; quae quidem multum differunt, qui enim prius praetendit, aliquid suscipit quod impossibile est, ut facile ostendere possem, sed hoc labore me sublevas, dum hoc concedis; sed qui posterius, rem omnino possibilem, ut in iis quae Tibi transmisi potuisti videre et quae variis modis fieri potest; sic ex. prior potestas redacta ad puras primitivas est talis $a^4 - 4abxx + 4abcx$
etc.
$+$ dupl. □ $ab + ac + bc$, item $x^4 - 2aaxx - 8abcx - 2aabb + a^4$. 2. qui
$- a^4 - b^4 - c^4$ etc. etc. etc.
meam Methodum scit, per eam dirigitur, quas formulas eligere debeat ac qua ratione his uti, nimirum ut potestates illas ad primitivas quantitates redigat; verum qui a formulis incipit, sane infinitas vias prae se habet, quibus non nisi tentando progreditur nec certo scit quam eligere debeat, quae unica causa est quare ad haecce quae mihi de hisce Parisiis dixisti nunquam attendi nec revera aestimavi, quia talia mentem non perficiunt. Sed ego iisdem aliquid constans tunc quaesivi et utique

obtinui, viam aliquam, sed quae laborios a admodum et specialissimus prioris Methodi casus, ex illa omnia quae tunc a Te hausi et quae proprio labore tunc assequutus fui, si illis inhaesissem diutius, revera effecissent, ut nihil praestans unquam assecutus fuissem, cum mihi non poterant dare cognitionem quam supra explicavi. 3. hinc quoque quod supra promisi facile ostendam, nimirum sit

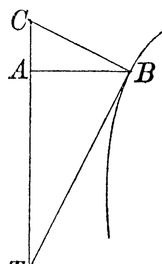
$$x^4 \begin{matrix} -4abxx \\ -4ac \\ -4bc \end{matrix} + 4abcx + \text{dupl.}\ \square\ \begin{matrix} ab + ac + bc \\ -a^4 - b^4 - c^4 \end{matrix}$$

ponatur $x^4 - pxx + qx - r = o$, atque hinc comparatione instituta habebimus tres aequationes pro tribus literis a, b, c inveniendis, atque invenies aequationibus hisce reductis ad cubicam perveniri aequationem, atque sic x quod = supponitur $a + b + c$, habebitur, hoc est radix $\square$ to = $\square$ to aequationis ope cubicae, quae revera diversa sunt ab iis quae percenses et vides quidem rem mihi optime succedere ad meum finem obtinendum, quare tua utique quae adfers me nullatenus tangunt, ut dixi. Verum quia reductio ordinaria via procedendo laboriosa, ego ostendi exemplo, qua ratione haec eo reducere valeamus, ut nihil aliud opus erit quam hanc quaestionem solvere $ab + ac + bc = p$, $abc = q$, $a^4 + b^4 + c^4 = r$, quod facillimum, et eo exemplo universalem viam, qua ratione semper res ad tales quaestiones resolvendas, ubi rectangula et potestates occurrunt, reducere possimus, quod fateor non facile intelligetur nisi quis mecum calculetur, tunc etenim videbit causam hujus reductionis ab hac aequatione pendere $x^4 - 4yxx + 4zx + 2yy - a^4 - b^4 - c^4$; sit jam $x^4 - pxx + qx - r$, nam hinc statim patet comparatione facta esse $4y = p$, adeoque $y = \frac{p}{4}$, $4z = q$ adeoque $z = \frac{q}{4}$, jam $2yy - a^4 - b^4 - c^4 = -r$, in hac aequatione y potest restitui et habebitur $a^4 + b^4 + c^4 = r + \frac{pp}{8}$ adeoque reduximus rem eo, ut sola rectangula y, z adsint et potestates aequales cognitis quantitatibus, et hinc si velis respicere ad Theoremata A et B, observabis hoc necessario semper fieri posse, cum enim Theoremata illa aequalem dimensionem in omnibus suis terminis obtinent, sitque x, xx, x^3, x^4 etc., necessario aliqui termini esse debent ut solae quantitates y, z, t etc. adjungantur x, xx, x^3 etc. adeoque comparatione facta hae quantitates y, z, t aequales erunt cognitis p, q, r etc., sique jam ubicunque occurrunt potestates y, z, t, etc. restituantur cognitae p, q, r etc. quae ipsis aequales, res eo reducta erit, ut nihil supersit quam quaestionem solvere ubi rectangula et potestates dantur aequales cognitis, quod ultra modum aestimandum est. Qui haec percipiet, videbit me laboriosissimam rem ad maximam facilitatem reduxisse et hinc absque dubio meam demonstrationem facile intelliget, hoc ipso enim nititur. Quae quantum in me est, hic volui

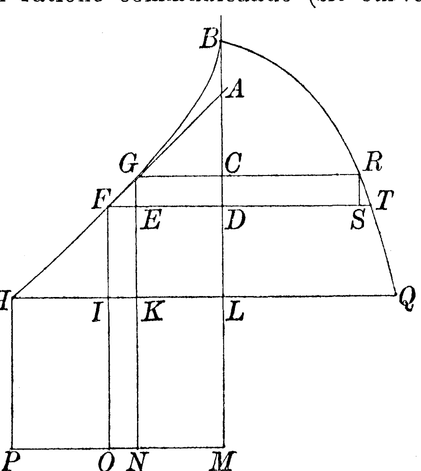
clarum reddere, ut a Te plane percipiatur et tunc tuum judicium non reformido, scio enim Te candidi esse ingenii et inventi nunc praestantiam nosse aestimare. Hinc jam porro non difficulter respondere possum ad omnia reliqua quae habes; dicis Te vero tunc memini non rectangulis solis, sed aliquando et potestatibus uti solitum, sed nunc vero se rectangula etiam Tibi approbavere, quibus credo satis percipio, quid velis, uti et quando putes primam meam inquisitionem circa talia fuisse irrationalium ope (non vidisti quae multo antea circa regulam Hudenii qui quoque ponit $x = a + b$ laboraverim et quae adhuc reservo) et multa alia talia quae refers. Attamen de talibus disputare non mea . . . consuetudo nec quoque credam circa ea me ulli unquam injustitiam fecisse, quapropter haecce relinquens sic respondeo. Causa in promptu est, quia tunc non sciebam potestates ad primitivas quantitates debere referri nec ab ullo haec audiveram, et licet quis mihi dixisset rectangulis me uti debere, hoc tamen nihil mihi profuisset, si non dixisset rationem ob quam, hoc est quia quantitates primitivas simplicissimas repraesentant uti jam scio; porro quoque non scivissem cum rectangula sola non sufficiunt, quas insuper quantitates deberem assumere, ut hoc succederet, alias enim judicassem rem impossibilem et sic ab hoc opere penitus recessissem prout Tibi contigit; porro nec qui numeri his rectangulis praefigendi, absque eo enim res itidem successu destituitur, atque sic revera non multum mihi communicasset sua rectangulorum cognitione, quam in egregium tentationum labyrinthum praecipitando. Quoad Methodum vero qua ratione ipsa reductio fieri debet ad primitivas quantitates, hoc tanquam accidentale cuique relinquo, ut arbitrio suo disponat, mihi quidem brevissima visa fuit quam communicavi, sed forte alia se adhuc compendia offerrent, si revidendi tempus aderit, interim hactenus mihi non suffecit, nec jamdum, ut in praxi numerum saltem exemplorum cujusque formae determinarem, sed ipsa exempla quaeque adeo apponere necesse habui; alias equidem potestates quoque exprimo $x^3 = a^3 + 3a^2b + 6abc$, uti in Algebrae meae compendio haec cum aliis non contemnendis asservo. Observationes quae a parte assignare curasti sunt peregregiae et placuerunt, licet enim verum sit, quod qui generalem habet Methodum necessario haec, si ita se habeant, posse in praxi acquirere, attamen et perutile est tam generales reflexiones facere et quae mentem aptam reddunt, ut res quam abstractissime concipiat, quod apprime in Mathematicis necessarium. Quoad ultimam annotationem non necesse est ut multum labores in formis radicum determinandis, si enim ponamus $x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}, x = \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c}$ etc. haec si liberentur a signis radicalibus, radices universales omnium aquationum exhibent ut alias dixi; sed quia haec liberatio a signis perquam molesta est,

hinc haecce ad superiorem Methodum reducta, quae omnia compendia signa radicalia breviter ablegendi in se continet, parvo labore haec poterimus et certo determinare. Atque haecce sufficiant hac vice circa hanc materiam.

Quoad Quadaturas miror revera, quod mihi de novo affingis aliquid, quod tamen cum viderem Te eo inclinare, posterioribus literis tam clare ostenderam, ut nauseam potuisset movere, et cum de tribus Methodis loquerer, quae mihi placerent, nonne expresse dixi, quod hanc Methodum aestimarem, quae in quavis quantitate (non saltem in solido) in sua Elementa resoluta (non tantum in superficies) omnibus modis quibus id fieri potest, haecce ad invicem adaequaret, et de hac Methodo dixeram, quod aeque late crederem illam se extendere, quam Tuae aequationes, quas appellare Tibi placet Tetragonisticas. Sed longum abest, si vellem omnia hic recensere, quae mihi in tuis literis affingis; sic eadem ratione revera non est mea sententia, quod improbem novitatem in definitionibus vocum hac ratione ut interpreteris, sed tantum inusitatum modum eas exprimendi, cum nulla inde utilitas et per alia magis usitata haec melius possimus efficere, et sic maxime laudo Vietam, quod potius literas alphabeti voluerit adhibere, quam nescio quae alia monstra characterum; sed maxime mihi in ipso displicet, quod tam pulchram scientiam foedarit talibus vocabulis: Hypobibasmus, Antithesis, Coefficiens, Gradus parodici, et infinitis aliis ineptiis, quae fateor si in libri alicujus lectione offendam, vix a me impetrare possim ut legam; quapropter Cartesius et Dn. Spinoza mihi ultra modum placent, quod a talibus abstinuerint, nam haec efficiunt, ut multi homines tales libros legere negligant, atque sic sapientiae augmentum damnum patitur et praeterea memoria oneratur superfluis. Quoad tuos characteres si utilitatem insignem afferant, non improbo, sed pro talibus reputavi, quia videbam in illis quae afferebas me aeque facile ac intelligibilius posse procedere, et saltem quatenus hominum ingenium expertus fui, observavi haec illis perquam molesta esse. Ac necdum probas satis praesentibus literis eorum utilitatem dum dicis, quibus problemata difficillima paucis lineis absolvo, ex. gr. invenire curvam talem ut intervallum AT sit recta constans: nescio num mecum joceris, nonne hoc facillime et universaliter sive AT sit constans, sive quacunque ratione composita, Dn. Barrow Appendi. 3. p. 123 prop. 3. ostendit, et hoc ego absque illis characteribus alia methodo, quae quoque universalis, praesto tanta facilitate, ut statim absque ullo calculo pateat, qualis sit haec curva (sive convexam aut concavam versus CT desideres) et si calculo deberem uti, quatuor literis scriptis res peracta esset. Sed ut



videas num vera loquar, exemplum tradam, ex quo cognosces, quanta sit ipsius facilitas, et num tui characteres Tibi majorem praebeant; etenim fere absque ut me servirem calculo, sequens solvi problema: sit BC perpendicularis ad BT Tangentem, quaerantur jam tales curvae, ut AT aut quaelibet ejus potestas multiplicata in AB aut quamlibet potestatem, item ut AC aut quaelibet ejus potestas multiplicata in AB aut quamlibet ejus potestatem sit = potestati convenienti a constante aliqua quantitate ex gr. ut quadratum AT in AB sit aequale semper cubo a constante quantitate; dico omnes illas curvas esse geometricas. Et quoad Methodum tuam de differentiis, ubi hos ipsos characteres seu signa soles adhibere, quaeso, candide loquamur, nonne melius fecisses, illam hac aut simili ratione communicando (sit curva HFGB quaecunque, sit HPML rectangulum, inveniatur jam curva BTQ, ita ut rectangulum JKNO erit aequale semper rectangulo DCRS, supponendo GE et FE esse indefinite parvas, hoc autem fiet si fiat ut AD (supponendo AF Tangentem esse) ad FD, sic constans KN ad DT) quam loquendo de curva differentiali et aliis talibus, quae credo pauci et non absque labore intelligant, ipse statim non intellexissem, nisi legissem, quae Barrow pag. 37 et 38 suarum Lect. circa haec habet, et mihi notum

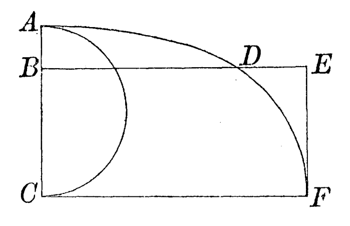


fuisset ex eodem authore, quod modo indicavi, nec existimo Te fingere posse tuam Methodum ab iis quae dixi differre, haec enim ex Tuis literis nimis aperta; et quicquid certe illa invenisti, ego hisce paucis eadem facilitate semper assequar. Sed jam ad ipsam Methodum accedo, nescio quare eam omnibus aliis praeferas; si hoc fieret ob eam rationem, quia natura nobis indicat, quod debeamus a simplicissimis incipere et rectangulum utique est simplicissima figurarum, quas scimus, utique Tibi assentirer, et hoc ipsum quidem Dn. Barrow bene perspexit, licet sero nimis, nam post multa superflua, quae nobis tradidit, observavit se eadem et multo praestantiora, hoc unico observato (quod modo indicavi) posse acquirere; sed si ob aliam rationem hanc Methodum omnibus aliis praefers, plane diversum sentio, nam omnia quae ibi recenses, ego eadem ratione aliis infinitis modis possum praestare, cum eadem ratione sicuti ponendo rectangulum HLMP et assumendo omnes curvas geometricas aut analyticas BFH, determinare licet numerum curvarum BTQ

quadrabilium, sic assumpta quacunque figura quadrabili loco trianguli, haec omnia eadem ratione assequi licet, atque hisce sufficienter ostendi, quare in aestimio habeam quaedam theoremata Dn. Barrow (fateor interim quod sua Theoremata infinities generaliora efficere potuisset, uti et Dn. Gregorius Scotus, qui haec sine dubio visu excepisset, existimabat, se Geometriam ad maximam universalitatem reduxisse, cum tamen sua Theoremata meorum, de quibus alias, perquam speciales casus existant). Et miror Te parvi facere eadem, et interim quae affers, nihil sunt, quam ea ipsa, ut jam fuse ostendi, aut ad minimum ego eadem hisce paucis praestare valeo. Et quaeso, nonne praeterea Dn. Barrow unico Theoremate, quod supra notavi pag. 123 omnes quadraturas ad Logarithmos reduxit? Ope hujus facillime Gregorii a S. Vincentio Theorema de hyperbola exhibetur (de aequalitate nimirum spatiorum, quatenus ad asymptotos refertur) ostenditur quadratricem hyperbolae esse Logarithmicam (quod Tu in Tua methodo desideras, quae tale quid ut fateris, non exhibet): Ipsius Logarithmici spatii datur quadratura et infinita talia, quorum unumquodque aestimationem meretur. Atque sic me credo etiam ex Tuis ipsis literis deduxisse, quod mea aestimanda sint, licet verbis contrarium dicas. Dicis porro, et ita facile condi posset Tabula omnium Figurarum; ne haec Tibi persuadeas, fateor licet multa compendia adhibuerim, res tamen ultra modum laboriosa est; hunc interim fructum hinc obtinui, ut illa disquisitione, dum generalibus curvarum expressionibus omnes curvas quadrabiles determinare conabar, quod nimirum observabam, qua ratione Resolutio Problematum Numericorum facillime sit expedienda ac generalissima ratione et quando id in numeris non fieri potest, qua via demonstrandi impossibilitas innotescat; adeoque haecce postquam ad maximum compendium reduxi, ut inservire possent alii, qui forte talia suscipere ob prolixitatem non reformidaret, reliqui et me ad alia convertens, perpendi haec multo facilius peragi posse, si rem sic aggrediamur: sit curva quaecunque et lineas AB et BC vocemus x et y (soleo autem, ut obiter hoc notem, characteres figurae sic ascribere, ut medium locum occupent intra duo puncta, quibus linea terminatur, quam repraesentant) si jam ex data x omnes compositiones possibiles faciamus (ex. gr. x, xx, x^3, x^4 etc. $\sqrt{x}$, $\sqrt{xx}$, $\sqrt{x^3}$ etc. $\sqrt[3]{x}$, $\sqrt[3]{xx}$, $\sqrt[3]{x^3}$ etc. hasque deinde binas ac binas, ternas ac ternas etc. conjungendo signis + et — et extrahendo radices per gradus prout feci, et alia his similia) illasque aequales ponamus areae ABC hincque jam per problema 7 pag. 25 Barrow. determinemus longitudinem lineae BC, habebimus seriem omnium curvarum quadrabilium et cujus omnia spatia

constanti regula quadrantur et hinc clarissime sequitur, curvae spatia quae hac ratione non quadrantur, veluti circulus, hyperbola, tale quid non admittere; quid autem ego existimem, quod efficiendum sit, ut ad ultimam perfectionem circa quadraturas perveniamus, nondum hic omnes meas cogitationes in ordinem redegi ut Tibi ausim ea proponere, quamquam me hoc totum occupet, quantum per negotia, quibus premor, licet. Caeterum quod non opus habuerim aequationibus, quas transcendentes vocas, in quadraturis (nam alias cum Dn. Slusio et Cartesio in aliis problematibus haec observo, ut exponentem potestatum litera explicem) non credo inde evenisse, quod non satis generaliter analysin ac quisquam alius circa haec tractarim, cum quoque omnes curvas generalissime calculo exprimo, tam Geometricas, quam transcendentes ut vocas, meoque judicio admodum simplici, cum eadem expressione, qua Cartesius Geometricas exprimat, omnes conceptibiles curvas exprimam, hocque insuper hac expressione obtinens, ut omnium talium curvarum Tangentes eadem prorsns facilitate, imo iisdem legibus, prout Dn. Slusius praescribit, definiam; atque haec existimo esse validas rationes, ad minimum ut Tibi quantum possum probabilissima concedam, non praejudicatas opiniones, quae effecere quo minus Te in quibusdam non secutus fuerim; interim tamen ingenue fateor quoad hanc tuam expressionem, me illam non vilipendere, revera enim ignoro num melior sit mea, sed illam saltem sit judicavi positis prioribus rationibus; quod si in continuatione meorum studiorum (quae sic mihi videor disposuisse ut certo me ad optatum circa talia finem sint deductura) mihi aliquid detegatur, quo cessent, liberrime Tibi manus dabo atque tum non intermittam haec ipsa quoque aggrediendo experiri quantum valeant. Atque hoc existimo majori utilitate fieri, quam si ipsas jam aggrederer ob rationes quae mihi incertae, atque certum ac fixum cogitationum filum (sic enim semper progrediendo soleo progredi, omnia alia inordinata studia magis menti obsunt quam prosunt) hisce interrumperem. Adde quod maximi momenti esse judicem; postquam quis aliquo modo scit, quid sit distincta cognitio ac aliquatenus verae Methodi regulas perspexit, ut in quam proprias inclinationes sequatur, et contra ut nihil magis caveat quam aliorum inclinationes sequi, si cum ipsius non consentiant (licet non causas sciat) cujusque regulae praestantiam experientia et rationes novi, quibus non tam mea defendo quam author Tibi sum ut strenue talibus incumbas, quia Te eo inclinari sentis. Et licet itaque pateat quod non credam quod magnum inde damnum passus fuerim ea non sequendo, agnosco interim maximum quod mihi in meis disquisitionibus obtigit fuisse, quod me primo ad Radicum extractionem et quae huic sunt agnata conversus fuerim, atque sic non meam curvarum expressionem non solum respexerim

omnibus reliquis omissis, hoc est quod nihil aliud quam simpliciter curvas solas considerarim; hinc enim cito omnium Radicum expressionem obtinuissem multo praestantiori ratione, quam fuit ea, quam Tibi supra communicavi, et quae intima harum rerum mysteria recludit, veluti jam scio Tangentium constructionem expeditissimam, quae ex ipsa curvarum natura fluit, ac alia non minoris momenti circa quadraturas. Methodum Tangentium inversarum jam quoque scio duplici via, absolute si curva Geometrica, quandoque si non talis; duplicem quoque viam qua portiones speciales quadrentur; priori vidi in Cycloide ADF spatium DEF absolute quadrari, quando AB est quarta pars AC, illudque spatium esse = spatio ABD quod Dn. Hugens quadravit; imo infinita quadrabilia spatia dari, si cyclois ad alia curva spatia refertur, prout jam relata ad quadratum; posteriori spatia particularia ad infinitas series reduco atque



sic quandoque tales series se patiuntur, ad finitas quantitates referri. Quae causa porro fuerit, cur haecce Tibi transcripserim circa Artem combinatoriam, revera jam me latet, certum est me ad Tua tunc non reflexisse, credo tamen occasionem id mihi dedisse, quia imaginationem plenam de iis tunc habebam ex conversatione Dn. Kircheri, qui praecipue mecum loquebatur de sua Arte combinatoria ejusque praestantia. Alias per ipsam tunc non intellexi Artem quae recenset saltem numerum variationum, sed et quae ipsas variationes exhibet, nam multiplicatione potestatum ex formulis $x = a + b$, $x = a + b + c$ etc. utrumque acquiritur. Dicis quae de Pascalio et Fabrio adfers, me Tibi hoc sic interpretari videre ac si suspicarer etc. quod tamen Tibi ne per somnium in mentem venit; respondeo quod mea intentio revera quoque hoc non fuit. Atque quia vidi quod me multa ex praeconceptis opinionibus agere praesumis hocque Te sic judicare credo (licet imbecillitatem meam profiteor) quia Tibi non semper rationes, quare aliquid sustinuerim, aperte indicavi, coactus quodammodo fui Philosophice i. e. liberrime, attamen vere amicali responsione Tibi cogitationes meas hisce aperire, inter quae libere exarata locum quoque concedes huic responsioni, dico itaque me observasse quod admodum curiosus es in determinandis rerum inventoribus, quod si hoc facis eam ob causam, ut observes, qua ratione augmentum sapientiae de seculo in seculum creverit, ac alia quae hinc sequuntur, ut ita curiositati tuae satisfacias, haec nihil ad me. Sed haec maxime in mundo jam agitantur, et si ob eas consas, Philosophice ut dixi hic Tibi meas cogitationes dicam, miror quod homines si inventum nobile jam in possessione habeant, diu laborent in inventore inquirendo;

quaeso quam utilitatem hoc fert vel iis vel inventoribus, quod sciant quod Petrus aut Paulus appellatus fuerit? sic dicunt jam, Dn. Rhedi librum scripsisse quo determinat verum Telescopiorum inventorem, vix risum potui continere, quod enim aliud mundo indicavit quam tria aut quatuor vocabula quorum infinita scimus. Verum dicent, quoque indicavit fuisse Italum, et quid tum, si Turca, ... aut Americanus fuisset; sic revera, quod huc refert sive Cartesius sive Vieta comparationem adinvenerit, modo eam sciam, hoc ego saltem respicio. Et quando de comparatione mihi verba fuere, citavi Cartesium nullam aliam ob rationem, quam ut non repetere deberem quae ibi habet, et ut quis me paucis intelligeret quae vellem, quod semper in citatione authorum observo. Sed expresse moneo, me jam locutum de hominibus qui jam diu e vita excessere, nam si in vita adhuc sint, tunc injustitia esset non velle attribuere iis quae ipsis debentur, praecipue ob utilitatem quae ad inventores hinc provenire potest et quoque ad alios, qui cum Authoris ingenium hac ratione cognoscant, ipsi suppeditare possunt media, ut multa alia ipsis communicare valeat. Possem hinc ostendere mala quae oriuntur a superiori curiositate, sed aliquid ex praecipuis notabo quod est ut saepe iis quae in vita sunt inventa egregia praeripiuntur et ascribuntur mortuis qui saepissime longissime ab illa cognitione abfuere, atque sic volebam clare ostendere quantum ab eo quod tradideram praedicti authores dictassent, ut et sic indirecte a tali curiositate dimoverem. Haec mea vera fuit intentio, quod jam aperte explicavi Quoad tandem Characteristicam Tuam dicis: Te nescio qua de causa praeoccupatum ab his meis meditationibus fuisse alieniorem, quod revera in quantum differam ignoro, nam credo me talia quaedam prioribus literis indigitasse, quae quoque citas et confiteris me tecum sentire. Praeterea multum hac de re olim tecum locutus, in quibus aperte dixi, me in praecipuis tecum convenire, licet non in omnibus. Ut autem perfecte hac de re judicare possis, meam sententiam clare hisce declarabo. Cum aliquatenus Algebrae cognitionem mihi acquisiveram, perplacebant in ea quod quasi ludendo tam remotae a nostra cognitione veritates possent acquiri; hinc maxime tale quid in aliis scientiis desideravi, sed cum non ita statim applicatio pateret, et Cartesius loquebatur de sua Methodo, quasi haec se universaliter ad omnia et aeque facile extenderet, ego credebam ipsum tale quid habuisse, ac proinde maxime hoc in suis scriptis perquirebam, in quibus evolvendis tum temporis maxime occupatus eram, sed nihil revera inveni quod animo satisfaceret; interim tamen incidi paulo post in Epistolam, in sua loquitur de lingua aliqua Philosophica, qua Rusticus aeque facile posset (si recte memini) in veritatis inquisitione progredi ac magnus

Philosophus, et alia plura his non absimilia, quae admodum mirabar et utique inexpectata mihi erant. Sed Linguae vocabulum mihi obfuit, ut haec non perciperem; sed dum in demonstrationibus concinnandis admodum occupatus essem ac delectarer me ipsum ex calculo Algebraico tanta facilitate illas posse elicere, ad quas excogitandas legendo mathematica Scripta divinum ingenium habuisse existimaram, observavi quod revera eadem res utrobique peragatur eadem certitudine nisi quod Algebra haec expeditius exsequatur, atque adeo nullam aliam differentiam esse quam si quis duabus diversis linguis eadem loquatur; hic subito reflexi ad ea quae inveneram in modo indicata epistola, et haecce applicans vidi omnia perfecte consentire. Hinc existimabam, me verum sensum Cartesii percepisse, adeoque in mea sententia confirmatior factus auctoritate tanti Philosophi multas quidem posthac, sed frustra volvi cogitationes adeoque quo mihi viam sternerem ad illud acquirendum, mihi firmiter proposui Algebram ex professo excolere, quia nimirum jam tale quid habebamus ut sic bene iis perpensis, simul addiscerem applicationem ejusdem ad omnia. Hinc Algebram primo ex variis authoribus in unum corpus collegi ut sic omnia quae dispersa erant praecipua inventa simul contemplandi facilior occasio esset, quo deinde breve compendium adornavi et alia multa peregi quibus recensendis hic supersedeo. Deinde cum in cognitionem pervenissem Dn. Spinosae, Dn. Schullerum rogavi ut ab ipso inquireret in veram methodum investigandi veritatem (quia tunc temporis domum eram ex Hollandia reversus) sed mihi in responsione retulit, quod ipsius praecipua cura fuerit, ideam veram ab omnibus aliis ideis, falsa, ficta et dubia distinguere, et hinc se incredibilem facilitatem in progressu veritatis acquirendae ostendisse; cum demum in Hollandiam reversus, ipsum accessi et post varia, quoque ostensa Cartesii epistola, quid de illa sentiret, rogabam, sed ille ridendo respondebat: credisne, mi Amice, omnia quae Cartesius dixit, vera esse? dixi: non; bene dum replicavit, res itaque haec nobis non magnam solicitudinem causabit, et sic alia uti solebat. Attamen fateor mihi vix probabile videbatur, quod Cartesius haecce, si non eorum solide persuasus fuisset, ad Mersennum scripsisset, cum sciebat tunc literas suas a multis visum iri, quapropter hisce non dimovebar a mea opinione. Hanc Epistolam Tibi postea quoque, ut probe noris, monstravi et varia de hisce rebus collocuti fuimus, sed quantum jam recordor, in eo semper se terminabat discursus, quod viderem Te methodum hanc ad omnia, quae in Mundo sunt, extendere (nec video me deceptum, nam et adhuc es in ea sententia, ut clare tuae literae indicant, dicis enim: ope ejus omnes nostrae cogitationes etc. in quibus Tibi non contrarius sum, et revera perquam optarem, ut tale quid haberemus, et quis vellet de ejus praestantia du-

bitare!), sed mea cogitatio tunc erat, quod saltem in tali methodo occupatus essem acquirenda, ut problemata physica eadem ratione tractare possem et resolvere, ac problemata mathematica ope Algebrae, et eo saltem conatus meos postea extendi. Verum deinde percepi, non opus esse ut progrederer ad ea, cum necdum habeamus in ipsa Algebra veram ac genuinam artem inveniendi; observavi enim nos mirum in modum omnes deceptos fuisse Algebrae speciositate, hancque esse confusissimam artem, quod magis magisque videbam, cum mihi illuxit verae Analyseos Idea, praesertim cum infinitis exemplis hac in re confirmatior factus. Dicam itaque Tibi me in talem methodum incidisse quae his praerogativis gaudet 1, non posse dari faciliorem, hoc statim ex ejus forma et notione facillimae methodi patet; 2, nulla aequationum reductione hic opus esse; 3, nulla earundem ad simpliciores depressione; 4, nulla radicum extractione; 5, nulla radicum electione, nam radice extracta non scimus statim alias, quae radix proposito problemati satisfacit; hisce ad eam perfectionem reductis, quantum temporis angustia mihi permisit, nondum tamen volui aggredi ipsa problemata physica, nisi prius problemata mechanica et quae motum spectant, quatenus is imaginationi subjiciatur, ad similem methodum reduxissem, et hic quidem observavi talia tam facile posse solvi, ut vix calculo ullo opus sit. Cumque tot viae non concurrant ad idem problema solvendum, quot in Geometricis, difficultas hic non tanta est, ut ibi ad omnium facillimam determinandam, adeo ut hic facile possint praescribi praecepta, quibus observatis, si centum idem problema solvendum susciperent, necessario tamen omnes per easdem vias cogitationes dirigerent ad ignotum determinandum, attamen si problemata nimis composita essent, vix absque calculi adjumento res procederet; considerans interim hic facilius multo causam, quam in Geometricis, quare calculo opus sit, observavi scientiam aliquam nobis superesse, quae nullo calculo indigeat et quae bene in ordinem redacta, omnia particularia in Physicis absque calculo poterunt determinari et huic scientiae convenit, quae dicis ut et in captivi, cui negatur calamus et cui ligatae manus, potestate sit, nec mirum, nam haec ea ipsa est, circa quam et post mortem poterimus esse occupati. Vix interim credo, quod quis talem scientiam (quae merito aeterna posset appellari, ut et omnes, quae ad hanc perfectionem possint reduci) nobis facile tradet; licet in hac ipsa credam problemata majori posse facilitate solvi, quam ulla analysi mathematica, nisi quis se suaque ad talem statum redegerit, ut quam minime a rebus externis dependeat. Atque hisce meas cogitationes circa haec, seu si mavis opiniones aut praeconcepta praejudicia (ab amicis siquidem quieto haec suscipio vultu) libere exposui. Quoad definitiones rerum, quod dixerim

eas esse difficiles, per eas non intellexi, ut existimes conceptus maxime simplices; credo enim tales conceptus facile posse definiri, imo eo facilius quo simpliciores sunt, ut per se patet. Nec Te credo aliud posse sentire, et quando dicis eas esse perdifficiles, absque dubio ad alias respicis quam ad horum conceptuum naturam; hoc quoque clare patet, si statuas Essentiale seu nota definitionis perfectae atque adaequatae in eo consistere, quod semper per causam efficientem proximam exprimatur; hoc posito omnia quae ab Authoribus afferri solent, quod definitio debeat constare genere et differentia, quod non latius debeat extendere re definita etc. imo quod ipse adfers, quod percepta ea non amplius dubitari possit utrum sit possibile nec ne, haec omnia, inquam, et quae possunt afferri, hinc statim necessario et tanquam proprietates saltem sequuntur; tales autem definitiones ego judico maxime difficiles esse et eo difficiliores quo res magis composita est; et ut taceam Physica, ubi res nimis clara est (ex. definitionem hominis per causam efficientem non mihi quis facile exhibebit), in ipsis Mathematicis nec statim obvium est tales definitiones dare, ex. definitionem centrorum seu focorum curvarum nemo adhuc hac conditione exhibuit. Alias autem definitiones quae non nisi proprietates saltem rei definitae exprimunt, non vero causam efficientem, ego nullatenus aestimo, cum probe jam sciam quantum detrimentum factum sit scientiis hoc unico intermisso, nec miror ut Mathematica saltem attingam, quod omnes conqueruntur obscura esse quae circa proportionem habentur et infinitae aliae disputationes quas habent; haec enim omnia hinc originem trahunt, nec credo ullum adaequatam demonstrationem nobis exhibiturum, quod triangula similia proportionalia, nisi quis definitiones nobis exhibeat quae lineae rectae et proportionis causam efficientem exprimunt, hinc enim res unico intuito(u?) clara. Multa talia habeo assignata, quae si tempus mihi concedat in ordinem redigam; Curvam hyperbolicam ex data spatii quadratura exhibendi, duas vias habeo, si quidem possibile, id certo educendi ex calculo, sed quia hic quaedam prolixitas et circumspectio opus, nondum tempus fuit id perficiendi, et credo alteram ex hisce duabus viis cum tuis cogitationibus convenire. Permulta adhuc restant quae mihi proposueram Tibi significanda, sed tot occupationibus distrahor ut mihi impossibile sit me longius extendere, sunt etenim hic permulti quos novi et quidem ex ipsis cognatis praeterea duo Principes (de Wolfenbuttel et Wurtemberg) quos in meis itineribus cognoscere mihi datum fuit; quae effecere ut ultra mensem circa haec conscribenda occupatus fuerim, et toties interruptus fui et impeditus ut mirer me haecce adhuc potuisse consignare; proinde quaeso excuses lapsus meos quos commisi, quodque satis confuse et minus legibiliter ea exararim, quod mihi

facile a Tua humanitate promitto. Nec unquam velim credas apud me dissensum posse amicitias diminuere, qui non satis mirari possum, quod homines his praejudiciis in tantum indulgeant. Eandem libertatem quam mihi saltem tectam volo, quare non alii concedam? Et quaeso quodnam hoc mihi damnum affert, quod alius aliam opinionem a mea diversam sustinet in rebus quae nullum interesse respiciunt. Et certo Tibi persuadeas mihi pergrata fuisse Tua et eo magis quo majori sinceritate mihi visus es loqui, nam utique omnia eo tendunt; ut credis, si ea quae indicas, fuissem secutus, me majores progressus fecisse, quae licet non ita bona essent respectu mei, velut Tibi persuades, nonne hoc solum me tibi devinciret? ita meam perfectionem desideras et tuo labore adjuvare conaris, licet mihi non quam alia Amica officia praestitisses, quorum tamen permultorum non immemor vivo, ut semper libere quam plurimis confessus sum, in meis itineribus nunquam me utiliorem conversationem habuisse quam Tecum. Nec quatenus Te novi, impossibile judico ut et imposterum ullae tuae literae mihi possint ingratae esse, quapropter Te obsecro ut me digneris Tuis responsionibus prout hactenus amice solitus fuisti, et cum sciam quod ubique locorum correspondeas cum viris doctis, quaeso si aliquid sit, quod judicas mihi posse adjumento esse in meis studiis, non intermittas mihi quam cito significare. Ego sane si tale quid scirem, quod ullatenus Tibi inservire crederem ad studia tua promovenda, nunquam deessem, quo Tibi eo gratificarer. Praecipua quae jam scio, est Nova hypothesis circa verum systema mundi, quam Gallus et ut videtur Vir admodum doctus nobis exhibuit. Magnas difficultates magna facilitate solvit et res revera digna est quae consideretur; sed quia cum Authore de Journal des Scavans correspondes, credo quod eandem Tibi transmiserit, ut et alia quae curiosa sunt in praedicto diario (uti est Microscopiorum excellentium confectio ope candelae, prout ipse expertus fui etc.) quibus itaque recensendis supersedeo. Utilis denuo hic res instituta est: quidam Chirurgus singulis mensibus promisit publico communicare Les Nouvelles decouvertes sur toutes les parties de la Medicine; duo menses jam vulgati extant, ubi quaedam curiosa. Ich habe zu Turin 3 bücher von Jordano Bruno, darunter de infinito et immenso, erkauffet umb ein leidliches geld, so gewieß viele schöne gedancken in sich hatt. Sexti Philosophi Pyrrhoniarum hypotheseon libri tres, Parisiis 1569 in folio, habe mitt delectation geleßen. Grimaldi optica ist mitt feinen experimenten illustriret. Opera posthuma Toricelli werden wir auch mitt ehisten haben, wie auch Bellini observationes Anatomicas. Habe die Hrn. Viviani, Rhedi, Maliabechi zu Florenz gesprochen, den Hrn. Septala und Caravagio zu Meyland, Signor Rossetti zu Turin, von dem wir mitt ehisten schöne observationes

circa . . . . gelatas, Nivem et grandinem zu erwarten. Hr. Leti in Genevre, der vor ietzo Vitam Philippi 2di R. H. schreibt, ist ursach gewesen, daß des Sixti Vti Vita gleichfalls in druck gegeben, ein buch, das angenehm und mitt nutzen zu lesen. Ich bin so pressirt, daß hier gezwungen bin vor dießmahl inzuhalten. Das übrige wird der Hr. D. Schuller berichten, wie oben erwähnt, sonsten wolte noch gedacht haben, was mitt kürtzen in den verlohrnen brieff inne geweßen, doch ich habe große Hoffnung daß wir ihn wieder bekommen wollen, den ich zweifel fast nicht, daß ihn ein gutter freund auffgefangen. Hr. Bullialdum habe gesprochen, der mir die opera Mathematica Dn. Fermat, so ietzo dieses jahr gedruckt zu Tolosae in folio geliehen. Hr. Hugens, bey dem auch geweßen und viele curiosa mitt ihm conferiret, ist wiederumb schon bey 8 Tagen kranck, und gefelt mir seine constitution nicht zum besten. Memoires d'hollande sind nicht unangenehm zu leßen, wenn man ohne dies die Zeit nicht beßer anwenden kan. Hr. Hugens gedacht, daß der Hr. viele curiosa an den Duc de Chevres*) (weiß nicht ob den nahmen recht behalten) referirt, biette mir hierin nachricht zu verleihen, auch wer gemeldte Duc. Ich verbleibe vielleicht noch 2 monath in Paris, darnach möchte es wohl ohne zweifel nach hauß gehen. So der Hr. mir beliebet antwort zu ertheilen, so können sie nur die Adresse so einrichten: au bout de la rue dauphine, dans la rue de Fossè à la couronne Royale. Ob zwar jeden zu dienen mich gar gerne schuldig erckenne, so beckenne mich hierzu absonderlich von seiten des Hrn. nach des Apostels außspruch, allermeist aber den glaubensgenoßen, und gestehe daß selbst wüntsche daß mir derselbige so etwas aufftragen möchte, in dero affairen hier auß zu würcken, das selbigen recht nützlich fallen köndte, damit gelegenheit zu erweisen, wie das ohn einzige vorbehaltung bin 2c.

Hr. Steno ersuche . . . . zu salutiren. Hr. Wickefort hatt seinen Tractat: Memoires touchant les Ambassadeurs etc. new augirt aufflegen laßen im Hag, gedencke solches, damitt wen iemand selbiges erkauffen wolte, ihm diese nachricht dienen, das beste exemplar zu erwehlen. Millies valeto.

---

*) Duc de Chevreuse.

X.

Tschirnhaus an Leibniz.*)

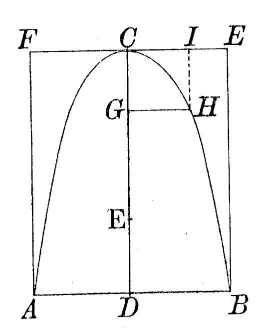
— —

— —

Velim autem in principio scias, me literas praeter hasce, ad quas jam responsorias dedisti, diversas ope Dn. Septimii ad Te transmisisse, in quibus significaram, qua ratione ac qua occasione cum Dn. Nanzario, Autore Giornale delli Letterati, literis correspondere liceret, nec non alia quae a me tum desiderabas; si nondum receperis, quaeso in illam restitutionen serio inquires, cum avide exspectarim responsum tuum, neque si qua in re Tibi hic prodesse possem, occasio id exequendi mihi praecludatur. Quoad praesentes has jam dum $\frac{7}{17}$ Maji datas, hae me perquam occupatum offendere, nec me volui alienis cogitationibus tum immiscere, quo tam implicato nodo (domum nimirum cito redeundi prout a Meis instanter urgetur) par essem et quo soluto sciebam nos liberius conversari posse, quod quidem, si aliquando ad Meos revertar ad ibidem scilicet semper commorandum, nullatenus possibile. Nunc vero, cum praesentia pericula quae imminebant, aliquatenus declinarim, aliis me cogitationibus occupari nullatenus permittam, quam quae testificari possunt, quam suave mihi sit, Amicis satisfacere, et hac intentione reflectando ad principium tuarum literarum non aegre tuli, ut de mea sinceritate aliquatenus suspensum habueris animum, cum aliis interiora nostra non patent, nec ullam certitudinem dabant nos ipsa non mutaturos licet aliquando talia experti fuere. Attamen si de me aliquid praedicari licet, possum dicere, me in eo totum esse, ut bona fide semper agam, licet proprio id quandoque fiat damno, et non saepe miratum esse quod cum omnes homines propriam utilitatem tantum quaerant, eam viam non adhibeant eo perveniendi (hoc est bona fide ut constanter agant) quae infallibiliter eos eo defert et tam plana est ut nullis artificiis aut astutiis hic opus, quae alios adhibere necesse habent, quaeque tam facile deteguntur, unico autem detecto omnis labitur fides, quaequid in contrarium deinde faciant. Nec mirari adhuc desinerem, nisi scirem Homines utcunque passionibus saltem incitari ad agendum, passiones autem praesentia imprimis respirare, cum priori via

*) Auch dieses Schreiben ist ohne Ort und Datum. Leibniz erhielt dasselbe zugleich mit dem vorhergehenden. Es ist auf einem Folioblatt geschrieben, dessen Ränder sehr zerstört sind.

progrediendo utilitas quae expectanda (licet certa) non tamen tam cito acquiratur. Et revera hisce tam ratione quam experientia ita confirmatus sum ut haec quasi in habitum conversa mecum, et revera gaudeo me aliquid habere quo Te hac vice . . . . . . possim; literarum enim quas tum Parisiis ad Te dedi exemplar reservavi, quod hac vice transmitto iis lituris refertum prout tum primo conscripsi et quod ex signo pro Parisina cognosces papyro, optarem praeterea ut literas ipsas transmissas ope Mes. de Koch et Hensch reciperes (?). Ex conformitate penitus apparebit mea innocentia, cujus . . . . Regnaldum cum . . . . methodo indivisibilium uti . . . . superficiei Conoidis Ellipticae, miror ipsum errasse et licet quandoque in . . . . errores commiserim, attamen hic tempus erat ea revidendi priusquam publicarentur; interim non scio num ipsi injuriam facias, cum sphaeroidis oblongi dimensio revera saltem a quadratura . . . . dependeat prout sphaeroidis lati dimensio a quadratura hyperbolae, prout vel ex horologio oscillatorio D. de Hugens apparet. Tibi itaque facile erit decidere, si scias cujus sphaeroidis dimensio ab ipso exhibita. Recordor bene Te mihi ostendisse longius a Te provectum Guldini principium, sed tum non intellexi, cum nullum exemplum mihi exhibuisti, et me maxime obligares id applicando saltem ad Parabolam aut triangulum etc. Ego non ita pridem maxime incubni in eo ut universalem Methodum ex datae figurae alicujus mensura centrum gravitatis exhibendi, eruerem sed nihil profui; sequentia tamen ultra modum facile demonstro. Data figura DCB tali ut □ CIHG (puncto G ad libitum assumpto) ad GCH spatium eandem rationem habeat quam habet □ CEBD ad fig. DCB, quod tunc □lum AFEB sit ad figuram ACB ut CE ad ED, existente E centro gravitatis, adeoque in talibus figuris quae hanc conditionem habent, datur centrum gravitatis spatii ex ejusdem spatii data mensura. Porro inveni quod generaliter in omnibus figuris omnia □la CGH sint ad omnia □la DGH ut CE ad ED. Et per haec theoremata infinitarum figurarum centra gravitatis assignantur, quae per Guldini inventum non acquiruntur, itidem solidorum et curvarum, cum hae quantitates ad analogas superficies facile reducuntur. Quoad Analytica et praecipue Methodum Radices Aequationum universaliter obtinendi, tres methodos habeo id certo assequendi. Et quoad primam qui fit ex formulis talibus x ∞ a, x ∞ a + b, x ∞ a + b + c etc. prout Hudenius iisdem usus in Cardanica radice et ipse circa haec occupatum Te scio, efficiendo ex illis maximam potestatem



incognitae, quam habet aequatio cujus radices desideramus, caeteras ejusdem incognitae potestates ordine per divisionem inserendo ac assumendo semper quotientes aequaliter compositas, quarum omnium possibilium modorum determinatus semper numerus facile exhibetur; hanc vero methodum in praesentia abunde declaravi et specimina exhibui, sed non ita pridem ad majorem perfectionem deduxi. 2da est supponendo formulas omnes possibiles radicum $x \propto \sqrt{a} + \sqrt{b}$, $x \propto \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, $x \propto \sqrt{a + \sqrt{b + \sqrt{c}}}$ quae facile omnes quot esse possunt numero determinantur et tunc liberandae sunt ab signis radicalibus atque comparatio instituenda. Specimen Tibi exhibebo ad formulas Cardanicas obtinendas. Sit $x \propto \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, supponatur jam $\sqrt[3]{a} \propto c$ et $\sqrt[3]{b} \propto d$ et habebimus has tres aequationes $x \propto c + d$, $a \propto c^3$ et $b \propto d^3$, quibus reductis inveniemus aequationem absque signo radicali (ut Tibi jam notum erit juxta Metho. D. de Beaune radicalia signa auferendi, quaeque melior D. Hudenius) nimirum

$$\begin{array}{rl} x^3 - 3a\,x^6 + 3bb\,x^3 - a^3 & \propto 0 \text{ Jam addatur ab utraque} \\ -3b\,x^6 + 3aa\,x^3 - 3\,aab & \quad \text{aequationis parte} \\ -21\,ab\,x^3 - 3\,abb & \quad 27\ abx^3 \text{ et extrahatur} \\ -b^3 & \quad \text{utrobique radix cubica} \end{array}$$

et erit $x^3 - a - b \propto 3\,x\sqrt[3]{ab}$. Jam si inter $\begin{array}{l} x^3 - 3\,x\sqrt[3]{ab} - a \propto 0 \\ \qquad\qquad\qquad\;\; - b \end{array}$ et

et aliam generalem $x^3 - px - q \propto 0$ fiat comparatio terminorum, invenientur Regulae Cardanicae; in quo . . . . . . ostendi quae ad ultimam perfectionem hujus methodi necssaria. Quoad Tertiam methodum ope ablationis intermediorum terminorum quaedam Tecum communicanda; sed haec ob brevitatem temporis alia vice.

XI.

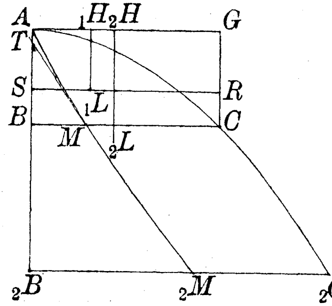
Leibniz an Tschirnhaus.

Constitui quaedam reponere literis, quas ex itinere scriptas nec ad me perlatas Tute, cum hac transires, reddidisti. Quanquam enim ex colloquiis ultro citroque habitis in plerisque, ubi Te haerere aut aliter sentire scripseras, satisfactum dubitationibus tuis opiner (quod Te ipsum ingenue agniturum et contraria tua libenter retracturum arbitror), utile tamen erit nonnulla denuo attingere, ut intelligam an apud Te profecerim, et ne amplius imposterum eadem discutere opus sit. Actum

est inter nos de Radicibus Aequationum, de Quadraturis, de aliis Geometricis, de Metaphysicis et Logicis. Radices aequationum tribus Methodis assequi credidisti: prima est per enumerationes formularum irrationalium, tollendo irrationales, sed calculo opus esset immenso. Hanc methodum agitabas animo, cum primum Parisiis mecum loquereris, quia tunc nondum constabat formulas generales pro qualibet aequatione dari posse; sed cum ostendissem imaginarias in speciem nihil obstare generalitati et specimine monstrassem, quomodo ponendo $x \sqcap a + b$ series quaedam aequationum omnium graduum resolvi posset, et quomodo spes esset, assumendo plures partes posse inveniri radices generales, merito mecum hanc methodum persecutus es. Cumque ego, confiderans Formas ab abc quas rectangula voco, esse simplicissimas,
ac etc.
etc.
ad eas revocassem potestates ab x, et inde suppositis valoribus ipsarum y, z ex cognitis quantitibus per comparationem sumtis, seu posito $a^5 + b^5$ etc. $\sqcap$ ☉, ab + etc. $\sqcap$ ☽ et abc + etc. $\sqcap$ ☿ et abcd $\sqcap$ ♀, sperarem invenire tales quatuor aequationes $a^5 + b^5$ etc. $\sqcap$ ☉, $a^5 b^5 + a^5 c^5$ etc. $\sqcap$ ♂, $a^5 b^5 c^5$ + etc. $\sqcap$ ♃, $a^5 b^5 c^5 d^5 \sqcap$ ♀^{5}, quibus repertis habuissemus a^{20} + ☉ a^{15} + ♂ a^{10} + ♃ a^5 + ♀$^5 \sqcap 0$ et per consequens quaesitum: Tibi tunc methodus ista mea se non satis probabat, quia ad meas operandi rationes non satis attenderas, neque opinor eam tunc perceperas; postea tamen de Tuo in eadem incidisti, multaque pulchra theoremata reperisti, atque haec est secunda tua Methodus pro aequationibus radicum. Sed ego interim deprehendi, istam methodum non posse ad exitum perducere, cumque Tu perstares successumque a Te demonstratum diceres et me dissentientem tua non intellexisse confidentissime assereres [his verbis: non miror quod talia profers, hanc enim plane non percepisti; item: ostendi quod hac methodo infallibiliter radices habeantur; hanc autem ostendere falsam, judico impossibile; item: quam demonstrationem si destruere valeas, magnum quid mihi praestabis etc.] cum tamen ego tuam methodum primo statim aspectu intellexissem, quippe mihi familiarissimam, quaedam etiam in tuis emendanda monuissem, ut quod pro $x \sqcap a + b + c$ alium calculum adhibes quam pro $x \sqcap a + b + c + d$, cum tamen unus sufficiat pro omnibus et in x^2 sufficiant duae literae, in x^3 tres etc. ad valores potestatum inveniendos pro literis quotcunque; itaque gratissimum fuit, quod eorum Te convincere potui tum de sinceritate tum de exactitudine in hoc genere mea: de sinceritate quidem, ut agnosceres me vere asseruisse, haec olim mihi cognita; de exactitudine, quia ni fallor agnovisti, me tuam methodum diligenter legisse et intellexisse et errorem deprehendisse, locum

enim lineola signatum apud me vidisti. Itaque imposterum spero Te non ita facile monita mea insuper habiturum. Tertiam tuam methodum radices aequationum inveniendi, nempe si sit $x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t \sqcap 0$, ponendo $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \sqcap y$, tollendo x per y et ope arbitrariarum b, c, d etc. auferendo terminos intermedios in aequatione proveniente $y^5 + \ldots\ldots$ etc. $\sqcap 0$, non puto succedere posse in altioribus nisi quoad casus speciales. Ejusque rei videor mihi habere demonstrationem: itaque autor essem ne ea tempus perderes. Utile esse potest ad aequationes transformandas, non tamen (generaliter) ad resolvendas.

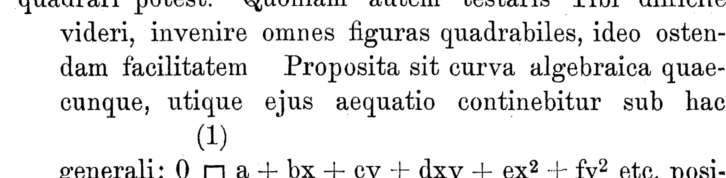
Venio ad quadraturas et quae cum his connectuntur, ubi primum Apologiam texere cogor vocabulorum quae adhibui, quia ea sugillas. Nolim itaque putes ea esse inutilia; saepe enim hac ratione paucis lineolis exprimo theoremata generalissima, quibus alias explicandis opus esset replere paginam, quanquam necesse est Tibi et aliis quibus non distincte explicui, apparere obscuriora. Sunt tamen pleraque ni fallor satis rebus significandis et memoriae juvandae apta, saltem me valde sublevant calculum, aequationem, problema, curvam etc. Algebraica voco, quando per potentias certi finiti rationalis exponentis exprimi possunt, alias voco Transcendentia. Quid sit Calculus tetragonisticus, patet, id est serviens ad tetragonismos. Curvam quadratricem voco, quae servit ad aliam figuram quadrandam. Curvam summatricem et differentialem voco. quarum ordinatae se habent inter se ut summae et differentiae. Calculus differentialis est, quem praeter literas x, y etc. ingrediuntur infinite parvae $d\overline{x}$, $d\overline{y}$ et similes. Invenire Tangentes curvae, reducitur ad hoc problema: invenire seriei differentias; invenire autem aream figurae, reducitur ad hoc datae seriei invenire summas, vel (quod magis instruit) data serie invenire aliam, cujus differentiae coincidant terminis seriei datae. Ope hujus calculi differentialis omnia ista reperio, sine figurarum inspectione et linearum ductu: et per consequens ea, ad quae imaginatio per linearum ductus attingere nequit. Hinc inveni modum habendi tangentes sine sublatione fractionum et irrationalium, quam Te maximi facere testatus es, in quam non facile incidet nisi qui considerabit tangentes ad differentias reduci. Itaque nunc opinor non amplius dices, aliis methodis statim praestari, quod meo illo calculo differentiali. Nec possibile est generaliora praestari in hoc negotio, itaque ex quo mecum locutus es, non amplius opinor dices: quicquid ea methodo invenerim, Te per alias eadem facilitate praestiturum. Unum exemplum dabo, quod est ex utiissimis et mea methodo facillimis: Ex datis figurae partiumque ejus quarumcunque centris gravitatis invenire



areas. Sint L centra portionum trilinearum orthogoniarum ABC. Sumatur BM aequal. LH et ducatur curva AM_2M, quae (datis algebraice punctis C et L) erit algebraica, ergo ad eam duci potest algebraice tangens MT. Erit area ABC ad rectangl. SBCR ut TB ad BM, ac proinde habetur figurae quadratura Algebraica generalis.

Curvam quam proponis, in qua posita BT tangente sit quadratum AT in AB aequale cubo a constante, nullo negotio reperio, est enim ipsamet Hyperbola.

Caeterum tres habeo calculos transcendentibus etiam applicabiles, unum per differentias seu quantitates infinite parvas, alterum per series infinitas, tertium per exponentes irrationales, ex quibus novissimus habet aliquid prae caeteris, per ipsum enim solum demonstrare possum impossibilitatem quadraturae specialis ex. gr circuli totius; per duos vero priores tantum invenire possum aut impossibilem demonstrare quadraturam generalem algebraicam alicujus figurae. Est autem generalis quadratura algebraica idem quod inventio curvae algebraicae quadratricis, cujus ope quaelibet figurae datae portio quadrari potest. Quoniam autem testaris Tibi difficile



videri, invenire omnes figuras quadrabiles, ideo ostendam facilitatem Proposita sit curva algebraica quaecunque, utique ejus aequatio continebitur sub hac generali: (1) $0 \sqcap a + bx + cy + dxy + ex^2 + fy^2$ etc. positis a, b, c etc. datis, quaeritur an ipsa sit capax quadraturae algebraicae generalis, id est quaeritur ejus curva summatrix, cujus aequatio sit (2) $0 \sqcap l + mx + nz + pxz + qx^2 + rz^2 +$ etc., erunt l, m, n etc. quaesitae. Ex nota methodo tangentium constat esse (3) $\frac{z}{t} \sqcap \frac{m + pz + 2qx \text{ etc.}}{n + px + 2rz \text{ etc.}}$; ponatur (4) $\frac{z}{t} \sqcap y$, et ex aequ. 3 et 4 fiet (5) $ny + pxy + 2rzy$ etc. $\sqcap m + pz + 2qx$ etc., ex qua aequatione tollendo z ope aequationis 2 habebitur aequatio, in qua solae erunt indefinitae x et y, quae proinde coincidere debet cum aequ. 1 data, quod an possibile sit, constabit ex comparatione terminorum,

qua inveniemus valores literarum p, m, n etc. Atque ita calculo aliquot horarum habebimus universalem regulam pro quadratura generali algebraica figurae algebraicae cujuscunque. Et memini me Tibi jam haec Parisiis dicere, sed ut video non attendisti. Eadem et ad figuras transcendentes suo modo applicare et determinare possum, utrum datae figurae quadratura pendeat ex quadratura circuli aut hyperbolae vel utriusque; item ad problemata methodi tangentium inversae, quanquam tunc artificio adhuc aliquo nonnunquam opus sit Haec facilia quidem, sed ideo difficilia visa autoribus, quia non solent aequationes generales adhibere pro curva qualibet ejusque tangentibus, ut inde regula unica pro omnibus inveniretur. Non est cur Reynaldum defendas; non enim soleo in talibus temere judicare. Ille utriusque sphaeroidis oblongi et lati superficiem se dedisse putat, ego puto ipsum dedisse neutrius. Pauci eorum qui Methodum indivisibilium vulgarem intelligunt, intelligunt usum Trianguli characteristici (ut ego vocare soleo), imo credo neminem in Italia eum intelligere, in Gallia vix quisquam praeter Hugenium, in Anglia plures. Bullialdus qui intelligit methodum indivisibilium et de ea librum scripsit ineditum, fassus est se non posse invenire superficiem Conoidis parabolici, quod tamen facillimum est. Vides quantum inter methodos indivisibilium intersit.

Subjiciam pauca de quibusdam aliis quae ad Geometriam non spectant. Certum est haberi et a me certo determinari posse methodum praestandi omnia sine calculo. Opus est tamen signis aliis, sub quibus ego comprehendo imagines et verba. Optima signa sunt imagines, et verba ut apta sint, debent imagines accurate repraesentare. Quod cum in Geometricis non faciat Algebra, ideo illi meum calculum geometricum praefero, quem Tibi ostendi. Non experior eam, de qua quereris, in optimis definitionibus reperiendis difficultatem; possum enim hoc problema certa analysi solvere: Datis omnium terminorum proprietatibus reciprocis seu definitionibus qualibuscunque, invenire definitiones optimi generis. Per definitiones optimi generis intelligo eas, ex quibus constat rem definitam esse possibilem, quia alioqui nihil tuto ex definitionibus concludi potest, nam de impossibilibus possunt duo contradictoria simul concludi. Itaque ad hanc necessariam et primam definitionis bonae notam ipsa me cogitandi methodus duxit, id enim denique satis bonum est, quod usum praestat quem desideramus. Hujus notae corollarium est tantum, ut causa efficiens includatur in eorum definitionibus, quae causam efficientem habent. Hinc patet etiam, quod definitiones non sint arbitrariae, ut putavit Hobbius.

Annum agens aetatis decimum octavum scribensque libellum de Arte

Combinatoria, quem biennio post edidi, certum meditandi filum inveni, admirabile verae analyseos arcanum, cujus corollarium est lingua vel characteristica rationalis. Hanc nemo credo alius intellexit, alioqui qui eam intellexisset, omnibus aliis missis eam fuisset persecutus, nihil enim majus ab homine praestari potest.

Haec sunt quae Epistolae tuae respondenda potius putavi, quam Tibi, nam ex quo collocuti sumus, Tibi ni fallor jam satisfeci.

Das nächste Schreiben, welches von Tschirnhaus vorhanden ist, ist datirt: Kießlingswalde, 5 Decembr. 1679. Es enthält Mittheilungen über die Ordnung seiner Familien-Angelegenheiten. Auch meldet Tschirnhaus, daß er damit umgehe, um ein Canonicat sich zu bewerben.

XII.

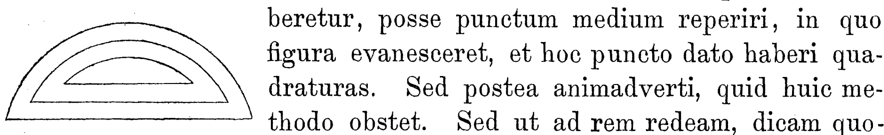
Leibniz an Tschirnhaus.

Dessen sehr werthes (vom 5 Debr.) habe zu recht erhalten, und erfreulich verstanden, daß M. H. Hr. zu Hause glücklich ankommen und in guthen Zustande alles angetroffen. Die Canonicatus betreffend, so glaub ich wohl daß eine ansehnliche summa dazu gehört, auch viel practicken unterlaufen; allein daß einer inhabil erclärt werde, geschicht wohl selten. Die einkünften wann man einmahl dazu gelanget, sind ansehnlich. Ich hielte aber unmasgeblich folgendes für rathsam, davon ich auch glaube erwehnung gethan zu haben. Es sind bey den Stifftern gemeiniglich zweyerley menses, papales und capitulares; wer in einem mense papali gestorben, dessen beneficium hat der Pabst vergeben, oder gemeiniglich an deßen stelle der Bischoff, der hingegen dem Pabst ein gewißes einmahl vor allemahl geben müßen. Wo nun die stiffter secularisirt worden, ist solches recht des Pabsts oder Bischoffs auf den Principem, der sich das jus Episcopale vindiciret, kommen. Und sind gemeiniglich zwischen denen Fürsten und Capitulis gewiße Tractaten und recessen darüber aufgerichtet worden, wie ich dann glaube das zu Halberstadt geschehen. Halberstadt ist eines der considerabelsten Evangelischen stifftern und gehört Chur Brandenburg. Es hat auch Chur Brandenburg sehr viel andere beneficia zu vergeben, inmaßen sein territorium sich weit erstrecket. Hielte ich dahehr dafür, man solte unter andern praetexte an den Brandenburg Hof gehen, alda

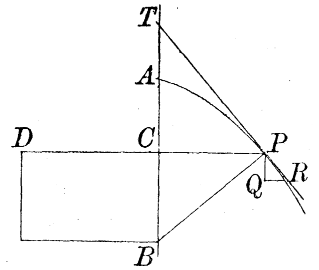
man alles gründtlich erfahren, auch anstalt machen, damit eine guthe gelegenheit nicht entgehe und lieget solches gemeiniglich an einen geheimen Secretario, den man zu gewinnen suchen mus. Der Hr. von Schwerin, Premier Minister, ist todt und sagt man, Hr. Meynders, so zu Paris, werde an seine stelle kommen. Der geheime Secretarius, so wie ich vernehme, viel gilt, nennt sich Kleinsorge.

Venio ad Epistolam tuam veterem, cujus exemplum mittere coepisti. Non repeto quae de literis perditis aliisque id genus rebus agitata, omnem tibi mihique suspicionem adimere potuere. Miraris Reginaldum circa superficiem Elliptici Sphaeroidis labi potuisse, cum intelligat methodum indivisibilium, sed non videris satis considerasse quam diversae sint indivisibilium methodi. Cavalerianam intelligit, sed ea tam arctis limitibus circumscribitur, ut pauca magni momenti praestare possit. Nimirum Cavalerius, Torricelluis, Robervallius, Fermatius, imo quod sciam Itali omnes ignoravere usum tangentium ad quadraturas, et ejus quod a me vocari solet Triangulum figurae characteristicum infinite parvum; imo nunc quoque in Gallia credo unum Hugenium esse, qui haec intelligat. Ipse Pascalius mirari satis non poterat artificium quo Hugenius invenerat superficiem conoidis parabolici. Slusius quoque nullum dedit specimen, unde credam haec ipsi cognita. Haec causa etiam est, cur Hugenius et Gregorius talia demonstraverint per ambages lineares, analysi suppressa, ne methodum tam facilem et foecundam vulgarent. Prima occasio qua inveni ego de meo methodum Trianguli characteristici aliaque id genus fuit eo tempore quo vix aliquot menses studio geometrico impenderam. Hugenius cum librum suum edidisset de pendulis, ejus mihi exemplum dedit. Eo tempore plane ignorabam Algebram Cartesianam, et methodum quoque indivisibilium, imo nesciebam veram definitionem centri gravitatis; cum enim forte cum Hugenio colloquerer, credebam et significabam me credere rectam per centrum gravitatis ductam secare figuram semper in duas partes aequales; cum enim id manifestum sit in quadrato, circulo, ellipsi aliisque figuris centrum magnitudinis habentibus, putabam idem contingere in aliis omnibus. Hugenius ridebat hoc audito, mihique dicebat nihil esse falsius Ego hoc velut stimulo excitatus coepi applicare me ad Geometriam interiorem, cum tamen revera nondum Elementa legissem. Sed deprehendi experientia, Elementorum cognitione careri posse, modo quis paucas propositiones teneat. Hugenius qui me meliorem Geometram credebat quam eram, dedit mihi legendas literas a Pascalio, Dettonvillaei nomine editas: ex his intellexi methodum indivisibilium et centrorum gravitatis, nempe vulgarem Cavalerii et Guldini. Ego vero statim, dum Pascalium legebam, de meo occurrentia conjiciebam in chartam, ex quibus nunc video nonnulla esse inepta, nonnulla vero etiam-

num perplacent. Inter alia quaerebam novum quoddam centri genus. Putabam enim si figurae cuilibet alia similis et similiter posita inscri-



beretur, posse punctum medium reperiri, in quo figura evanesceret, et hoc puncto dato haberi quadraturas. Sed postea animadverti, quid huic methodo obstet. Sed ut ad rem redeam, dicam quomodo inciderim in methodum Trianguli characteristici Forte Pascalius demonstrabat ex Archimede superficiei sphaericae dimensionem, seu momentum curvae circularis ex axe, ostendebatque radium axi applicatum dare hoc momentum. Ego demonstrationem attentius rimatus animadverti, ope trianguli characteristici infinite parvi demonstrari posse hanc propositionem generalem pro qualibet curva: Sit curva quaecunque AP, ad cujus tangentem PT ducatur perpendicularis BP axi occurrens in B; sit ordinata PC, applicetur axi AC in puncto C recta perpendi-



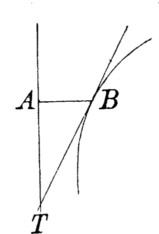
cularis CD aequalis ipsi PB. Quod si jam curva ducatur per omnia puncta D, ea figuram faciet cujus area erit momentum curvae ex axe, seu ostendet modum superficiei curvae circa axem rotatae exhibendi circulum aequalem. Et quoniam in circulo recta PB semper est eadem ubicunque in curva sumatur punctum P, hinc figura illa ex perpendicularibus axi applicatis nata est rectangulum, ac proinde facillimum est superficiem sphaericam redigere in planum. Cum ergo hoc modo methodum generalem reperissem pro superficierum dimensionibus, statim eam attuli Hugenio; is miratus et subridens fassus est, se eadem plane methodo usum ad inveniendam superficiem conoidis parabolici circa axem. Nam curvam per omnia D transeuntem tunc etiam esse parabolam, ac proinde figuram esse quadrabilem. Ego cum vellem experiri an hoc verum esset de parabola, coepi quaerere modum exprimendi loca seu curvas per calculum, et tum primum intellexi ea quae Cartesius scribit. Nam antea solebam calculare meo more adhibitis non literis, sed nominibus linearum. Tum primum igitur Cartesium et Schotenium attente legi, hortante Hugenio qui mihi dicebat modum calculandi ab ipsis adhibitum esse commodiorem. Ego interea aperto semel characteristici Trianguli aditu facillime innumera theoremata inveniebam quibus plurimas tunc chartas adimplevi; sed pleraque postea reperi etiam Heuratio, Gregorio et Barrovio innotuisse. Haec omnia autem praestiti primo tirocinii mei Geometrici anno. Sed postea ad longe majora enixus sum, ad quae credo Gregorius et Barrovius ex suis methodis pervenire non possent, Cavalerius autem et Fermatius multo minus. Circa eadem tem-

pora cum viderem inventionem quadraturarum reduci ad inventionem summarum serierum, et contra inventionem tangentium reduci ad inventionem differentiarum, fundamenta jeci calculi mei novi, quem voco differentialem aut tetragonisticum, quo ea quae magno linearum apparatu vix ac ne vix quidem consequi licet, paucis lineolis praestare possum. Animadverti autem generaliter summam alicujus seriei reperire nihil esse aliud quam invenire aliam seriem cujus differentiae constituant seriem datam. Aliam autem illam seriem vocare soleo summatricem. De seriebus infinitis cogitandi occasionem dedere Wallisius et Mercator. Sed cum inventa eorum meis sociassem, nova nullo negotio reperi. Tandem cum considerarem problemata quadraturarum non esse certi gradus, posse tamen revocari ad aequationes, in quibus exponentes potestatum incogniti sunt, nova mihi lux oborta est, coepique agnoscere praeter vulgarem analysin dari aliam quandam Transcendentem a me appellatam, quia aequationibus utitur quae omnes gradus transcendant: eamque propemodum unicam video methodum determinandi an problemata hujusmodi specialia sint possibilia an non. Facile quidem demonstrare possum per alias vias et per calculum imprimis differentialem impossibilitatem quadraturae generalis, seu nullam posse dari lineam algebraicam quadratricem circuli. Voco autem lineas Algebraicas, quas Cartesius Geometricas, et per quadratricas intelligo omnes quibus descriptis cujuslibet portionis circularis quadratura daretur. Sed modus inveniendi impossibilitatem specialis cujusdam quadraturae, exempli causa totius circuli, non nisi duplex mihi notus est, unus per calculum exponentium transcendentium, alter per novum quoddam genus calculi omnia complectentis, quod nemini hactenus ne per somnium quidem in mentem venit. Habes Historiam quarundam mearum meditationum, quam ideo enarravi, ne ut aliquando facis, varias methodos longe differentes habeas pro iisdem aut me dissimulare putes per quas profecerim, quanquam credam Te ex quo nuper mecum locutus es, longe aliter de plerisque meis sentire, quam fecisti, cum novissimas literas ex itinere scriberes. Agnosces etiam me non temere judicasse de tuis circa extractionem radicum ex aequationibus methodis: neque ex vanitate dixisse me credes, quod quaedam talia jam antea quaesiissem, sed eo consilio ne me tua descripsisse aliquando suspicareris; et cum tibi in memoriam revocavi eorum quae Parisiis ostenderam, non id fecisse, quasi crederem Te mea sumsisse, scio enim quid per Te possis, sed ut facilius tibi probarem, me non fuisse in his plane novum. Eaque occasione pauca reponam ad nonnulla loca literarum tuarum, quas ad me non perlatas tute mihi in transitu reddidisti. Per rectangula ego intelligebam id quod tu per primitivas quantitates ab, abc,

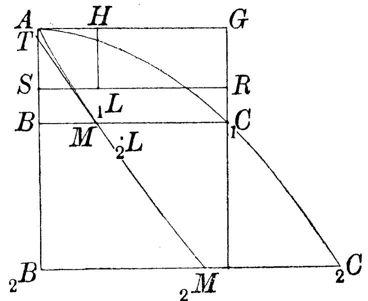
abcd. Cum per formulas irem, haud dubie incipiebam a simplicissimis, nempe primitivis. Nec tentando procedebam, sed via plane determinata ad omnes in infinitum potestates suffectura; sed quod ea Parisiis ostensa non satis attendisti, eaque postea de Tuo reperisti causa fuit, quod praejudicata opinione laborares quasi non fuissem in eo secutus ego methodos mentem perficientes sed fortuitas, quod jam credo intelliges a consuetudine mea valde abesse. Nullum enim inventum aestimo ad quod non certa methodo, sed mero casu perveni. Non recessi ab instituto, deprehensa impossibilitate rem per sola rectangula hoc modo ut Parisiis coeperam et tu perscripsisti praestandi, sed animadverti adhuc aliis longe magis reconditis artibus esse opus. Via per $x \sqcap \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c} + \sqrt[5]{d}$ nihil differt a via per $a + b + c$, semper enim vel ad horribiles calculos ascendendum, vel singularia compendia et artificia invenienda, neque enim hactenus habita ullo modo sufficiunt. Observatio vero mea, quod radix una gradus sequentis x includat omnes radices gradus praecedentis, nempe quod posito $x \sqcap \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c} + \sqrt[5]{d}$, ipsae a, b, c, d candem formam habeant quam habent quatuor radices generales aequationis quadrato-quadraticae, hoc maximi momenti mihi videtur, cum sit generale et aditum reperiat ad compendia praeclara. Unde si vellem, possem jam scribere totam formam radicis quinti gradus, excepto quod pro numeris coefficientibus, quos adhuc ignorarem, collocare deberem literas, quarum valorem postea calculo investigare deberem, perinde ac si nescirem in cubica $x^3 \sqcap q^2 x + r^3$ x esse $\sqrt[3]{\frac{r^3}{2} + \sqrt{\frac{r^6}{4} - \frac{q^6}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{r^3}{2} - \sqrt{\frac{r^6}{4} - \frac{q^6}{27}}}$; scirem tamen interim x esse $\sqrt[3]{\frac{l}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}} + \sqrt[3]{\frac{l}{2} - \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}}$, seu si posito $x \sqcap \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ scirem a et b habere formam radicum aequationis gradus praecedentis $x^2 - l x + m \sqcap o$, quae sunt $\frac{1}{2}l + \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}$ et $\frac{1}{2}l - \sqrt{\frac{l^2}{4} - m}$, utique plura scirem, quam si scirem hoc tantum x esse $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$, faciliusque longe inventurus sum l et m (per q^2 et r^3) quam a et b. Statim enim video, l debere necessario aequari ipsi r^3 per certum quendam numerum diviso; hoc enim statim agnosco ex gradibus potentiarum quas literae habent, cum enim valor ipsius l non possit assurgere supra cubum (nam extrahendo ex ipso radicem cubicam, debet prodire recta linea). Jam valor ipsius l ad tertiam dimensionem assurgens non potest esse nisi r^3 per numerum divisus, nam si r et q jungas, minimum quod inde componitur, esset $r^3 q^2$ quod assurgit ad quintum. Hinc jam facile etiam agnoscitur, quid sit m, necessario enim debet assurgere ad gradum sex-

tum, et ideo vel constabit ex q^6 solo per aliquem numerum multiplicato, vel ex q^6 et r^6 per aliquos numeros multiplicatis. Itaque tantum hos numeros inveniri opus est. Hac via certo et satis compendiose ac plane determinate inveniri possunt aequationum radices, semper enim praecedens servit ad sequentem. Et possunt alia compendia jungi, et ita rescinditur inutilis enumeratio variarum formularum irrationalium. Itaque vides, mi amice, te solere aliquando de his quae propono, nimis superficiarie judicare, quod me de tuis facere nunquam animadvertes. Itaque credo etiam te ingenue agniturum, multa in literis tuis retractanda esse. Quod ais problemata mechanica tam facile solvi plerumque ut vix calculo opus sit, credo inde evenire quod non nisi faciliora sis expertus; sed si quaeras exempli gratia figuram dentium rotarum ita se ducentium, ut semper eadem sit quantitas contactus seu frictionis, ex quibus casus unus est, si rotae unius dentes sint rectilinei, alterius curvilinei ita flexi, ut recta dentis ducentis sit semper inter ducendum tangens curvae dentis ducti, cujus curvae descriptionem ego in eo casu quo rectae ab longitudo aequatur distantiae centrorum ef, inveni esse curvam cujus arcus certo modo assumti sint ut logarithmi, talia, inquam, si examinabis, agnosces mechanica problemata et in se continere difficultates problematum geometricorum, et illis addere novas. Certum est haberi methodum praestandi omnia sine calculo, sed opus est aliis characteribus. Sub characteribus autem et imagines comprehendo et verba, verba autem ita ordinanda sunt ut respondeant imaginibus, in his scilicet quorum imagines habentur. Definitiones cujusque rei invenire, etiam optimas difficile non est, datis qualibuscunque: possum enim hoc problema solvere: d a t i s o m n i u m t e r m i n o r u m p r o p r i e t a t i b u s r e c i p r o c i s s e u d e f i n i t i o n i b u s q u a l i b u s c u n q u e i n v e n i r e o p t i m a s. Hoc inquam problema solvere possum analysi tam certa quam est arithmetica vel algebraica, itaque non reperio eam de qua quereris in definitionibus optimis investigandis difficultatem. Per optimas intelligo eas, ex quibus constat rem definitam esse possibilem. Sic enim loqui malo, quam reperire ut involvant causam efficientem, nimirum ut eas etiam complectar quarum causa efficiens nulla est. Ratio autem cur requiram ut constet rem definitam esse possibilem, haec est, quod alioqui nihil tuto de ea concludere possum, quia de rebus impossibilibus contradictoria simul possunt esse vera. Itaque ipsa methodus generalis cogitandi me ad hanc optimae definitionis notam duxit, cujus corollarium est tantum quod de causa efficiente ajunt. Haec causa etiam est cur definitiones non sint arbitrariae, ut putavit Hobbius, sed constare nobis debet notiones quas conjungimus consistere

posse. Venio ad ea qnae habes de quadraturis. Agnosces credo nunc ex quo mecum locutus es, me non jocatum, cum dixi meum calculum differentialem (sic enim compendii verborum causa loquor) praestare quae Barrovius et Gregorius aliique ut ipsi talia concipiunt non potuissent; unde quod Barrovius habet de theoremate*) illo suo generali, ex quo caetera pendent, quod Phrygia sapientia sibi occurrisse fatetur post caetera, id mihi statim ab initio methodo mea necessario occurrit, imo consistit in una ex aequationibus mei calculi differentialis Curvam quam proponis, in qua (posita BT tangente) sit quadratum BT in AB aequale cubo a constante, nullo negotio reperi, estque ipsamet Hyperbola. Quod vero tunc scribebas, te eadem alia methodo praestiturum quae ego methodo calculi differentialis (nam nunc opinor aliter senties) ejus experimentum capere poteris ex hoc problemate generali: ex datis figurarum centris gravitatis invenire earum arcus, quod ita solvo: Sit figura trilinea orthogonia ABC (nam ad tales caeterae revocari possunt) quaeritur area portionis cujuscunque ut ABC dato portionis cujuscunque centro gravitatis.



Quoniam descripta habetur curva et centrum spatii assignari potest ex hypothesidemitatur ex quolibet centro L perpendicularis LH in AG tangentem verticis et ipsi LH sumatur in basi aequalis BM, idque faciendo ubique per omnia puncta M ducatur curva, quae utique haberi poterit algebraice, quia curva CC supponitur esse algebraica et algebraice habentur puncta B, C, L, H. Jam ex puncto M educatur tangens (quod in curva Algebraica semper fieri potest) occurrens axi AB in T, et completo rectangulo ABCG ducatur per L ipsa SR aequalis et parallela ipsi BC, ajo aream ABC fore ad rectang. SBCR ut est TB ad BM. Ex data autem area invenire centrum gravitatis problema est, quod generaliter sumtnm algebraice impossibile est, quemadmodum facile demonstrare possum. Risi cum Barrovium dixisti omnes quadraturas revocasse ad logarithmos, locumque indicasti. Ille enim dicit ibi, quae jam ex Gregorio a S. Vincentio et Wallisio notissima sunt, nimirum ipsius Hyperbolae et ab ea pendentium figurarum quadraturam per logarithmos haberi. Quae ego in hoc genere habeo aut quaero, ab his infinite distant. Sed calor objiciendi mihi aliquid quo



*) Leibniz hat darüber geschrieben problemate, ohne theoremate auszustreichen.

reprehensas tuas radicum methodos ulciscereris, eo te abripuerat. Ego Barrovium magni facio, sed non puto me illi injuriam facere, cum dico esse mihi in promtu infinities majora non in eo tantum ut generalius enuntiem ab ipso prolata, quod tu quaeris, sed ut ea praestem, ad quae ex ejus methodis nullus patebat aditus. Quadraturae Hyperbolae reductio ad logarithmos non habetur ope solius Trianguli characteristici, nisi alia praeterea consideratio accedat. Itaque cum indicavi usum communem quadraturarum per tangentes eo non attingere, non ideo exclusi a me correctum. Habeo enim ego methodum generalem pro quadraturis paraboloidum omnium et Hyperboloidum, qua et Hyperbolae ipsius quadratura exhibetur (scil. per logarithmos), in qua non considerantur tangentes, sed tantum differentiae et summae. Nam methodus tangentium correcta reducitur ad methodum differentiarum.

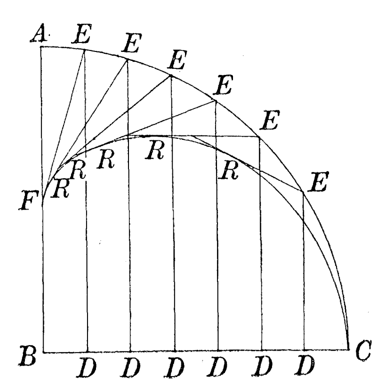
Jucundum etiam fuit videre, quomodo affectaveris nominare Cartesium et Slusium, cum de aequationibus meis transcendentibus loqueris, quasi illi quicquam dixissent ad rem meam faciens. Scilicet illi non utuntur literis in exponente, nisi cum sunt numeri rationales. Ausim quovis pignore contendere, Slusium ipsum, si ei dicerem quomodo illis utar ad supplendum id quod Algebrae communi deest solvendaque problemata quae calculum alioqui respuunt, fassurum nihil tale a se somniatum; sed tu par pari referre voluisti, quia quaedam, ob quae Cartesiani Cartesium jactant, jam apud alios extare dixeram. Duae sunt viae generales exprimendi omnes curvas tam algebraicas quam Transcendentes, una per aequationes infinitas, altera per aequationes finitas sed exponentium indeterminatorum. Utraque suos habet usus maximos sibi peculiares. Historiam inventorum magni facio, quemadmodum et alias historias, et te video non minus ejus esse curiosum quam me: alioqui enim toties in Epistola tua ad autores non provocasses. Meministi et loci Cartesii de lingua philosophica, sed olim fassus erga me es te nunquam intellexisse, quid in ea sibi vellet Cartesius; haud dubie itaque nunc melius intelligis, ex quo mecum locutus es, tametsi alias intelligendi eam occasiones nunc narres. Spinosa etiam ea habuit pro chimaeris. Credo ipsum Cartesium non potuisse praestare quod dixit, nisi deserta methodo sua; ideo fassus est etiam nihil tale sperari debere. Ego cum vix octodecim annorum essem, nondumque vidissem literas Cartesii, paulo melioribus auspiciis verae methodi et linguae principia sum assecutus. Lingua autem methodi ejus non nisi corollarium est. Algebra non est vera characteristica geometriae, sed mea quam tibi monstravi propius accedit.*)

*) Der Schluß fehlt.

Eine Antwort auf diesen Brief ist nicht vorhanden.

XIII.
Tschirnhaus an Leibniz.

Ich kan mich nicht genung wundern, daß in so langer Zeit keine antwort auff mein letzteres noch erhalten, glaube also daß wohl zweifels ohne die ietzige contagion dessen ursach, welche wohl manch tausend von Menschen weggeraffet, auch unß sehr nahe geweßen, doch Gottlob! auf die dörffer nicht leicht kommen, oder doch so sie bereit angefangen leicht können gestillet werden. Ich bin bies dato so lange zu hauße, ohne eintzigen anstos in vollkomner gesundheit geweßen; aber wie es hier gehet, sehr occupat, daß wenige progressus thun können in cognitione veritatis, iedennoch so viel als möglich, schreitte doch immer etwas fort, nur ist das ärgste und das beklage, daß so wenig zeit, daß solches mit gutten freunden communiciren kann; sonsten bin in allen vorhaben noch ziemlich glücklich. Hr. Gersdorff (de quo forte ex fama) so ein großer Freund der wahrheit, hatt schöne und kostbahre instrumenta mathematica, auch alle inventiones Hrn. Gericken zu Magdebourg nebenst einer Bibliothec von raren büchern, so auff 2000 werckhen geschätzet wird, welche er mir alle ex singulari favore geschenket; hette mir auch, glaube ich gerne seine eintzige Tochter gegönnet, wen sie nicht albereit wieder seinen willen sich mitt einen andern verheyrattet. Biette doch sehr unßer commercium literarum in alten stand wieder zugelangen laßen und zu berichten, was in Paris, London oder andern orten guttes neues circa cognitionem veritatis verlaufft. Hr. Mohr hatt denselbigen gegrüßet auß Coppenhagen, befindet sich annoch wohl. Habe eine sonderbahre Methode gefunden, Spiegel in großer größe und mitt leichter mühe zu machen, die vielleicht ein größern Effect als der in des Königs Bibliothek zu Paris erweisen werden. Sonstenn habe in der that erfahren, daß wen excavatae sphaericae superficiei ex ligno (quae facile paratur) agglutinantur superficies rotundae et planae ex vitro hujus magnitudinis ○, solche perfect als wie andere Brennspiegel brennen, doch nicht mitt solcher force; habe auch, weil mitt dieser materie umbgangen, dieß problema solviret: Sit curva circularis AEC, supponantur radii paralleli solis DE reflecti per EF; quaeritur quae sit curva FRC, quae ex reflexorum radiorum intersectionibus formatur? et inveni curvam hanc esse Geometricam, ut has vocat Cartesius; imo data quacunque curva Geometrica AEC, invenitur etiam curva Geometrica FRC. Vellem scire, num talia ab aliquo Mathematicorum hactenus determinata, praecipue a Dr. Hugens, cujus Dioptrica nunc lucem forte vidit. Caeterum adin-



veni Methodum multo faciliorem Slusiana (qua nec credo facilior existit) ope cujus non solum Geometricarum curvarum sed et Mechanicarum Tangentes statim determinantur, atque similia plura, de quibus alias. Vorietzt laßet mir die Zeit nicht zu mehr zu schreiben, viel weniger dies abzuschreiben (welches zu excusiren biette, ob so vieler begangner fauten), indem die gantze Stube voll Leute, wormitt ersuche nochmals mir zu melden, wie die Addresse zu machen, daß die brieffe nicht verlohren gehen. Verbleibe u. s. w.

Kießlingswalde d. 7 Aprill Anno 1681.

XIV.

Leibniz an Tschirnhaus.

ohnweit Northausen den 13 Maji 1681.

Deßen ohnverhofftes sowohl als angenehmes habe heut erst erhalten, und weil ich eben auf der reise begriffen und mich in einem dorff am Harz befinde, gleich darauff antworten wollen. M. Hr. meldet von einem seinen schreiben an mich, so mir aber nicht zu handen kommen, gleichwohl erhalte ich sonsten die briefe, die mir gerad nach Hannover addressiret werden. Nach absterben Herrn Herzog Johann Fridrichs Hochseel. andenckens bin ich zwar in meinen officiis conservirt worden, aber man hat nicht mehr die vorige curiosität, daher ich auch lange Zeit nicht erfahren, was in Frankreich und England passiret, ausgenommen daß man ein mittel in England gefunden, die beine also zu praepariren, daß sie eßbar seyn.

M. Hrn. curvam cujus puncta designantur intersectionibus radiorum reflexorum qui in datam curvam parallele inciderant, verstehe ich nicht recht, nam quilibet radius reflexus quemlibet alium intersecat, et nullum est punctum in plano, quod non duorum quorundam radiorum a data curva in eo plano existente post parallelam incidentiam reflexorum intersectio intelligi possit. Itaque locus intersectionum non est linea, sed superficies, nempe totum planum. Credo Te peculiarem quandam determinationem in animo habuisse, sed hanc non exprimis.

Circa Methodum Tangentium generalem ex calculo ductam nihil praestari posse puto ultra eam qua utor, communem curvis analyticis et transcendentibus, rationaliter vel irrationaliter expressis; cujus rei fundamentum Tibi coram explicui. Quoniam enim idem est tangentes curvarum et differentias serierum investigare, hinc licet valor ordinatae sit ex multis partibus irrationalibus utcunque involutis compositus,

nihilominus non opus habeo sublatione irrationalium, nam differentiae totorum componuntur ex differentiis partium. Eodem modo et cum curvis transcendentibus procedo. Una tamen superest difficultas, quam nondum satis ex sententia superavi, scilicet invenire tangentes, quando incognita seu indeterminata ingreditur exponentem. Exempli gratia, sit curva ejus naturae, ut posita abscissa x et ordinata y et recta constante a, habeatur aequatio hujusmodi: $y^x + x^y$ aequ. a^{xy} (necesse est autem dari quandam rectam constantem praeter a, quae exprimat unitatem) quaeritur modus inveniendi curvae tangentem. Si haec haberentur, haberemus etiam quadraturas quales sunt, scilicet vel analytice, quando id fieri potest, vel transcendenter.

De speculis urentibus saepe cogitavi et expertus sum, laminam vitream, scutellae cupreae impositam, calore accedente emollitam sese sic satis scutellae applicare; hanc methodum puto earum quas novi optimam; an aliquid facilius habeas, scire velim.

Ego hac aestate occupabor in absolvendis tandem meis molendinis ventaneis, quae fodinis applico, de quo memini me tibi coram locutum. Si qua naturae experimenta vel artis inventa memorabilia Tibi innotuere, ea rogo communices. Interea ex sententia vale etc.

P. S. Ob M. Hr. meines vor fast 2 Jahren bekommen, habe noch nicht erfahren.

P. P. S. S. Bitte mir Herrn Mohrs zu Coppenhagen adresse zu schreiben, wenn ich etwa einmahl an ihn etwas schreiben wolte.

XV.

Tschirnhaus an Leibniz.

Selbiger wird in gedancken stehen, daß gutte Freunde gäntzlich vergeße, welches doch versichert nicht leicht von mir geschiehet, absonderlich bey meinen Hrn. von welchen einen solchen concept, das ohne alle flatterie gestehe, seines gleichen nicht gesehen zu haben. Das aber bieshero nicht continuiret zu schreiben, ist theils ursach, daß auff mein letzteres schreiben noch nicht antwort erhalten, wo bey kommen, daß Hr. Krafft mich versichert, daß selbiger zu Franckfort; weil den nach Amsterdam verreiset, so hatte in willens selbigen zu Franckfort in person zu besuchen. Ich habe aber nicht hier in Amsterdam, wie vermeinet, gewieße versicherung bekommen, daß Sie alda befindlich, und also die reise nicht hazardiren wollen, und nachdem verrichtet was in Holland vor-

habends gehabt, so bin gleich nach Paris gangen, da den von M[r] Mariotte meines Hrn. wohlergehen erfahren, welches mich höchlich erfrewet. Sie werden sich ohne zweifel wundern, was alhier verrichte; die ursach ist diese: Ich habe alles so glücklich eingerichtet, daß vermeinet singulare progressus in studiis zu thun. In Patria kan mich nichts hinführo wie bisher geschehen, groß hindern, und übrigens bin auff singulare inventa tam in Mathematicis quam Physicis gefallen, quae certe scio aliis haud cognita esse (saltem quae ex iis quae hactenus edita judicare licet). Nur eines stund mir in wege officia seu dignitates, quae alii maxime desiderant, ego autem ut contraria scopo meo, ultra modum declino. Ich habe die zwey jahre mitt kunst mich deren entbrochen, aber weiter sey kein mittel diesen zu entgehen, quia bonos Amicos magis officiosos experiebar quam desiderabam. Dieweil den ein eintziges mittel noch übrig, nehmlich wen von den Könige alhier (nam in Germania tale quid vix credo impetratu possibile, apud Anglos displicet ob alias rationes tale quid desiderare nec existimo hoc ullibi alias posse obtineri) eine pension von 500 Thl. oder auffs höchste 1000 erhielte (den alsden köndte alle chargen bey Uns decliniren, vorgebend daß mitt solcher condition den Könige obligiret, Familiae meae esset decori, et si experimenta aut similia instituerem, aliis qui similia non aestimant, possem responsioni dari, me illis accommodando, quod quidem haec ipsa nullo modo aestimem; sed necesse esset ut satisfacerem societati Regiae hic atque sic mihi et Publico inservire possem). So habe vermeinet, ich köndte nicht beßer thun als das mich hier wendete umb solches zu erlangen; wie den in solcher intention singularia quaedam obtuli nebenst einen Tractat der vielleicht meinen Hrn. nicht mißfallen wird, als mein erstes specimem meiner studiorum. Ich sehe aber, daß gantz umbsonst hier kommen bin, und desperire mein vorhaben zu erhalten, atque sic coactus studiis solemniter valedicam. Ich habe genung gethan, und glaube daß wenig propter solum veritatis amorem et Publico circa talia inserviendi, so viel unkosten und mühe omnibus posthabitis deliciis temporalibus angewendet, als ich; wie viele jahre deßwegen nur bloß in der frembde mich auffgehalten, ist meinem Hrn. bekand, da zu hause quietem et deliciosam potuisse vitam degere; ietzo habe nicht ohne unkosten eine spatzierung auff 200 meilen umbsonst gethan; daß auch nichts in der weld mich abhalten kan veritatis inquisitionem prosequi, weiß nicht besser zu demonstriren als daß nuhmero über 2 jahre zu hause infinita impedimenta, und dennoch singulare progressus gethan. Doch mein Hr. kennet mich: Ich vermeine, so wir obligiret sind andern zu dienen, so solten wir absonderlich veritatis propagatoribus realia servitia zu praestiren nicht unterlaßen; doch was wihl man thun, die weld können wir nicht endern, in übrigen habe das feste vertrawen zu meinen allerwertisten freunde, er werde, als welchen weiß daß er ein recht genereuses Gemüth, etliche

stunden anwenden, seinen Freunde zu gefallen und nachsinnen, ob nicht etwan noch ein mittel vorhanden, daß dadurch mir köndte geholffen werden; Sie werden mich auffs höchste hierdurch obligiren, und ob zwar die meinigen verlangen daß einen andern rückweg nehmen soll, so wihl doch nicht unterlaßen expresse deßentwegen nach Hannover meine rückreise zu dirigiren, damitt mitt meinen Hrn. hierüber noch außführlich mich bereden kan, ersuche deßwegen mir zu schreiben ob selbigen antreffen werde, die Adresse ist A Mr Amilcar Block op de warmer straat in de Klock â Amsterdam. Ich bin inwillens auffs lengste innerhalb 14 tagen von hier zu verreisen, werde also innerhalb monaths zeit zu Amsterdam sein und den gleich in . . . . 14 tagen nach Hannover, da persöhnlich erweisen werde, daß unverändert bin u. s. w.

Paris d. 17 April. Anno 1682.

P. S. Es hatt sich alles geendert, und scheinet nuhmero, als wen ich die beste hoffnung hette was vorhabens zu erlangen; Feci Emblema in honorem Regis quod omnibus perplacet, de quibus imposterum, uti et de inventis quae Regiae Societati communicavi, quae ultra modum et vix quantum merentur, hic ubique extolluntur. Ich ersuche derhalben, weil resolviret noch etwas hier zu verbleiben, wen selbiger meine person M^r L'abbe Galloys wolte recommandiren, weil versichert daß er von meinen Hrn. eine sonderbahre estime. Ich zweifele nicht daß Sie mir hierin wihlfahren werden.

Leibniz erfüllte die Bitte Tschirnhausens und richtete folgendes Schreiben an Galloys, dessen Bekanntschaft er während seines Pariser Aufenthalts gemacht hatte und der bei dem Minister Colbert in hohem Ansehen stand.

Leibniz an Galloys.

4 May 1682.

Je sçay que vous avez des grandes occupations qui ne vous permettent pas de donner tout le temps aux belles sciences, que vous voudriés bien y employer. Mais si le public est privé maintenant de tant d'excellentes pensées que vous luy pourriés donner, il faut qu'il se paye des celles des autres, à qui vostre protection fait naistre la commodité d'en produire. Vostre bonté est allée jusqu' à ceux qui n'en ont que la volonté, et c'est sur ce fondement sans doute, que vous vous estiés empressé, si je l'ose dire, pour mes interests. Mais lorsque j'estois sur le point d'en profiter, la volonté d'un grand Prince qui me

voulut avoir auprés de luy m'obligea de retourner en Allemagne, je ne laisse pas de vous estre aussi obligé que si j'avois jouy du plein effect de vos bontés. Et comme j'ay eu par là l'honneur de reconnoistre vos sentimens genereux, j'ose vous supplier de les tourner vers un objet, où ils seront encor mieux employés. C'est un gentilhomme Allemand, qui se trouve à present à Paris, qui est mon amy particulier, mais qui a de si beaux sentimens et de si belles connoissances, que je ne croy pas qu'on vous puisse recommander une personne qui le merite d'avantage. Je suis asseuré qu'il y a tres peu de personnes qu'on puisse mettre en parallele avec luy pour l'Analyse et Geometrie. Mais il a tant de penetration pour toute sorte de belles choses, que je souhaite pour l'amour des sciences qu'on luy donne occasion de continuer cette application ardente, de laquelle il sera detourné sans cela, pour vaquer à d'autres soins, puisque ce n'est pas faute d'employs et de commodités qu'il a pris ce dessein. Quand vous l'aurés connu, je suis seur que vous le favoriserés non pas pour l'amour de moy, mais pour l'amour de luy même. Cependant je vous en auray la même obligation, que si vous l'aviés fait à moy, et je suis etc.

Aus dem folgenden längeren Schreiben, das Tschirnhaus von Paris an Leibniz richtete, wird nur das mitgetheilt, was von allgemeinem Interesse ist.

XVI.

Tschirnhaus an Leibniz.

Paris 27 May 1682.

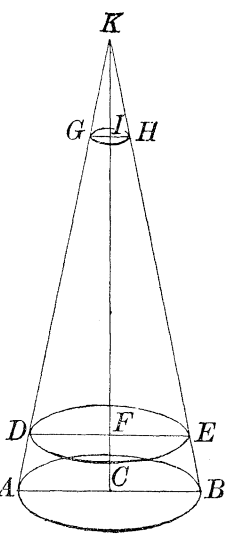
— —*)
Mein Problema, so meinen Hrn. zu ander zeit bekand gemacht, anlangend, so habe solches ex mera intentione obscure proponiret, dieweil der brieff in ander hende hette gerathen mögen, und ich nicht gerne gewolt daß solches andern bekand würde, vermeinet aber leicht, daß Sie meine gedancken errathen werden, wo nur die sach genaw betrachten, weil vorhabens es hier zu offeriren, da es den aus der intention obscur proponiret, damit sie nicht sagen möchten, sie hetten schon lange diese speculation gehabt (wie weiß, daß mir

*) Das Original dieses Schreibens ist am Rande mehrfach zerstört und wegen vieler Correcturen oft unleserlich, daher die Lücken.

sonst wiederfahren) den wen dieses sich so verhielte, so würden sie ohne zweifel solches bald verstanden haben, und also hette was das andere überzeugen köndte, daß die speculation gantz new, und daß man experientia convinciret würde, daß obschon diese materie de focis curvarum qui comburunt, von besten Mathematicis unser zeit, als Hrn. Hugenio, Huddenio, Georgio Scotto untersuchet worden, doch hierin noch etwas was werth geweßen wehre zu inventiren, welches mein Hr. urtheilen wird auß beygelegter Synopsi meiner inventorum, deren demonstration selbst nach Hannover mitt überbringen wihl. Ich habe die demonstrationes auch nicht bald hier bekand machen wollen, und da sie genung gesuchet und nichts finden können, nur hierin etwas zu erkennen wollen, da aber gesehen, daß sie solche gegen alle diese inventa dubieus machen wollen, so habe meine demonstrationes produciret und solche als von Mr Auzout (dem sie nicht gutt und doch fürchten, da er in Mathematicis mehr verstehet als die in der Academie so vor ietzo hier anwesend) approbiret proponiret. Sie werden hier sehr aestimiret; mein Tractulum aber haben sie wenig aestimiret, nicht aliter ac ille faceret cui viginti quatuor literas exhiberem nec usum ostenderem, auch so daß ich nicht glaube daß ihn einer von der Academie geleßen, außgenommen M^r l'Abbe Mariotte (Blondel, du Hamel) der ihn aber nicht assequiret, den er ist mitt einer logique, so er geschrieben, so praeoccupiret, daß er nicht glaubet, daß man was beßeres produciren kan, welches auch gegen ihn affirmiret und gedacht, daß ihn selbst nicht groß aestimire, und daß er gantz unvollkommen; doch hette was offeriren müßen, daß sie auch sehen, ob capabel was zu praestiren, und daß auch andere studia als die mathematica etwas mitt durchgesehen. Mein glück ist hierbey, daß ihn M^r l'Abbe Galloys sehr wohl geeßen und so wohl verstanden als noch von niemanden bemerket, welcher deßentwegen eine sonderbahre aestime gegen mir bezeuget, wie unten gedencken werde. Was mich aber betrifft, so wihl hiervon nicht selber judiciren, aber ich glaube, daß er meinen Hrn. gefallen wird. In ersten theile proponire eine . . . die ad interim formire, aber als nur so obiter, daß manche nicht dencken werden, daß dieses vorhaben; in gantzen wercke aber erweise quod Nihil praestantius qualitate qua incognita quaevis per nos ipsos detegere valeamus et qua ratione haec acquirenda; hierzu gebrauche mich dreier principiorum, die nur als durch die experienz bekand annehme, nicht aber a priori et per suam propriam naturam nobis cognita, prout de his . . . . . crediderunt; die aber so indubitat, daß erweise daß auch rigorissimi Sceptici nicht hieran iehmahls gezweyfelt, und daß solche in ipso cursu Philosophiae demonstranda, quodque nec plura nec pauciora opus sint ad omnia quae cognosci possunt hinc deducenda; tantum praeambulum hic feci, ut existimes forte me nescio quae praestantia revelaturum. Sed ecce parturiunt montes et nascitur ridiculus mus; sunt equidem haec tria,

1. Quod conscius sim seu quod conscientiam habeam, sed ut dixi, hoc saltem mihi cognitum esse, ut primam aliquam et notissimam experientiam, non ut Cartesius vult, quod ideo conscium hoc esse, seu ut ille vocat cogitare, mihi res sua natura si cognita, imo magis cognita omnibus aliis rebus . . . . etenim hoc admodum obscurum esse, et non secus ac licet dolor mihi res experientia notissima res, interim natura ejus forte aeque obscura quam quid sit cogitatio. Hinc colliges quam magnus Haereticus factus fuerim in Philosophia Cartesii et Spinosae etc. 2dum Principium: Quod quaedam me bene afficiant, quaedam vero male. 3tio Quod quaedam concipere possum, quaedam nullo modo, licet omni modo id coner. Ich habe aber sonst was curieuses in ipso Tractatu gewießen, hoc nimirum, quod forte ne ullus somniavit quidem, quod Mechanicae curvae ex. gr. Cyclois, Quadratrix, etiam centra seu focos habeant, itidemque ut Geometricae, vel unum, duo, tria, quatuor centra atque sic in infinitum obtineant; doch habe das beste außgelaßen, theils daß mir die Zeit zu kurtz fiel es so zu elaboriren, daß aller andern objectionum hette begegnen können, als auch daß mir meine eigne speculationes (als wie meine eigne Kinder) so wohl gefielen, auch mich so new bedüncken, daß wen sie andern nicht so wohl gefallen, es mir nicht lieb geweßen sein würde. Es sind aber diese, erstlich quomodo (ut . . . . apti evadamus ad omnia) prima parentum educatio sit instituenda circa infantes; 2do in toto illo tractatulo exhibui saltem methodum, qua ratione a priori veritas sit investiganda seu a causis ad effecta, sed singularia credo me habere, qua ratione dato effectu sit progrediendum, hoc est causa ejus determinanda; 3tio id ipsum quod praesentibus literis desideras, Medicinam ad interim compositam habeo, sed tam singularibus et contrariis aliorum praeceptis refertam ut dubito num aliis possit vel eo nomine placere; interim tam certam ut pleraque in ipso meo corpore expertus fuerim, et certe hic tales experientias feci, ut credam quod pauci tale quid vellent in se suscipere; sed meo judicio nihil praestantius adhuc circa haec praestitum fuit. Haec tria forte ad talem perfectionem reducta erunt, ut Tibi praesens potero ostendere; nam ego certe hujus indolis sum, ut plerique Aurifabrorum qui non libenter opera aliis sua exhibent nisi ultimam limam expertia, praesertim tam oculato Judici, qualem Te expertus. Sie haben hier inwillens meinen Hrn. zwey curieuse experimenta, welche ehisten zu sehen hoffe, zu offeriren umb des Phosphori communication zu erhalten. Ich habe die composition von selbigen, wie sie Hr. Krafft an Hrn. Schullern communiciret, in meinen händen zu Amsterdam gehabt; sie ist oft uneröffnet, welches Hr. Krafft wohl nicht glauben wird, und habe diesen brieff (ob sie mir es schon erlaubet) deßentwegen nicht

erbrechen wollen, wiewohl sehr wohl gethan hette, den wen hier dies den König offeriret, ich würde mein vorhaben sehr facilitirt haben. Unlängst wurde mir diese quaestion proponirt zu solviren: Sit datus conus ABK, sitque data AB, DE, CF, invenire lineam FJ, ita ut Frustum Conicum EDGH sit duplum Frusti Conici ADEB. Scio, ridebis quod haec Tibi referam, sed talia quaeso non contemnenda proposita fuere a Chymico Mr Borello ad lapidem philosophicum inveniendum. Risum teneatis Amici, Conus enim EDGH carbonibus ad id repleri debet; hinc colligo Mathesin etiam Chymicis non inutilem. Dieser Mr Borelli wihl sein secretum die gläßer zu poliren noch nicht bekand machen. Bey Mr Clerselier bin 2 mahl geweßen, aber er ist so kranck, daß nicht vor ihn kommen, wihl dies was mein Hr. verlanget, noch vor meiner



abreise nicht unterlaßen ins werck zu stellen. Ich werde meine reise über Holland (da Hr. Hugens zu sprechen will) und Hamburg nach Hannover richten; wo etwas hier dienen kan, thue es sehr gerne. Von curieusen büchern ist mir nichts sonderliches bekand. Man continuiret hier das journal de la Medicine, welches viele bücher citiret, davon das Journal des Scavans nicht gedencket, welches als eine sehr nützliche sache .... schon bekand seyn wird. Wen exercitia hier in der Milice gehalten werden, bin offt anwesend gewesen, sonst weiß nichts, daß hiervon, wie solche eingerichtet, publick gemachet, außer was im l'estat de la France referiret wird, so aber mein Hr. vielleicht nicht verlanget. Eine Composition d'une Maniere d'Estain ainsi blanc etc. hatt mir mein Hr. selbst hier anwesend communiciret, und damahlen gedacht, daß sie sehr gutt; sonsten habe hier nichts erfahren können. Mr Comiers ist mir wohl bekand, so was von ihm erfahren kan, wihl es nicht unterlaßen. Es ist hier ein Engelländer, der vorgiebt, daß er den Phosphorum sehr leicht, und eine ziemliche quantität in einen vormittag bereiten könne; er verlanget 50 pistolen vor das Secret, welche man ihm auch geben wird, wie Mr Galloys gegen mir gedacht. Die probe hiervon habe ettlich mahl gesehen, man darff ihn sehr wenig agitiren, so zündet er gleich papier und leinwand an. Ich sehe nicht, was dies vor ein unterschied von einen continuirlichen fewer. Es hatt hier einer erfunden, wie man Steine pulverisirt und eine gewieße materie hierbey gethan, wird solche sich nicht anders schmeltzen laßen, als andere metall, und wen sie kalt, sehr hart werden. Er hatt eine Statue formiret (durch dieses Artificium) so er den König offeriren wihl, habe sie nicht können zu sehen bekommen. Monsr Thevenot hatt den letzten theil seiner Recueils des Voyages in 8tavo heraußgegeben, darinnen ettliche nützliche Problemata sehr

leicht solviret, e. g. Rendre plus exactement la valeur d'un degré en nos lieues ou mesures et par la resoudre le probleme de la mesure de la terre; was vormahlen die Alten, Snellius und M[r] Picart hierinnen gethan, ist bekand; er weiset an, daß alle diese keinen bequemen orth sich hierzu, und der ziemlicher größe, erwehlet, und daß keiner beßer hierzu als das Mare Balticum in Sueden, wen solches zugefroren; item Fixer la valeur de ces lieues ou mesures, en sorte que les autres Nations et la posterité les puissent entendre; er hat observiret, daß die bienen häusichen oder cellulae in gewieser anzahl genommen, an unterschiedenen orthen in Frankreich, allezeit eine gleiche größe außmachen; wo dieses in der gantzen weld so, so wehre es was rares und sehr nützliches, den bienen giebet es fast bey allen Nationen; dem sey wie ihm wolle, so hatt er doch andern anlaß gegeben zu dencken, ob nicht etwas in der Natur überal sein möchte, so die natur gleicher größe formire, und daß also vielleicht dieß noch vollkomner möchte können gefunden werden. Die invention, worvon mir mein Hr. einmahl schrieb, daß man fleisch und knochen so praepariren kan, daß alles beydes zu eßen tauglich, ist Hrn. Boyle invention; es ist hier durch schöne experimente in druck bekand gemacht und habe auch die machine, wodurch solches geschiehet, selbst gesehen. Wir werden mit ehisten 2 mathematische bücher haben: M[r] Rohaut opus posthumum, und Bullialdi ad Arithmeticam infinitorum; so viel aber bieshero noch hiervon zu gesicht bekommen, scheinet es nichts von groser wichtigkeit zu sein. Es ist hier à la rue Saint Jacques à l'escu de Venize gedruckt Recueil d'Arrest, Reglemens et ordonnances pour le Gens de Guerre in 4 voluminibus in 12 enthalten, so vielleicht sein wird, was von selbigen hiermitt verlanget wird. Le Chanoine de Dijon, so eine critique wieder le Pere Malbranche geschrieben, M[r] Foucher, so bei meinen Hrn. zu Paris ettliche mahl gesehen, hatt ein klein büchigen laßen in druck gehen de la Sagesse des Anciens. Duret ist nicht Author von der Astronomische Machine, sondern M[r] Romer Danus. Ich habe sie aber nicht sehen können, sie ist bey den Jesuiten au College de Clermont, obschon 2 mahl darnach gewesen, M[r] Duret hatt mir versprochen, seine inventa folgende woche zu zeigen. Übrigens gefellet mir auß dermaßen meines Hrn. speculation von der progression 1 2 4 8 16 etc. Dießes hat mich erinnert, daß Nepperus in einen kleinen büchigen in 12 das nicht vielen bekand und da schöne inventa enthalten, unter andern auch dieses hatt, da er weiset wie man in einen damen- oder Schachspiel, da auff den seiten an den fächern diese progression geschrieben, durch hülffe selbiger und gewießer reguln dadurch weiset, wie die Steine von brettspiel müßen geschoben werden, aller zahlen, die gegeben können werden, Addition, Subtraction, Multiplication, Division und extractionem radicum gantz leicht verrichten kan; dieses wird verursachen, daß solches curieuses nachsehen werde, welches mir schon vor vielen jahren, da es geleßen, sehr wohl

gefallen. Ich wüntschre, daß mir der Hr. in einen exempel gewiesen hette, wie er Tangentem determiniret $x^y + y^x \infty a$; worumb diesen methodum nicht gefolget die curvas so zu exprimiren, dieweil omnes curvas alia ratione gar leicht exprimiren kan, habe zu ander zeit gedacht, und ist in beygelegten zu ersehen, durch welcher expression hülffe aller curvarum non analyticarum seu transcendentium eadem facilitate Tangentes determino quam analyticarum. Daß man nicht alle zeit reciproce gehen kan in der gleichen problematibus, scheinet die ursache zu sein, quod infinitae curvae huic rei satisfaciant, quod inquiritur adeoque res indeterminata existit; wie man aber dergleichen quaestiones, da curvae infinitae diversae naturae satisfaciant, solviren kan, weiß noch zur Zeit kein mittel. So, ob es gleich leicht data curva invenire aliam, ubi ordinatim applicatae aequales Arcubus convenientibus hujus curvae, reciproce tamen res difficilis. Data enim Parabola, si curva hinc invenienda, cujus respective arcus aequales ordinatim applicatis hujus parabolae, forte infinitae hinc dantur curvae quae hoc efficiunt; non enim videtur probabile quod sola Cyclois huic rei tantum satisfaciat, et forte dantur quoque curvae Geometricae variae quae idem praestant. Sed non video ullam viam qua ratione hae curvae possint scientifice determinari; hoc problema admodum curiose persequebar olim, cum viderem, quod idem in spatiis tentares, cum mihi quoque in lineis res haec facilior visa. Sed haec omnia reliqui, cum viderem, datis omnium spatiorum Quadraturis omnia similia problemata facile determinari. Habemus autem ex sola descriptione curvarum Methodum omnia spatia quadrandi. Adeoque in eo totus fui, ut omnium curvarum tam Geometricarum quam Mechanicarum descriptionem simplicissimam quae in natura existit, exhiberem, quod credo me in tractatulo meo (de quo supra) praestitissse, prout hac de re fusius meam sententiam expositam ibi aliquando leges. Mr Krafft hatt mich perfect contentirt ob debitum Schülleri; ich werde selber mitt ihm deßentwegen außführlicher reden, indem von Hannover über Leipzig nach Dresden gedencke zu gehen; maxime inter me et Schullerum viguit semper disputatio, quod ego statuerem, quod ante omnia primum Regnum Dei seu Veritatis quaerendum, et quod nobis reliqua tunc adjiciantur, cujus ille contrarium ore et re defendebat quod ipsum perdidit. Nuhmero zu meinen Affairen . . . . *)

---

*) Tschirnhaus erwähnt, daß man in Paris das Geheimniß, wie er seinen Brennspiegel verfertigte, von ihm herauslocken wollte. Er bemerkt bei dieser Gelegenheit, daß er zuerst kleinere Brennspiegel aus Kupfer durch Hämmern und durch Politur mit Steinen hergestellt habe; alsdann habe er, da größere Kupferplatten zu haben seien, größere Brennspiegel anfertigen lassen mit Hülfe von Polirmaschinen.

Zugleich mit vorstehendem Schreiben übersandte Tschirnhaus das, was er der Pariser Akademie vorgelegt hatte:

Ea quae Societati Regiae communicavi, quia sic desideras, ea summariter referam; sunt autem haec tria: Prima est Methodus, qua Tangentes exhibeo tam curvarum Geometricarum quam Mechanicarum, unica et eadem regula, eaque tam facili, ut expeditior sit Slusiana, tamque universali, ut unica et eadem opera infinitarum semper curvarum tangentes determinantur.

2. Est Tractatulus brevis qui Artis inveniendi Generalia praecepta includit, qui forte Tibi non displicebit.

3. Sunt quaedam Dioptricam, Catoptricam et Geometriam spectantia, praecipua jam saltem hic commemorabo et prout ea communicavi l'Abbe de la Rocke:*)

1. Hactenus saltem puncta considerata, ubi radii solares incidentes in curvam quandam superficiem politam et reflexi coguntur in unicum punctum, ubi comburunt; ego vero ostendo qua ratione non solum unicum hoc punctum, sed integra aliqua curva quae ex hisce reflexorum radiorum intersectionibus oritur debeat concipi.

Sic in praesenti figura omnes MW, NW, OW, LW denotant incidentes radios solis,

NB, OC, PD, QE, RF etc. radios reflexos.

Indefinitae intersectiones fiunt in punctis A, B, C, D, E, F, G etc.

Polygonum hinc formatur constans ex lineolis AB, BC, CD, DE, EF.

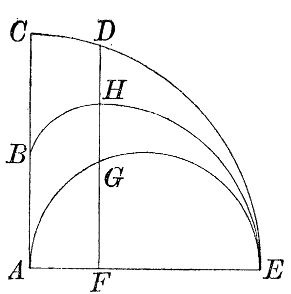
Si jam distantiae MN, NO, OP, PQ etc. indefinite parvae concipiantur, Polygonnm ABCDEF etc. repraesentabit curvam, cujus radii reflexi NA, OB, PC, QD etc. erunt Tangentes.

A punctum comburens seu focus.

2. Ostendi Methodum Generalem, qua ratione ejusmodi curvae ex reflexorum radiorum intersectionibus sic ortae possint Geometrice determinari, et in specie determino curvam quae in speculo caustico sphaerico a radiis solaribus formatur hac ratione: Dato quadrante ACDE, describatur semicirculus AGE; jam ducta quacunque FD parallela CA, secetur pars intercepta inter quadrantem CDE et semiperiph. AGE, nimirum DG bifariam in H et erit H punctum

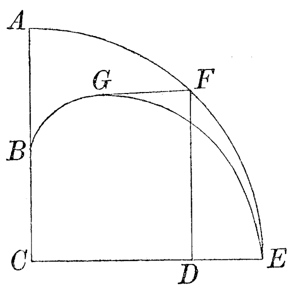
*) de la Rocque.

aliquod ex infinitis, ex quibus constat reflexorum curva BHE. Ex hac descriptione patet focum B esse in medio radii AC.



3. Novam hinc methodum exhibeo infinitas curvas mensurandi seu reducendi ad rectas his aequales per Generale hoc Theorema quod non ingratum tibi erit:

Si Radii solis DF incidant in quamcunque curvam (sive sit Geometrica prout Cartesius vocat, sive Mechanica ut Quadratrix, Cyclois etc. sive etiam libera manu formata) AFE et sic reflectantur ut harnm intersectiones curvam efficiant BGE, Radius incidens DF et reflexus GF semper aequales erunt curvae portioni GE quae intercipitur inter punctum Tangentis G et punctum E contactus curvarum.



Et per consequens CA et AB ubi incidens et reflexus coincidunt aequales esse integrae curvae BGE, sic ex. gr. in circulo curva illa BGE aequalis erit Radio CA et dimidio Radii AB.

Tractatulus haec tria continet: 1. Qua occasione et methodo in viam inciderim quam praestantissimam judico, ad quam in hac vita aspirare licet, quaeque est inventio veritatis per nos ipsos; 2do Artis inveniendi Generalia praecepta quibus adjutis non solum impossibile erit ut unquam in falsa incidamus, sed potius certo semper Veritatem simus cognituri, quod infallibiliter semper his mediis ulterius progrediemur nova ac nova continue detegendo, modo nos ad talia applicare animus nobis sit, idque exiguo labore. 3. In quo praecipue subjecto perscrutando vitam suaviter et cum oblectamento consumere liceat.

Methodus Tangentes Curvarum determinandi.

Sit Curva Geometrica BDE cujus natura, ut fieri solet, calculo expressa sit (BC supponatur ∞ x, CD ∞ y, AB ∞ z).

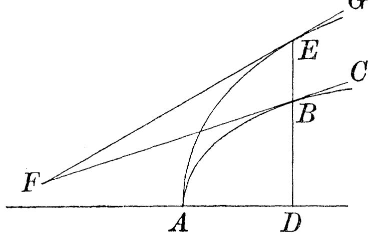
1. Termini aequationis exhibentes proprietatem curvae tali ratione disponantur, ut potestas maximaa y quae dari potest, sola sit ab altera parte aequationis (ex gr. $yy \infty 2ax - xx$) vel si ea desit, ponantur omnes termini aequationis aequales nihilo (sic $xy \infty aa$ redigitnr ad $xy - aa \infty o$).

2. Fiat Fractio cujus denominator hoc pacto constituatur: Omnibus terminis ubi cognitae (adhaerentes indeterminatis x et y) unius sunt

dimensionis, praefigatur unitas; ubi duarum dimensionum binarius; ubi trium dimensionum ternarius, atque ita porro.

3. Numerator vero ita construatur: Omnibus terminis, ubi x unius est dimensionis, praefigatur unitas, ubi duarum binarius, ubi trium ternarius, ablata vero ab omnibus hisce terminis x unica dimensione, eritque Fractio ejusmodi ∞ z.

Qantum jam ad Mechanicas curvas attinet notandum, me nullum discrimen videre inter eas lineas, quas Cartesius Geometricas appellat, et Mechanicas, nisi quod in Geometricis curvis x et y exprimantur per rectas lineas et in Mechanicis x et y curvarum partes seu Arcus designent (adeoque non capio justam esse rationem quare ideo a Geometria excludendae). Sic autem ego concipio eandem curvam ex.gr. yy ∞ 2ax — xx a Cartesio Geometricam dictam semper mihi infinitas curvas exhibere (sit ex. gr. curva quaevis ABC ejusque portio AB ∞ x et BE ∞ y; eadem nunc natura yy ∞ 2ax — xx mihi infinitas curvas repraesentat AEG, prout loco ABC alia et alia curva substituitur) harum vero infinitarum curvarum Tangentes una et eadem opera determino. Quaeratur enim juxta regulam modo datam, natura curvae data yy ∞ 2ax — xx, z ∞ $\frac{2ax}{2a-2x}$ seu z ∞ $\frac{ax}{a-x}$, huic addatur semper x et habitur $\frac{2ax-xx}{a-x}$; sique jam Tangens FB assumatur aequalis $\frac{2ax-xx}{a-x}$, dico quod ducta linea FE tangat curvam AEG in E, qualiscunque curva ABC etiam sit.



Atque sic tanta universalitate et expedita admodum ratione infinitarum curvarum Tangentes una et eadem opera semper exhibentur.

Beilage.

Das Folgende hat Tschirnhaus während seines Pariser Aufenthalts verfaßt:

Notandum.

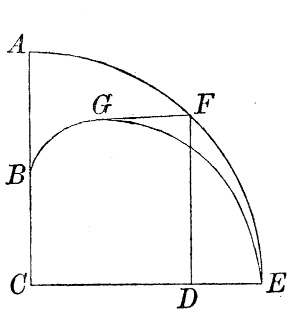
Haec quae jam demonstrare suscipio, si ea hac ratione tractanda essent ut solet a Veteribus, ultra modum prolixa evaderent, cum pleraque ex natura sua admodum composita sint, partim talia ut ea ad absurda deducere necesse sit, de quibus notum, similia non nisi longo circuitu posse demonstrari; qua propter cum tantum temporis jam mihi non suppetat ad talia exsequenda, alia hic assumam, quibus res haec

non minus accurate expeditur, quaeque existimo facile mihi concedentur a Mathematicis qui inter peritissimos nostri seculi jure recensentur et quorum patientia abuti tam longis ambagibus (licet temporis angustia non obstaret) inconveniens esse judico; Aliis autem qui similibus quae propono non adeo assueti, cum plus otii mihi concedetur, penitus quoque, si desideretur, satisfacere nullatenus recusabo.

Definitiones.

1.

Sit Curva quaecunque, Geometrica, Mechanica aut libera manu ducta BGE convexa ad rectam CE, huic curvae filum seu linea flexilis circumplicata intelligatur; jam una extremitatum hujus fili sit affixa in B, altera vero quae in E, ita moveatur ut semper in linea CE constituta sit, dumque sic existit in puncto aliquo intermedio lineae CE, veluti D, filum in F sic intendatur ut DF et FG rectas repraesentent, DF vero semper perpendicularis sit ad CE, curvam itaque AFE quae sic formabitur per puncta F, vocabo descriptam ex evolutione.



2.

Illa vero curva BGE cui filum circumplicatum erat, dicatur evoluta.

3.

Perpendicularis DF vocetur linea incidens.

4.

Altera vero linea GF linea reflexa.

Axiomata.

1.

Patet lineam reflexam FG continue tangere evolutam BGE in puncto G, adeoque quoque in puncto B, ubi incidens CA et reflexa AB coincidunt.

2.

Patet quoque curvas hasce, evolutam nimirum BGE et illam quae ex evolutione describitur AFE, se invicem tangere in puncto E.

3.

Patet lineam incidentem DF et reflexam GF simul sumptas aequari portioni evolutae GE quae intercipitur inter punctum G, ubi reflexa GF hanc curvam tangit (juxta 1. axis.) et punctum E, ubi hae duae curvae se invicem tangunt (jux. 2. d. ax.). Ex hypothesi enim hae

duae lineae DF et GF seu filum DFG antea circumplicatum fuit curvae portioni GE (jux. 1. definit.).

4.

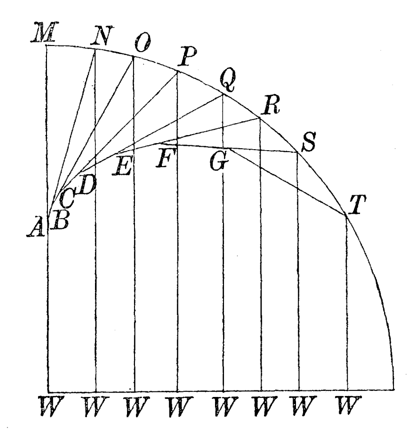
Eadem ratione patet incidentem CA et reflexam AB, ubi coincidunt, aequari integrae evolutae BGE.

5.

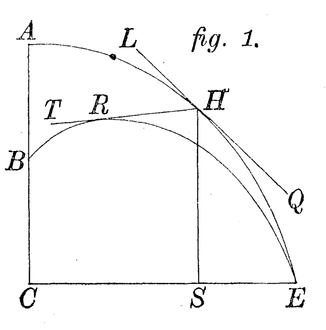
Curva quaecunque potest considerari ut polygonum indefinitorum laterum, quorum unumquodque latus lineam rectam indefinite parvam constituit.

6.

Si paralleli radii solis incidant in curvam, hi vel reflectentes ut coeant in unico puncto, prout notum hoc in parabola fieri, vel horum indefinitae ultimae intersectiones efficient polygonum indefinitorum laterum, seu quod idem, curvam quam radii reflexi tangent.



Sic in praesenti figura omnes MW, NW, OW, PW etc. denotant incidentes radios solis, NB, OC, PD, QE, RF etc. radios reflexos. Indefinitae intersectiones fiunt in locis A, B, C, D, E, F etc. Polygonum constat ex lineolis AB, BC, CD, DE, EF etc. Si jam distantiae MN, NO, OP, PQ etc. indefinite parvae concipiantur, polygonum ABCDEF etc. repraesentabit curvam, cujus radii reflexi NA, OB, PC, QD etc. erunt tangentes, et contra, curva quaecunque tangitur ab indefinitis lineis rectis, potest concipi sic determinata esse ab indefinitis intersectionibus harum.



Propositio 1. Theorema.

Linea LQ quae angulos LHR et QHS aequales facit, tangens erit curvae ex evolutione descripta AHE, in puncto H ubi incidens SH et reflexa RH concurrunt (vid. fig. 1).

Demonstratio.

Hic duo assumam quae jam dudum a Mathematicis demonstrata:

primum (vid. fig. 2) est, quod si curva sit ADG et ex dato puncto B rectae BD et DH, BE et EI, BF et FK etc. semper sint constanti quantitati aequales, quod haec curva sit parabola.

2do quod in parabola ADG linea LM sic ducta ut anguli LDB et HDM sint aequales, eandem tanget in puncto.

fig. 2.

Hisce sic positis (vid. fig. 3) sint AC et CI rectae ad angulos rectos conjunctae in C et sit polygonum ex lineis BQ, QM, MI, IC, CB; jam intelligatur tribus lateribus BQ, QM, MI sic applicatum filum, ut in B affixum sit, in I autem concipiatur sic evolvi prout hoc in 1. definitione de evoluta quacunque ostendi; dico curvam quae hic ex tali evolutione describetur AOLI constare ex tribus portionibus AO, OL, LI curvarum Parabolicarum quae pro centris habent tria puncta B, Q, M, quod sic ostendo. Dum enim filum sic evolvitur, semper rectae MK et KH aequales rectae lineae MI usque ad punctum L, ubi ML et QM rectam lineam constituunt et per consequens cum MK et KH, item ML et LG semper sint aequales constanti quantitati, curva LKI erit (per primum assumptum) portio parabolae cujus centrum seu focus in M.

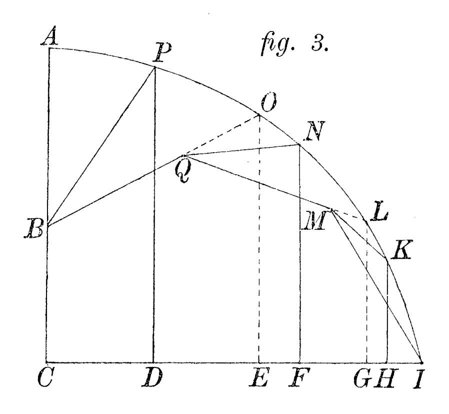


fig. 3.

Porro dum filum hoc jam ulterius concipitur evolvi, semper QN et NF aequantur rectis lineis QM et MI ex hypothesi usque ad punctum O, ubi OQ et QB rectam lineam efficiant et per consequens cum QN et NF, item QO, OE etc. semper constanti quantitati aequales, curva ONL erit portio Parabolae (per 1. assumptum) cujus Focus in Q. Eadem ratione demonstratur curvam AO esse parabolam cujus Focus in B, quia assumpto puncto ad libitum P, hinc rectae BP et PD semper sunt aequales tribus rectis BQ, QM, MI, hoc est constanti quantitati.

Porro in hisce portionibus Parabolarum AO, OL, LI, hoc est in tota curva AOLI, quae ex evolutione trium linearum BQ, QM, MI describitur, Tangens semper aequales angulos cum incidente et reflexa facit (per 2d. assumpt.); jam vero hoc idem semper fit non solum cum tres rectae assumptae, sed quotcunque sint et cujuscunque longitudinis,

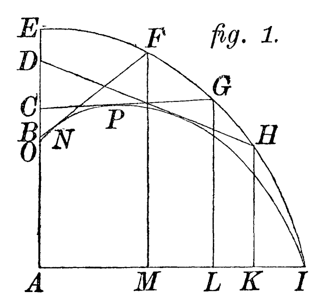
ut facile patet ex modo ostensis. Quod nimirum totidem portiones Parabolarum hinc describentur et quod proinde in integra semper evoluta tangentes aequales angulos cum recta incidente et reflexa faciunt, patet per consequens quod hoc idem fiet in polygono indefinitorum laterum, hoc est (per 5. axio. vid. 1. fig.) in curva AHE quae ex evolutione describitur, quoque Tangens LQ angulos semper aequales efficiet LHR et QHS cum incidente SH et reflexa HR. Q. E. D.

Propositio secunda. Theorema.

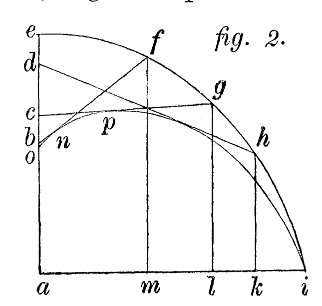
Sit curva quaecunque data (vid. 1. fig. in praecedenti propos.) AHE et Tangente LQ; formetur hinc alia curva BRE his conditionibus, ut anguli LHR et QHS sint continue aequales, omnes incidentes SH perpendiculares ad CE et reflexae HR Tangentes semper curvam BRE in aliquo puncto ex. gr. R; dico curvam hanc BRE evolutam esse.

Demonstratio.

Sit data curva ONPI (vid. 1. fig.) quam evolutam vocamus; formetur hinc (juxta 1. defin.) curva ex evolutione descripta EFGHI et tunc ex hypothesi lineae MF, LG, KH (quae ut parum a se invicem distantes concipiendae, licet res haec in figura aliter expressum (sic!) quo haec etiam aliquo modo ipsis oculis subjiciantur) erunt perpendiculares AI; jam FB, GC, HD reflexae ita dispositae sunt, ut anguli incidentiae et reflexionis sint aequales, quaeque proinde lineae FB, GC, HD (ut facile patet) se intersecabunt et linea intersectionis erit NP



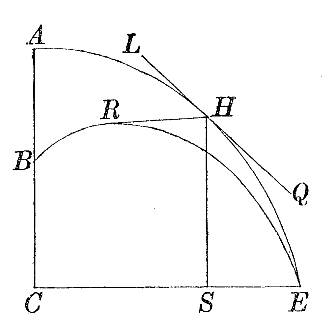
quae (juxta 5. axio.) ut latus Polygoni concipiendum, cujus omnia latera curvam ONPI seu evolutam constituunt. Hisce sic positis (vid. 2. fig.) assumatur jam reciproce curva ex evolutione descripta (eadem nimirum quae antea per evolutam ONPI formata) efghi tanquam data et assumatur am, al, ak aequales AM, AL, AK et fiant hinc perpendiculares mf, lg, kh, quae necessario aequales erunt lineis (in 1. fig.) MF, LG, KH (cum efghi eadem sit curva quam EFGHI per suppositionem); ducantur jam lineae fb, gc, hd ita ut anguli incidentiae et reflexionis sint aequales (quod certe fieri potest, cum curva efgh una cum Tangentibus positione data) hae lineae itaque fb, gc, hd necessario aequales erunt lineis FB, GC, HD in 1. fig. (cum utrobique eadem et aequalia assumpta adeoque eadem hic et aequalia necessario inveni-



antur) et per consequens intersectionis linea np aequalis erit NP. Quod autem jam in particulari demonstravi de particula np, quod necessario aequetur particulae NP, hoc idem de omnibus particulis indefinite parvis curvae onpi demonstratur et per consequens curva onpi necessario eadem curva erit quam ONPI, hoc est, cum ONPI sit evoluta per hypothesin, onpi evoluta erit reciproce per constructionem curvae cfghi. Q. E. D.

Propositio tertia. Theorema.

Si radii solis SH incidant in quamcunque curvam AHE, sive sit Geometrica, Mechanica aut libera manu ducta, et sic reflectantur ut harum intersectiones curvam efficiant BRE; dico quod radius incidens SH et reflexus HR simul sumpti aequentur curvae portioni RE quae intercipitur inter punctum Tangentis R et punctum E contactus curvarum.



Demonstratio.

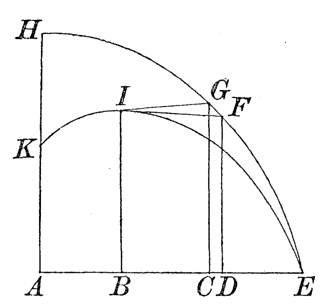
Solis enim radii incidentes SH (qui paralleli concipiuntur ab omnibus Mathematicis) et reflexi HR efficiunt angulos aequales SHQ et LHR (prout ex dioptricis notum) radiorum autem reflexorum intersectiones efficiunt (juxta 6. axio.) curvam BRE quae ubique tangitur a reflexis radiis HRT in R; hinc ideo curva haec (juxta 2. propos.) evoluta erit curvae AHE, in qua (juxta 3. axio.) RH et HS aequantur curvae portioni RE. Q. E. D.

Corollarium.

Hinc integra curva BRE ex reflexorum radiorum intersectionibus determinata aequalis erit (juxta 4. axio.) rectis CA et AB.

Propositio quarta. Problema.

Exhibet Methodum Generalem, qua ratione data curva quaecunque HGFE, modo natura ejus aequatione aliqua possit exprimi (sive curvarum portiones ingrediantur, vel uti fit in Mechanicis sic dictis, sive non) omnia ejus puncta respiciente, hinc semper determinari possit evoluta KIE.



Solutio.

Sint duae incidentes quaecunque rectae DF et CG, reflexi FI et GI in certo puncto concurrent I. Data itaque aequatione quae curvae

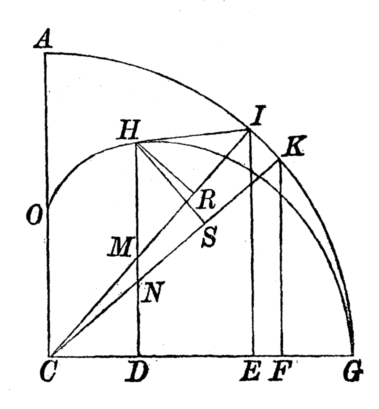
HGFE naturam exprimit et distantia CD necessario semper, cum punctum I determinatum, aequatio inveniatur, quae indeterminatas AB, BI et distantiam CD includet; si itaque in hac aequatione CD aequalis ponatur nihilo et omnes termini ideo per eandem multiplicati auferantur, obtinebitur aequatio, in qua rectarum AB et BI relatio ad invicem explicabitur, hoc est, locus determinabitur omnium intersectionum I, quae sic a duobus reflexis indefinite parvo intervallo distantibus fiunt, et per consequens curvae KIE natura data seu determinata erit. Q. E. Inveniendum.

Corollarium.

Hinc data curva Geometrica HGFE invenietur quoque curva Geometrica pro evoluta KIE, quaeque proinde tam integra quam quoad omnes partes erit mensurabilis per 3. et 4. axio.

Propositio quinta. Problema.

Dato quadrante Circuli AIKG, invenire evolutam OHG, seu curvam OHG determinare quae in speculis sphaericis comburentibus formatur ab intersectionibus reflexorum radiorum solis.



Solutio.

Sit radius CG ∞ a, CF ∞ x, FK ∞ y, CD ∞ t, HD ∞ z, EF ∞ o, EI ∞ u. Jam CE ∞ x — o. Sint HS et HR perpendiculares ad CI et CK.

1. Ex natura circuli erit $aa \infty xx + yy$, 1 aequatio,
2. propter eandem naturam $aa \infty xx - 2ox + 4oo + uu$, 2da aequat.
3. propter triang. simil. CFK, CDN, HSN erit

$$\left.\begin{array}{l}1.\ \text{ut CF ad FK sic CD ad } z \infty \text{DH} \\ \quad x \quad \pi \quad y \quad \pi \quad t \quad \pi \ \frac{ty}{x} \infty \text{DN}\end{array}\right\}\ \text{subtrah. et erit } \frac{xz - ty}{x} \infty \text{HN}.$$

$$\left.\begin{array}{l}2.\ \text{ut CF ad CK sic CD ad } a \infty \text{CK} \\ \quad x \quad \pi \quad a \quad \pi \quad t \quad \pi \ \frac{at}{x} \infty \text{CN}\end{array}\right\}\ \text{sub. et erit } \frac{ax - at}{x} \infty \text{KN et}$$

hinc dimidia NS ∞ $\frac{ax - at}{2x}$

3. jam FK CK NS HN

$$y \;\pi\; a \;\pi\; \frac{ax - at}{2x} \;\pi\; \frac{xz - ty}{x}$$ atque hinc extrema et intermedia multiplicando obtinetur aequatio tertia $aax - aat \infty 2xyz - 2tyy$.

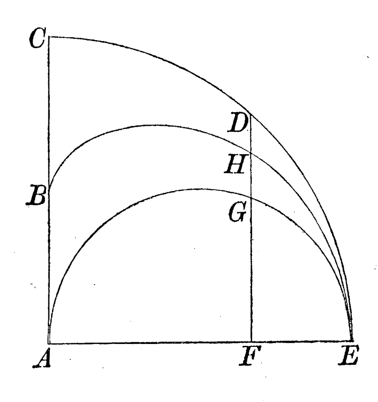
4. Eadem prorsus methodo propter triangula similia CEI, CDM, HRM invenietur aequatio quarta

$$aax - aao - aat \infty 2xuz - 2out - 2tuu.$$

Cum itaque jam quatuor aequationes habeamus et 6 indeterminatas, poterunt hae omnes redigi ad unam, ubi t, z et o et hinc 3 saltem indeterminatae existent. Sique porro omnes termini, ubi o, auferantur juxta ea quae 4. propos. dixi, obtinebitur Aequatio, in qua solae indeterminatae t et z seu CD et DH existunt; haecque curva OHG seu quae ex reflexorum radiorum indefinitis intersectionibus oritur, naturam applicabit. Inveni autem sequentem aequationem $16z^4 \infty 8aazz - 16ttzz + 8atzz - aatt - a^4 + 2a^3t$, unde $4zz \infty aa - 2tt + at + 2\sqrt{t^4 - 4aatt + 4a^3t - 4at^3}$, et $2z \infty \sqrt{aa - tt} + \sqrt{at - tt}$.*)

Corollaria.

1.



Hinc facilis descriptio hujus curvae efficitur. Dato enim quadrante ACDE describatur semicirculus AGE; jam ducta quacunque FD parallela CA secetur pars intercepta inter quadrantem CDE et semiperipheriam AGE, nimirum GD bifariam in H et erit H punctum aliquod ex infinitis, ex quibus constat reflexorum curva BHE.

2.

Patet hinc focum seu punctum combustionis esse in B, medietate radii AC.

3.

Patet etiam integram reflexorum curvam BHE aequari Radio AC et dimidia parte radii CB (juxta coroll. prop. 3. et axio. 2dum modo relatum).

---

*) Die von Tschirnhaus aufgestellte Gleichung ist unrichtig; sie ist vom 6. Grade, nämlich $\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{2z}{a}\right)^2 + \left(\frac{2t}{a}\right)^2 - 1\right\}^3 = \left(\frac{3t}{a}\right)^2$.

4.

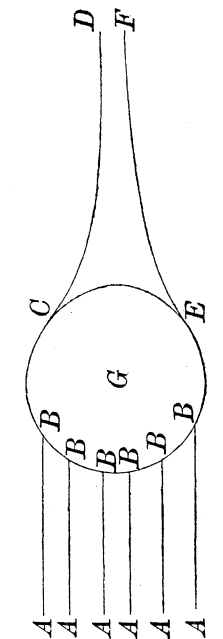
Patet quadrantem ACDE esse ad spatium ABHE duabus rectis AB, AE et reflexorum curva BHE comprehensum ut 4 ad 3.

Hisce autem, ut breviter omnia comprehendam, haec praestisti:

1. Hactenus saltem puncta considerata, ubi radii solares incidentes in curvam quandam superficiem politam et reflexi coguntur in punctum ubi comburunt; Ego vero ostendo, qua ratione non solum unicum hoc punctum, sed integra aliqua curva quae ex hisce reflexorum radiorum intersectionibus oritur, debet concipi.

2. Ostendi Methodum Generalem, qua ratione, data quacunque curva, modo natura ejus aequatione aliqua possit exprimi, omnia ejus puncta respiciente, ejusmodi curva quae talibus intersectionibus oritur, possit Geometrice determinari, et in specie determino curvam quae in speculo caustico sphaerico a radiis solaribus formatur.

3. Novam hinc Methodum exhibeo infinitas curvas mensurandi seu reducendi ad rectas ipsis aequales.

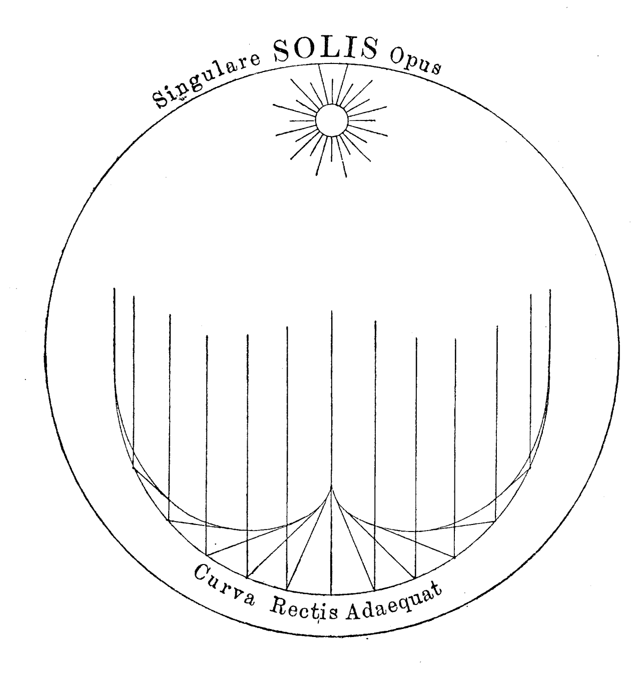


4. Jam possem ulterius progredi et ostendere quod etiam radii solares AB, postquam pellucidum aliquod corpus G transierunt, sic refrangantur, ut horum intersectiones curvas efficiant CD, EF (nam ipsis oculis subjiciuntur aqua calida multum exhalante hisce supposita aut pulvere radiis insperso, cum iridis colores exhibeant) possem easdem determinandi methodum tradere atque hic quoque curvas rectis aequales producere; verum qui quae modo tradidi et mensuram refractionum a Cartesio exhibitam, haec utique quoque in potestate habet eruendi

Atque sic mihi videor novum campum aperuisse ad infinita nova ex hisce fundamentis deducendi, quae tam Geometriam quam Catoptricam et Dioptricam infinitis inventis ditabunt.

Dum vero admirarer quod inter singularia effecta solis etiam hoc sit, ut tam expedite curvas in rectas transmutat, quod ab acutissimis Mathematicis magno labore semper quaesitum, et reflecterem ad Emblemata quae a multis excogitata in honorem Regis Vestri, qui stupendis suis actionibus Toti Mundo se admirabilem praestat, allusione facta ad solem quem sibi pro symbolo elegit, observavi, quod Alii magna subtilitate

ingenii sui produxerunt, mihi se ultro obtulisse ex detecta tam singulari proprietate solis, adeo ut saltem quae modo retuli in praesente Schemate repetere opus habeo, applicatione tam obvia ut explicatio hic ulla superflua esse videatur.



XVII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Desselben sehr werthes vom $\frac{13}{23}$ Maji habe nach meiner rückkunfft vom Harz alhier gefunden, also daß ein paar posten verstrichen, ehe ich solches erhalten und beantworten können. Ich verhoffe, es werde sich alles unterdessen wohl angelaßen haben, zumahlen weil der Hr. Abbé Galloys sich der sache angenommen, welcher bey dem Hr. Colbert viel gilt und von Leuten urtheilen kan. Kan der Proceß des phosphori dazu etwas helffen, so wird mir es gewündscht seyn, wie ich ihn denn hiermit schicke. Den Phosphorum aber selbst zu schicken ist mir unmüglich, weil ich schohn vorlängst nichts mehr davon habe,

nachdem ich an unterschiedtliche davon geschickt, und ein schöhn stück, so ich dem Herzog zeigen wollen, ohngefehr in der Hand durch die bewegung in des Herzogs gegenwart angezündet, wie M. Hr. aus meinem vorigen schreiben an M. de Mariotte wird ersehen haben, denn ich begehrt er solte es M. Hrn. communiciren, weil unterschiedtliches (sein problema und anderes betreffend) darinn enthalten, damit ich es nicht zweymahl zu schreiben von nöthen hätte. Was ich vor einem halben jahr vom phosphoro noch übrig hatte, habe ich meinem Diener geben, welcher in Dennenmark geruffen worden den phosphorum alda zu zeigen und zu machen, denn Prinz George der die materi alhier gesehen seinem Bruder, dem Könige, davon referiret gehabt. Wie ihn denn der König aniezo, nachdem er solchen phosphorum in ziemlicher copia gemacht, in Dienste genommen, und habe ich ihm geschrieben mir ein stücklein zu schicken.*)

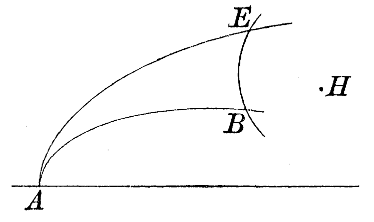
Unter denen Academicis wird M. Hr. den Abbé Mariotte den ehrlichsten und aufrichtigsten zu seyn finden. So hat er auch ein sonderlich talent die natur zu untersuchen, artliche experimenta auszufinden und deren ursachen zu errathen. Aber mit metaphysicis und Analyticis bemühet er sich nicht.

M. Hrn. tractat werde zweifelsohne mit sonderbarer Lust und Nuzen lesen, und ersehe gern bereits aus dem so M. Hr. davon gedencket, daß er nunmehr von einigen aus Cartesio und Spinosa gezogenen praejudiciis befreyet, dagegen ich unterschiedtlich mahl geprediget, inmaßen ich allezeit davorgehalten, neque cogitationem neque extensionem esse notiones primitivas aut perfecte intellectas. Was sonst M. Hr. in seinem tractat de educatione, de inquisitione veritatis, und de Medicina ut ita dicam provisionali hat, solches wird zweifelsohne treflich und nüzlich seyn. Das Zinn dessen composition mich erinnert M. Hrn. communicirt zu haben, ist zwar hart und klinget wie silber, aber es ist nicht so schöhn weiß. Die invention, die Beine weich zu machen, ist meines wissens nicht von M. Boyle, sondern von M. Papin, so von M. Hugens sich zu M. Boyle begeben. Die Manier die steine mit einem zusaz zu schmelzen, daß sie kalt wieder harte werden, ist etwas sonderliches und wißenswürdiges. Von Herrn Rohaut opere posthumo so . . . . Geometricum erinnere mich ehemahlen gehöhret zu haben, glaube nicht, daß es was sonderliches. Hr. Bullialdus hat mir vor diesem selbst gedacht von seiner Arithmetica infinitorum, befinde aber daß er meist proportiones jam notas et quas Wallisius in seinem opere gleiches titels per inductionem gegeben, demonstriret. Wenn M. Römer autor von der Machina Astronomica, so wundert mich daß das Journal des Sçavans nicht sein, sondern Turets gedencket.

---

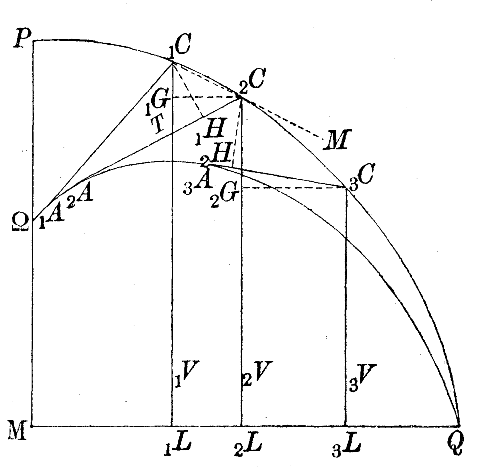
*) Hiernach ist die betreffende Notiz in Guhrauer's Leben Leibnizens Thl. 1. S. 198 zu berichtigen.

Die Progressio Bimalis würde sonderlich ad expressiones quantitatum in numeris nüzlich seyn, denn es prima und simplicissima, und zweifle nicht daß sich darinnen viel harmoniae finden würden, so in andern progressionen nicht also zu spühren. Der bekandte Methodus, Tangentes zu determiniren, läßet sich zwar auch gewissermaßen ad Transcendentes Curvas appliciren, wie M. Hr. gethan, wenn die curva per arcum alterius curvae nach der von ihm gesetzten art determinirt; alleine die curvae transcendentes werden offt gar anders exprimirt, als gesezt daß sowohl x als y lineae curvae werde, würde schohn die von M. Hrn. gegebene manier in etwas geändert werden müßen. Mein Methodus deucht mich sey generalior und compendiosior, wenn auch gleich die transcendens gar nicht per arcus curvarum, sondern auf viel andere weisen determiniret. Und were guth, wenn man allemahl ein mittel finden köndte curvam Transcendentem alia ratione determinatam determinare per linearum rectarum vel curvarum inter se relationem. Die curvae Transcendentes per aequationem transcendentem determinatae, als wie diese $x^y + y^x$ aequ. a, laßen sich nicht leicht ad determinationes per arcus curvarum reduciren, doch ist es möglich, wiewohl es nicht ganz ausgemacht. Mein Methodus Tangentium generalissima ist auch diesen aequationibus gemein; der methodus deßen man sich pro aequationibus Algebraicis seu communibus bedienet, ist nur ein corollarium hujus methodi generalissimae, welche ist eins von den dingen, die mir am meisten mühe gekostet, und habe fast desperieret dazu zu gelangen, habe auch fast keinen weg gesehen. Daß foci oder umbilici auch in transcendentibus statt haben, daran habe nie gezweifelt, man müße aber anstatt filorum rectorum, wie in Ellipsi et Hyperbola ex focis describenda, sich fila curva secundum certas leges, deren summa oder differenz zusammen eine datam quantitatem etc. mache, einbilden. Im übrigen damit M. Hr. sehe, daß ich aus meinem Methodo sowohl den von selbigem gesetzten casum, als auch noch andere determiniren könne, so schwehrer scheinen, so will ich setzen, AB sey x, und BE sey y, und aequatio yy aequ. 2ax — xx, es sey aber auch BE eine als zum exempel arcus circuli centro fixò H, radio HB descriptus; gesetzt nun AB sey zum exempel curva Ellipseos datae, so wird mir doch allezeit unschwehr seyn mea Methodo



curvae AE tangentem zu finden; wiewohl die constructio, die M. Hr. tanquam generalem gegeben, sich hieher meines ermessens nicht würde appliciren laßen. Unterdeßen bleibt gleichwohl die von M. Hrn. gegebene construction (eo casu quo BE est recta et semper parallela) sehr ingenios und nüzlich. M. Hrn. theorema de curva quam radii solares a speculo concavò reflexi tangunt, ist auch sehr schöhn; weil aber M. Hr. mir solches data opera

obscure proponiret und die demonstration zweifelsohne wegen kürze der zeit nicht geschicket, auch andere zu Paris sie nicht finden können, als habe versucht, ob ich sie köndte treffen, so auch erfolget, davon M. Hrn. will urtheilen lassen.



Si radii paralleli incidant in speculum concavum PCQ atque inde reflexi curvam ΩAQ tangant, dico integrum radium ex directo LC (qui sumitur ex basi MLQ radiis normali) et ex reflexo CA compositum fore aequalem arcui curvae QA.

Demonstratio. Positis intervallis punctorum $_1C$, $_2C$, $_3C$ infinite parvis agantur ex $_2C$ ad $_1C_1L$ vel ex $_3C$ ad $_2C_2L$ etc. normales $_2C_1G$, $_3C_2G$ etc., et similiter ex punctis $_1C$, $_2C$ etc. ad rectas $_1A_2C$, $_2A_3C$ etc. normales $_1C_1H$, $_2C_2H$ etc. Jam $_1C_2C$ producatur ultra $_2C$ in M; cum, ob intervallum $_1C_2C$ infinite parvum, $_1C_2C$ latus polygoni indefinitanguli considerari possit ut portio tangentis, ideo anguli incidentiae $_2C_2LM$ et reflexionis $_1C_2C_1A$ erunt aequales; est autem angulus $_1L_1C_2C$ aequalis angulo $_2L_2CM$, ergo et angulus $_1L_1C_2C$ aequalis angulo $_1C_2C_1A$, seu Triangulum T_1C_2C erit isosceles (posito T puncto intersectionis rectarum $_1A_2C$ et $_1C_1L$) itaque recta $_1C_1H$ aequalis rectae $_2C_1G$, et proinde et recta $_1C_1G$ aequalis rectae $_2C_1H$. Jam ex methodo infinite parvorum, quia $_1A_1C$ et $_1A_1H$ differentiam habent infinite parvam, hinc recta $_1C_1H$ nihilo differe censenda est a chorda arcus centro A radio A_1C descripti, qui rectam $_1A_2C$ secare censendus est in $_1H$ (demonstrari enim posset, si esset opus, differentiam inter $_1C_1H$ sinum et dictam chordam arcus, cujus est hic sinus, esse infinities infinite parvam seu ipsarum infinite parvarum ut $_1C_1H$ comparatione infinite parvam sive nullam). Erit ergo $_1H_2C$ differentia rectarum $_1A_1C$ et $_1A_2C$ sive $_1A_2C - {}_1A_1C$ erit aequ. $_1H_2C$, id est (per praecedentia) $_1C_1G$. Jam in recta $_1C_1L$ versus $_1L$ sumatur $_1C_1V$, et in recta $_2C_2L$ sumatur $_2C_2V$, et ita porro, ita ut $AC + CV$ sit aequalis curvae QA, nempe $_1A_1C + {}_1C_1V$ aequ. curvae Q_1A, et $_2A_2C + {}_2C_2V$ aequ. curvae Q_2A, ostendam punctum V semper incidere in L. Nempe erit $_1A_1C + {}_1C_1V - {}_2A_2C - {}_2C_2V$ aequ. curvae Q_1A — curv. Q_2A, id est aequ. $_1A_2A$. Ergo $_1A_1C - {}_2A_2C + {}_1C_1V - {}_2C_2V$ aequ. $_1A_2A$. Et autem $_2A_2C$ aequa. $_1A_1H$ (seu $_1A_1C$) + $_1H_2C$ (seu $_1C_1G$) — $_1A_2A$, quem valorem ipsius $_2A_2C$ substituendo in valore ipsius $_1A_2A$ aequatione proxime praecedente expresso, fiet

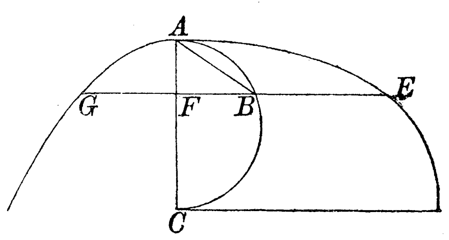
${}_1A_2A$ aequ. ${}_1A_1C - {}_1A_1C - {}_1C_1G + {}_1A_2A + {}_1C_1V - {}_2C_2V$, et destructis destruendis fiet ${}_1C_1G$ aequ. ${}_1C_1V - {}_2C_2V$. Similiter erit ${}_2C_2G$ aequ. ${}_2C_2V - {}_3C_3V$, et ita porro. Atque ita rectae CG sunt differentiae perpetuae ipsarum CV; sed eaedem sunt etiam differentiae perpetuae ipsarum CL, nam ${}_1C_1G$ est ${}_1C_1L - {}_2C_2L$, et ${}_2C_2G$ est ${}_2C_2L - {}_3C_3L$, et ita porro. Quod fieri non posset (quemadmodum demonstratu facile est) nisi CV et CL respondentes perpetuo coincidant. Ergo $AC + CL$ (loco $AC + CV$) aequ. curvae AQ, quod erat demonstrandum. Haec demonstratio Tibi quidem facilis erit, sed non cuivis alteri in his Methodis non versato.

Aus meinem vorigen wird M. Hr. ersehen haben, daß ich viel in dioptricis meditiret und das problema solviren könne: data curva invenire aliam, quae radios parallelos per priorem transeuntes refringat in unum punctum; und daß ich finde, daß M. Hrn. curvae ebenmäßig dienen das problema zu solviren: dato speculo concavo invenire aliud speculum concavum, quod radios solares a priore reflexos iterum reflectat ad unum punctum. Herr Hugenius kan diese problemata auch solviren, wie er mir geschrieben, aber wie ich glaube auf einen ganz andern weg. Die curvas ad quas omnes radii sunt perpendiculares, vel quas omnes radii tangunt, nennete ich communi nomine Aclasticas; weil ich aber nicht ad particularia komme und sonderlich nur dioptrica als difficiliora damahls untersucht gehabt und mich contentirt generalem methodum zu haben, so bin ich auff dergleichen schöhne theoremata, wie M. Hr. nicht kommen, welches gemeiniglich meine ungedult verursacht, denn indem ich Methodum generalem meine gefunden zu haben, laße ich es liegen. Dieß aber habe ich nicht gewust, daß man so leicht rectas his curvis, so M. Hr. beschrieben, aequales geben könne; muß einmahl untersuchen, ob es in dioptricis auch angehe. Indem ich dieses schreibe, nehme ich die feder in die hand solches zu versuchen, und finde daß es auch angehe und komt ein herrlich theorema generale heraus. Fiat CV ad CL, ut sinus anguli reflexionis vel refractionis ad sinum anguli incidentiae (quae ratio in eodem medio refringente vel licet cum detorsione quadam reflectente semper eadem est) eritque $AC + CV$ aequalis curvae QA. Ubi patet in casu refractionis curvam AA esse trans curvam CC, in casu autem reflexionis ordinariae, cum angulus incidentiae et reflexionis aequales sunt, coincidunt CV et CL, quod est theorema tuum, sed sine quo generale istud mihi non facile in mentem venisset*).

Quod attinet problemata Methodi Tangentium inversae, ea quamdiu solvere non poterimus, imperfecta censenda est Geometria Danda autem opera est, ut tum aequationes, tum descriptiones hujusmodi

*) Nil refert an CL sint parallelae, an vero ad unum punctum concurrentes, si scilicet ${}_1L$, ${}_2L$, ${}_3L$ etc. coincidant. Bemerkung von Leibniz.

linearum reperiri possint. Nec Tibi assentior, quod hujusmodi problemata sint indeterminata. Nam in illo ipso exemplo Cycloidis quod attulisti, certo calculo invenire possum, curvam AE cujus arcus aequalis duplae chordae AB, vel ordinatis FG parabolae AG, necessario esse cycloidem. Hoc ipso enim momento calculum tribus fere lineolis peregi et curvae quaesitae determinationem (si Cycloidem esse ignoravissem) inveni; quoniam tamen methodos istas nondum plane excolui, ideo non semper ita promte rem conficere possum. Non enim semper problemata hujusmodi reducuntur facile ad Quadraturas: neque etiam semper facile est, lineas quae determinantur per quadraturas determinare per descriptiones seu per linearum curvarum in rectas extensiones, denique nec facilis est transitus a determinationibus Geometricis per linearum spatiorumque magnitudines ad analyticas per aequationes transcendentes, vel contra. Et haec tamen supersunt ad perfectionem Transcendentis Geometriae.



Curvas, quas radii reflexi vel refracti tangunt, calculo Geometrice determinare non difficile est ea methodo, de qua nuper in literis nescio an ad Te an ad Mariottum scripseram, ponendo puncta ${}_1L$, ${}_2L$, ${}_3L$ designabilem distantiam semper si lubet aequalem habere, et quaerendo per calculum puncta, quibus radii reflexi ${}_1C_1A$ et ${}_2C_2A$, item ${}_2C_2A$ et ${}_3C_3A$ etc. se secant, deinque ponendo quantitatem ${}_1L_2L$ vel ${}_2L_3L$ etc. infinite parvam seu nihilo aequalem, evanescet pars calculi, et habebitur quaesitum. Sed non dubito quin egregia compendia pulchrasque constructiones complures deprehenderis, si quidem ei rei incumbere voluisti.

Pulcherrima sunt quae de speculis concavis cupreis communicasti, quae aliquando penitus intelligere gratissimum erit.

Phosphori Proceß komt hierbey. Solchen werde, so lange M. Hr. mir nicht den ausgang seiner sach meldet, nicht communiciren, zumahlen sie mir noch nicht geschrieben, was sie mir vor curiosa experimenta dafür communiciren wollen. M. Hr. wird solche doch auch leicht erfahren, und werde ich sie also durch ihn bekommen, hat also M. Hr. vom phosphoro nach seinem belieben zu disponiren. Nur dieses muß bekennen, daß den phosphorum zu machen, eine ziemlich beschwehrliche arbeit, und muß man sonderlich bey der letzten arbeit zusehen, daß die retorte nicht springe. Des Mons. Boyle weg ist etwas kürzer, aber wie ich aus seiner beschreibung sehe, so fehlet er ihm bisweilen, gibt auch keinen so starken phosphorum, und überdieß so ist er nicht instructif, denn er weiset nicht analysin subjecti et ex qua ejus parte potissimum veniat phosphorus. Zweifelsohne ist M. Boyle darauff gefallen, weil ihm der phos-

phorus imperfecte communiciret worden. Schicke hiermit beyde processus, sowohl wie ich es gemacht, als wie M. Boyle.

Compositio des Feuers oder pyropi. Habe genommen urin so eine zeitlang gestanden, etwa eine tonne (wiewohl ich zweifle, ob solche fermentation oder putrefaction nöthig sey, weil mein Diener in Coppenhagen den phosphorum noch selbige woche, als er hinkommen, gemacht) kochet es ab bis es beginnet dick zu werden, wie ein dicker sirup, alsdann thut man diesen dicken urin in eine retorte, läßet das phlegma und volatile vollends wegrauchen, und wenn rothe tropfen zu kommen beginnen, leget man einen recipienten vor, und empfäugt darinn das oleum urinae. Alsdann schlegt man die retorte in stücken, darinn findet man ein caput mortuum, dessen untertheil ist ein hartes salz, so hieher nicht dienet, das obertheil ist eine schwarze lückere materi, die hebt man auff. Das oleum urinae thut man wieder in eine retorte und ziehet alle feuchtigkeit starck davon ab, so findet man in der retorte eine schwarze lückere materi der ieztgedachten, so in voriger retorte gewesen ganz gleich. Thut sie zusammen und treibt das feuer daraus folgendermaßen. Nim eine guthe steinerne retorte, so kein stübgen nicht hält, darein thue etwa 24 Loth von der schwarzen materi oder capite mortuo oleoso, lege einen zimlichen gläsern recipienten vor, so wohl verlatirt, und treibs also in freyen feuer, doch erstlich gelinde bis die retorte wohl glüet, treibs wohl 16 stunden lang, die letzten 8 Stunden aber gar starck. Es kommen bald weiße Nebel oder wolcken und sezet sich wie ein schlammigt oel zu boden. Gehet auch wohl etwas von einer materi mit über, die sich ganz hart an das glas anleget, ist wie ein börnstein, darinn bestehet die beste krafft. Im werenden distilliren ist der recipient ganz hell, und leuchtet im finstern. Was übergangen, ist alles leuchtend, doch das siccum mehr als das humidum. Hieraus ersiehet man, daß das feuer stecke in dem capite mortuo oleoso.

Folgender Proceß, so mehr confus, ist von Mons. Boyle gebraucht worden. Nim eine ziemliche menge Menschen urin, desselben ein guth theil zum wenigsten eine beharliche zeit lang putreficiret. Hernach die spirituosische theile und übrige wäßrigkeit abgezogen, bis zur consistenz eines dicken sirups oder dünnen extracts. Dieß mit 3 mahl so schwehren reinen weißen sand einverleibet in eine starke retorte, eine weite vorlage, so ein guthes theil mit waßer angefüllet, vorgeleget. Sorgfältig zusammen latiret, dann ein ofnes feuer per gradus geben 5 oder 6 stunden lang, damit alles phlegma oder volatilisches vollends übergehen möchte, alsdann das feuer vermehret, und bey 5 oder 6 stunden lang so stark und hefftig gemacht, als der ofen, so nicht schlecht seyn muß, immer geben kan, so komt erstlich ein ganzer hauffen weißes rauches, eine weile hernach eine andere arth, die scheinet in der vorlage als ein schlecht blaulicht liecht, wie von den kleinen schwefelstücken. Und lezt als das feuer sehr hefftig war, kam noch eine andere substanz, weit schwehrer als die ersten, so auff

den Grund der vorlage fiele Hierauß siehet man, daß Mons. Boyle das sal sowohl als caput mortuum oleosum beysammen gelaßen, daher mich nicht wundert daß sein phosphorus wie er gestehet, schwächer gewesen.

Ich weiß keinen process, der auff die vulgata Chymicorum principia, sal, sulphur und mercurium, beßer quadrire, als die compositio dieses feuers oder pyropi, denn dieses feuer komt eigentlich nicht aus dem sale fixo, noch aus dem volatili oder Mercuriali, sondern aus dem medio oder oleo vel sulphure. Und deucht mich, daß dieser process kein geringes liecht gebe. Im übrigen beziehe mich ad priora und verbleibe etc.*)

*) Ohne Ort und Datum.

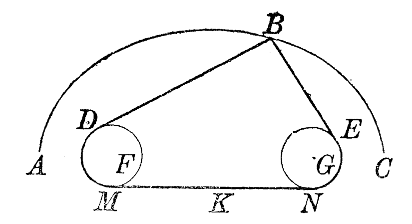
XVIII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Das nächste Schreiben Tschirnhausens an Leibniz ist datirt Paris d. 6. Aoust 1682. Er meldet darin, daß er für die Mittheilung der Bereitung des Phosphors die Beschreibung der Bereitung zweier „secreta chymica, sel vegentans und l'or rendu volatile sans fulminer“ erhalten habe. Er berichtet ferner, daß er seit 3 Wochen in die Akademie aufgenommen sei, und Versprechungen habe, eine jährliche Pension von 2000 Thalern zu erhalten, die er für wissenschaftliche Zwecke zu verwenden gedenke, da er sonst genug zum Lebensunterhalt habe. Er beabsichtigt in den nächsten Tagen von Paris abzureisen, zunächst nach Amsterdam zu gehen, wo er 14 Tage bleiben wollte, und alsdann nach Hannover zu kommen.

Darauf fährt Tschirnhaus wörtlich fort: Derselbige hette sich die mühe nicht geben dürffen, eine demonstration meines Theorematis zu übersenden, den als M. Hrn. kenne, so habe keinen zweifel, daß eintziges Theorema könne gegeben werden, deßen demonstration Sie nicht solten finden, wen Sie sich nur hierzu appliciren wolten. Meine demonstration, als Sie leicht gedencken können, ist nicht different von selbiger, wie anwesend zeigen wihl, und auch so universal, daß sie alle casus in sich schlüßet, die lineae convergiren oder sind parallel. Methodus Tangentium mea circa Mechanicas est utique specialis saltem casus, sed non credo tam universalem posse concipi ut non possim eadem methodo ac haec derivavi, eadem determinare. Daß foci in transcendentalibus curvis (wie sie Mein Hr. nennet) ist meines

wießens noch von niemanden angewießen worden; ist auch nicht nöthig loco linearum rectarum seu filorum curvilineas assumere ad hoc determinandum prout judicas, wiewohl es ist so leicht zu wießen wen man darauff reflectieret, daß wen es eröffnen werde, alle weld sagen wird, sie haben es lange gewußt, welches doch gewieß bin, daß es nicht ist; den es haben viele bereit solche focos in Mechanicis determiniret, sie haben aber nicht gewußt, daß dieses foci und eben dasselbige was wir in Geometricis focos nennen, und daß ich mich mitt einen wort erkläre, cyclois sibi ipsi focus est; curvae omnes quae juxta meum Theorema per intersectiones reflexorum radiorum fiunt, sunt foci curvarum, a quibus radii paralleli incidentes reflectuntur, et idem representant quam punctum quod in Parabola focum vocamus. Si hoc Hugenius vidisset, quod Evolutae essent foci curvarum quae ex evolutione describuntur, tunc nobis multo praestantiora exhibuisset. Hinc vero quam praestantia deduco ex sola hac consideratione, videbis in Tractatulo meo de indaganda Veritate, et facile jam ipse ex iis quae retuli concludes; hinc enim non solum facillima descriptio omnium curvarum conceptibilium patet, sed et harum Tangentes nova et facillima Methodo determinantur, imo ex eadem hac descriptione curvarum mensura, infinite, infinitis modis quantum possibile habetur; et hinc facile quoque concipies, qua ratione curvas concipio duorum focorum in Mechanicis. Sint enim duo circuli F et G, vel si placet quaecunque curvae, quibus filum DBEKD involutum, describatur hinc curva ABC. Foci erunt circuli F et G, et tangens statim determinatur, diviso enim angulo DBE bifariam, linea hinc ducta occurrit Tangenti ad angulos rectos. Sed non opus erit Tibi haec prolixius explicare, cum (ut ego firmissime credo) nullus in rebus hisce Tibi in Mundo aequalis habetur. Admiror quam pauci jam sint in tanta occasione perplurima addiscendi qui cognitionem aliquam extraordinariam possident, et eo majoris similes aestimo. Ich werde meinen Hrn. viel hiervon referiren, sed oretenus; Biette also mich, dieweil Sie sehen, wie unice Veritatem respicio, als wie Sie, mehr in dero Societet einzuverleiben als andere, und mitt mir in allen Philosophico candore et fide umbzugehen. Ich bin wohl von Hertzen erfrewet, ob mich wohl meine studia zu continuiren ob tot obstacula es große mühe gekostet, daß nuhmero erhalten, daß große speranz selbige wie in concept fortzusetzen und versichert; es war hohe zeit, den sonst hette alle meine studia quittiren müßen, auß ursachen die anwesend ferner gedencken wihl, nur vorietzo zu erkennen geben, daß mitt einer Damen von gutter naisance versprochen, und da eine große und



ansehnliche Familie, die bey hoffe zu Dreßen in ansehen, und tag und nacht darauff dencket, wie sie mich durch chargen engagiren wollen, welches alles gantz leicht vorietzo decliniren kan, und habe sonderbahre künste brauchen müßen, daß diese reise unternommen, und mitt Dero allerseits contentement. Dieses eben hatt mich nicht verhindert, daß nicht zugleich einen und andern Tractatum verfertiget, und im übrigen an meine Liebste eine und andere Fantasie schreiben können. Ich hette von hause mitt manier nicht weg gekundt, wen nicht die meinigen auff solche weise versichert, daß bey unß bleiben wolte, wiewohl es rewet mich nichts, und ist mir bies dato alles nach wuntsch und eigner inclination gerathen. Der Hr. beliebe dies bey sich zu secretiren. Ich habe es sonst noch niemanden bekand gemacht. Ich habe in willens, von Hannover auß nach Leipzig und über Dreßen nach hause zu gehen, da Hrn. Krafft als andere, so kenne, sprechen wihl. . . . .

In einem kurzen Schreiben, datirt Amsterdam d. 11 Sept. 1682 giebt Tschirnhaus Nachricht von neu erschienenen Büchern, und meldet „Hrn. Hugens habe in Hage gesprochen; er gehet gleich nach Paris. Zu Leiden habe Hrn. Voldern gesprochen." Er erwähnt, daß er einen Brief von Leibniz erhalten habe, von dem aber in der vorliegenden Correspondenz nichts vorhanden ist.

Über das Zusammentreffen Tschirnhausens mit Leibniz in Hannover giebt die Correspondenz keine Auskunft. In dem nächsten Briefe, datirt Kiesslingswalde d. 20 Novbr. 1682 schreibt Tschirnhaus, daß er Leibnizens Brief an Mencke in Leipzig abgegeben habe. Auf Andrängen seiner Familie ist er von Leipzig unmittelbar nach Hause gegangen, ohne Dresden zu berühren.

XIX.

Tschirnhaus an Leibniz.

Die Zeit leßet mir nicht zu ietzo viel zu antworten auff zwei brieffe*), so von Sie erhalten, welches derhalben zu nechster gelegenheit verschiebe . . .
. . . .
Habe fast keine Gelegenheit hier etwas abschreiben zu laßen, den die leute zu

*) Von diesen Briefen sind die Originale nicht vorhanden.

curiöss; es hatt iedennoch einer von meinen Dienern den Tractatum des Descartes de Methodo abgeschrieben, welchen auff die Meße an Hrn. L. Mencke adressiren wihl, und ersuchen, mitt beyfälliger gelegenheit zu befördern. Der Process umb daß das Eysen nicht rostet, wihl auch communiciren, wie auch andere verlangte sachen; vorietzo habe nichts hier bey mir; wünschte daß M. Hr. dergleichen thun wolle, den mir nicht zweifelt, daß er wegen so vieler correspondenz leicht zu dergleichen gelanget. Möchte wohl wießen, ob Hr. Dr. Becher, der nuhmero in Engeland, sein Lumen trinum oder Alphabetum Psychosophicum außgehen laßen, in seiner weisen narheit und närrischen weißheit hatt er erwießen, daß nicht alzuviel weißheit bey Ihm, und lauffen große absurditäten mitt unter, auch vielleicht große mendacia, den darin ist er sehr geübt, so viel als Ihm erkandt. Ich bin sonst in sehr gutter gesundheit, großer aestime daß in die Societät in Franckreich kommen; welches aber das meiste und das daher entspringet als absonderlich von meiner verheyrathung, daß nuhmero sehr independent leben kan. Habe diesen winter mehr gethan als fast sonst nicht in 2 Jahren. Problema hoc, num possibile, omnes quadraturas impossibiles ad circulum et hyperbolam zu reduciren oder ob solches nicht angehet, darff nicht so schwer gesuchet werden, und ist vor mich nuhmero gar ein leichtes, auch schon determiniret. Ich werde nuhmero meinen großen kupfernen Spiegel bald verfertiget haben, von dem mir was sonderbahres verspreche. Ich habe einen andern und der im weiten dem nicht gleich, auch nicht wohl außgeschlieffen, weil er anfangs zu dünn gemacht worden, welcher iedennoch bey holtz ietzo in dieser Zeit eine schöne flamme giebet, und bley oder zinn gleich schmelzet. Ich hoffe mitt dem gar großen, der mich nicht mehr als 20 rh. kostet, dem zu Paris ziemlich gleich zu kommen. Doch dies sind res facti, wiewohl ich nicht glaube, daß in Kupfer dergleichen iemand wird versuchet haben; wo er was extraordinäres thut, so werde deßen in den Actis Eruditorum gedencken laßen; vielleicht verlangen ihn die printzen zu Dreßen zu sehen. Sed tempus consilia hac in re suppeditabit meliora etc.

Kießlingswalde d. 24 Aprill 1683.

XX.

Leibniz an Tschirnhaus.

Dessen sehr angenehmes vom 24 April habe erst gestern nebenst der abschrifft des Mss. Cartesiani erhalten, deswegen mich dienstlich bedancke, wie mir denn zugleich auch einige exemplaria der Actorum Lipsiensium mit von Hrn.

Mencken zukommen, darinn ich auch M. Hrn. Methodum inveniendi radices sehe; ich habe auch einen andern und sehr wunderlichen weg, welchen in tota Algebra von großer importanz zu seyn achte, und dadurch ich auch gleich zu einer progression gelange, und den calculum abschneide. Nehmlich es ist eine aequation gegeben als 0 aeq. $x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, die soll man solviren. Nun Cartesius damit er die aequation solvire, so excitirt er eine andere aequationem per multiplicationem ex inferioribus, und supponirt daß die aequatio producta eben die radices in sich habe, welche die data hat, comparirt also die terminos mit einander, und suchet dadurch valorem arbitrariarum assumtarum. Als wenn er wissen will ob die aequatio data durch eine inferiorem als $x + l$ aeq. 0 oder $xx + lx + m$ aeq. 0 zu dividiren, so multiplicirt er diese per formulas arbitrarias, und das product comparirt er cum aequatione data, damit der die literas l oder l und m suche. Allein wenn er l im ersten fall pro aequ. $x + l$ aeq. 0 suchen will, so komt pro l eine nova aequatio heraus, so allerdings der datae ähnlich und kein avantage hat. Will er aber in der anderen l oder m suchen, so komt eine aequatio heraus, so unvergleichlich höher steiget, wie ich denn aus meiner regul combinationis radicum possibilium vorher sagen kan, wie hoch sie steigen müße, nehmlich wenn die aequatio data 5 gradus hat, so steigt aequatio pro m invenienda ad 20^{mum} gradum, quia quinque rerum sunt 20 combinationes; und ist damit nichts gewonnen. Hat also Cartesius darinn gefehlet, daß er solche aequationes sucht, welche omnes radices easdem cum data haben. Es ist mir aber einmahl beygefallen, ob nicht rathsamer solche aequationes anzunehmen, die man supponire nicht eben omnes radices cum data aequatione easdem zu haben, sondern unam ad minimum. Nehmlich die gegebene aequation ist $x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$ aeq. 0, so assumire oder fingire ich eine andere gleichen gradus, nehmlich $x^5 + lx^4 + mx^3 + nx^2 + px + q$ aequ. 0. Wenn nun diese omnes easdem radices hette cum priore, so wäre sie coincidens cum priore und l aequ. b, item m aequ. c etc. Damit nichts zu thun. Nun aber indem ich supponire, daß diese eine aequatio arbitraria zum wenigsten eine radicem communem habe cum priore, mich aber nicht bekümmere ob sie deren mehr communes habe oder nicht, so suche ich harum duarum aequationum maximum divisorem communem $x + \odot$ aequ. 0. (wolte ich zwey radices communes haben, müste ich suchen maximum divisorem communem $xx + \odot x + ☽$ aequ. 0) und zwar communi methodo inquirendi maximum divisorem communem, welcher darinn bestehet, daß ich eine quantität von der anderen abziehe so offt ich kan, und daß residuum von der subtracta wieder abziehe so offt ich kan; oder welches eins, id a quo subtrahendum est per id quod subtrahendum est dividire, und das residuum per divisorem wieder dividire, und so fort, bey der lezten division aber durch $x + \odot$ mache das residuum aequale nihilo, damits auf=

gehe, so folgt daß x+⊙ müße seyn der divisor communis maximus. Diese ultimam aequationem in qua residuum ponitur aequale nihilo, und darinn kein x vorhanden und weder l noch m noch n noch p noch q höher als auff gradum quintum steigen können (wie ex mea regula numeri radicum a priori primo intuitu zu demonstriren) kan ich nun ordiniren entweder secundum l oder secundum m oder secundum n oder p oder secundum q, und bleiben die übrigen 4 annoch arbitrariae, die ich dann also zu meinem vortheil in der neuen aequation expliciren kan, daß darauß eine aequatio pura wird, so per solam extractionem radicis kan solvirt werden, und habe ich nicht einmahl dazu nöthig omnes terminos medios wegzubringen, inventis hoc modo literis l. m. n. p. q. So habe ich auch x per aequationem simplicem, weilen x aequ. — ⊙, die quantitas ⊙ aber ex positis l. m. n. p. q. jam inventis pure und rationaliter zu haben, da sonst M. Hr. nachdem er seine arbitrarias gefunden, erst die incognitam per aequationem proxime inferiorem daraus suchet, zum exempel da er pag. 208 Actorum die aequationem $y^3 - qy - r$ aequ. 0 solviren will, assumiret er hanc aequationem yy aeq. by + z + a, und nachdem er a . b und z sua methodo gefunden, so sucht er erst y per aequationem quadraticam yy aequ. by + z + a, und wenn er eine aequationem quarti gradus resolviren wolte, so würde hac methodo post inventas arbitrarias die litera incognita principalis per aequationem 3tii gradus gesucht werden, und sofort, welches den calculum horribiliter zumahl in altioribus vermehret, und nicht nöthig. Denn ex datis semel l. m. n. p. q. arbitrariis meis, so habe ich gleich valorem radicis communis quaesitae duarum aequationum. Durch dieses mittel (supponendi aequationem novam cum data unam radicem communem habentem) kan ich viel andere wunderliche Dinge in Algebra thun, und ziehe dieses artificium generale Analyticum der comparationi aequationum Cartesianae weit vor. Ich habe auch ein sehr artig compendium tollendi omnes radices irrationales und dergleichen, meine methodus per formulam generalem quaerendi quadraturas dienet eben wohl nicht nur zu finden, an quadratura sit Algebraice possibilis, sondern auch an sit ex supposita Circuli aut Hyperbolae quadratura Algebraice possibilis, aber der weg per radices aequationum gibt sonderliche compendia, und führet naturaliter ad quaesitum.*)

Vorstehendes hat Leibniz zurückgelegt, und dafür den folgenden Brief an Tschirnhaus gerichtet:

Deßen angenehmes habe nebenst beygefügter abschrifft des Msc. zurecht, wiewohl vor wenig tagen erst erhalten, bin Mhhrn. ums so viel desto mehr

*) Unvollendet. Ohne Ort und Datum.

obligirt, weil ers, wie ich sehe, nicht wohl ohne ungelegenheit abschreiben laßen können, daher auch kein wunder, wenn die abschrifft etwas mangelhafft und incorrect.

Mir ist niemahls wegen Hrn. Sommers etwas angebothen worden, so hat Hr. Everlaen mich auch versichert, daß man ihm niemahls etwas, so mir gezahlet werden solte, angebothen, weis auch von keinen 40 thlr. nicht, wohl aber von einem gewißen wechsel, so einem fehndrich ni fallor ausgezahlet werden sollen. Wo hehr der Mißverstand komme, kan ich nicht errathen.

Mons. Mariotte hat mir lange nicht geschrieben, bis ich endlich von ihm antwort erhalten. Darauß soviel vermercke daß nach Mhhrn. abreise man alda ziemlich kalt. D. Bechers lumen trinum, wo es nicht fertig, wird schwehrlich fertig werden, denn der autor inter homines morari vel si mavis mentiri desiit. Wie er die wahrheit von andern geschrieben haben müße, kan man an dem abnehmen was er in seiner Morosophia von mir gesezt. Ob alle quadraturae ad quadraturam Circuli vel Hyperbolae zu reduciren, kan freylich per formulas generales wohl determinirt werden, wie dann Mhhr. weiß daß ich alle problemata hujusmodi transcendentia durch diesen weg zu solviren längst ausgefunden; alleine via specialis per radices aequationum gibt große compendia und habe ich dazu nicht von nöthen die radices irrationaliter zu exhibiren.

Die Methodum pro radicibus aequationum, die Mhhr. in Actis publicirt, habe gesehen.*) Ich wolte, daß es Mhhr. nur im ersten grade, den wir noch nicht haben, nehmlich in 5to, probirt hette, denn es werden sich schwehrigkeit finden nicht nur ob prolixitatem calculi, welche per suppositas literas loco prolixarum formularum zu superiren, sondern auch ratione ipsius methodi. Summa ich sehe noch bey weiten nicht demonstrationem successus. Ich habe unterschiedliche wege, darinn ich demonstrationem successus zu finden vermeine, in specie indem ich annehme eine aequationem, quae cum data unam habet radicem communem, welche radicem communem ich suche ea methodo qua alias communem divisorem quaerimus, und komme dadurch ad aequationes tractabiliores. Ich habe auch eine artliche viam generalem die irrationalitates wegzubringen per compendia insignia.

Den sucess des kupfern spiegels erwarte mit großem verlangen. Wie auch was Mhhr. in physicis vor progressus gethan. Ich bin lange Zeit fast außer curioser correspondenz. Von Paris habe keinen einzigen brief so curiosa in sich halte, von der Zeit erhalten, den Mhhr. gesehn, ausgenommen den lezten von M. de Mariotte, der nur meldet daß er suum tract. de percus-

*) Methodus auferendi omnes terminos intermedios ex data aequatione (Act. Erudit. Lips. mens. Maji 1683).

sione wieder drücken laßen, und darinn dem P. des Chales und M. Bernier geantwortet; item er approbirt mein theorema de resistentia solidorum, und will es experimentiren.

Was mir die Academie communiciren laßen, bitte ohnbeschwehrt zu schicken und dabey zufügen die composition des bewusten salis so Mhhr. mir alhiro gezeiget samt der conservation des Eisens.

Aus England habe, daß sie alda eine reforme bey der societät angestellet, hoffen es solle nun beßer gehen. Sonst ist mir nicht das geringste zu wißen kommen. Es hat Merians tochter zu francfurt ein curios buch de insectis herausgeben, so sie selbst observirt und gezeichnet. Das curiosefte ist, daß sie annotirt die plantae, welche einerley insecto angenehm, haben einerley virtutem medicinalem. Ich erwarte förderlist antwort, und verbleibe etc.

Hannover 4 Jul. 1683.

XXI.

Tschirnhaus an Leibniz.

. . . . Daß Mr Mariotte mir auff meinen brieff gar keine antwort ertheilet, befrembdet mich nicht wenig, werde mitt ehisten wiederumb schreiben, glaube freylich wohl also, daß man ziemlich kalt gegen mir; weiß auch leicht woher es kombt, den an Mr de la Hire, sowohl gegenwärtig als . . . . einen solchen Antagonisten gehabt, dergleichen nicht geglaubt, daß ein Mensch der veritatem inquirirte sein köndte, und daß das übelste, so ist er ein intimus von l'Abbe Gallois, der sich seiner von allen mathematicis zu urtheilen so gebrauchet, wie Mr Colbert des Gallois; ja er hatt mir ins gesicht gesagt, daß ihre intention und absonderlich des l'Abbe Gallois wehre, alle frembde von der Academie abzuhalten, den frembde bekähmen nur große pensionen und hette ihre eigene nation nicht so große gloire davon; doch so nur Hr. Hugens lebet, der mir bereits genereuse officia erwießen, so hoffe noch wohl durchzubrechen, wiewohl fast miracula werde thun müßen; vielleicht glückt mir es wie in vielen, wiewohl ich zweyfle daß ob solum veritatis studium excolendum und prosequendum iemand so große mühe angewendet als ich bies dato thun müßen. Gehet es endlich nicht an, mihi soli inserviam et posteritati. Daß sonsten bieshero in den Actis eines und das andere inseriren laßen, ist geschehen, daß sie zu Paris sehen, wie das in

meinen studiis fortgehe, und das zugleich auch andern innotescire; doch achte dieses letztere auch so groß nicht, wen keinen andern nutzen davon habe, als daß man meinen nahmen nennen lernet. Was den methodum anlanget, die Radices ope ablationis intermediorum terminorum zu determiniren, ist gar leicht zu demonstriren, daß er richtig; wo es gewieße rationes nicht verhindern, die ich habe, so wihl solches publice auch in 5to gradu darthun; aber daß diesen methodum selbst nicht so groß achte, ist daß hierdurch Radicum expressiones hervor kommen, die aliquid imaginarii scheinen zu haben, sonsten daß ich als ein specimen methodi nur die cubicas radices zu determiniren gewießen, ist gewesen, daß die richtigkeit dieses methodi durch ein exempel klar würde, das bereits bekand; den sonsten eadem via procedendi in quocunque gradu, in superioribus aber sehr weitläufftig; das zu . . . . . es würde dem drucker viele mühe gegeben haben, quanquam hisce brevibus sat multa mihi indicasse videor. Es ist mir aber sehr lieb, daß mich vorerst ad radices cubicas zu determiniren gewendet, den hierdurch bin gefallen in genuinam methodum omnes radices exhibendi, quae non per ablationem terminorum peragitur, da ich zweyfele quod melior possit exhiberi, saltem omne quicquid possibile aut impossibile circa hoc determinandi hinc derivatur, und da habe lernen erkennen, was die ursache daß in radicibus cubicis ordinariis imaginariae quantitates nothwendig kommen, dahergegen meine genuinae expressiones radicum cubicarum, die nuhmero determiniret, keine imaginariae quantitates in sich schließen, und also alle radices cujuscunque gradus.

Die Brenspiegel so von kupfer und glaube 24 rh. oder 18 rh. an gelde kombt, ist gantz richtig im successu; er schmeltzet ietzo auch bereits sielber; aber wer die compendia nicht hatt, die hierzu erfunden, möchte wohl drüber desperiren; hierdurch aber getrauete mir einen zu machen, der 3 ellen im diametro, und auffs lengste (dieser ist nur 7 viertel der Ellen) innerhalb 4 Monath fertig seyn solte. Er zeuget so klar alle objecta als fast ein gläßerner spiegel, und ist die polirung so leicht, daß sie ein knabe von 10 jahren verrichten kan. Der Kupferschmied fordert vor einer so großen kupfernen platte 50 rh., dieweil ihr etwas dicke haben wihl. Wo es meine affairen zulaßen, so wihl dießen winter einen von dergleichen größe laßen bereiten; doch alles was ich hierin thue, ist nur ander leuthe wegen, den ich gar waß anders hieunter suche, welches so es angehet (nam res facti est) Mundus haec ultra modum mirabitur.

In Physicis habe nuhmero alle difficultates so gehoben, daß ex tribus definitionibus non secus ac Mathematici ex solo simplici conceptu circuli alles quicquid in mundo esse potest, deduciren kan, wie diese alle proprietates ex unica data proprietate circuli, sed saltem generalia opera Physica, in specialibus etenim nisi experientiis obviam eatur, res haec

supra vires humani intellectus*); bin doch so weit in generalibus kommen bieß auff die insecta, deren metamorphoses sehr perspicue deducire, habe diesen sommer viele experimenta gemachet, die perfect mitt meinen principiis übereinkommen. So nur media an der hand, ich wolte andere experimenta machen als bieshero in den societäten geschehen und die andere consequentien nach sich ziehen würden. Num Bruta sentiant necne, aut ut homines, weiß auch durch experientias zu determiniren, ob mir es sonst bereit ratione bekandt. Artem volandi et sub aquis persistendi talem concepi, qualis credo vix in alicujus cogitatione hactenus exorta, sed res haec facti sunt et ab experientiis solis dependent. Sequitur etiam ex meis principiis, posse perfectiora multa nostra animalia in eadem nostra Terra haberi, imo ipsam humanam naturam in aliam posse redigi, imo nos imperfecta adhuc animalia esse quae natura nondum perfecit, et qua arte perficienda.

Die verlangte processe hatt mein Hr. hierbey, aber denselbigen von dem gefrornen waßer kan nicht finden, obschon ziemlich nachgesuchet; finde ich solchen, so ist er zu deßen dienst, wie mein Hr. mich schon kennet, daß gar gern communicire was nur habe und weiß, wüntschete, daß dergleichen gemüther bey andern nur so in diesen gradu anzutreffen wehre, so wollte gar gerne mitt anderen correspondiren.

Olaus Borichius, ein Dähne, hatt ein schön büchlein von Metallen geschrieben, oder die kunst die metalle zu probiren, so wohl zu leßen.

D. Jarich Gallis zu Amsterdam ist gestorben, den ich glaube, mein Hr. vormahlen gesprochen.

D. Overcamp edidit quaedam ad Cartesium commentaria. D. Konfelau (?) Ultrajectinus edidit Methodum ad dirigendam rationem, in qua etiam Algebra nova et breviori methodo continebitur. Curiosum quoque, quod Psittacus ovum Amstelodami excluserit, sed pullus mortuus fuit etc.

Die Türcken gefahr nimmet hier zu, absonderlich wo Wien übergehen solte. Ich nebenst ettlichen gutten freunden haben eine eigene post angeleget, damitt wir gleich erfahren, wie eines und ander vorfellet, den die andern gehen sonst in dergleichen zeiten sehr fabulös.

Es hatt hier ein curieuser Mensch, so von Hamburg kommen, berichtet, daß ein Engländer alda zu Altenau das glaß weich und wieder hart, und damitt unglaubliche dinge machen solte; er hatt ein glaß gehabet, das auff beyden seiten convex, worinnen eine große spinne unversehret gelegen; das glaß hatt auch so helle geschienen als wen es auffs sauberste poliret. Ich ersuche sich doch

*) Tschirnhaus hat hier die Randbemerkung: Mentis nostrae et omnium Animalium derivire gar leicht ex iisdem principiis seu tribus definitionibus.

deßentwegen genaw zu erkundigen. Der comet, so wir wiederumb gehabt, wird selbigen auch bereit bekand sein. Übrigens ersuche sehr mir bald zu antworten, damitt sehen könne ob dieser brieff recht überliefert etc.

Neundorff d. 25 Aug. Anno 1683.

Den process, daß das eysen nicht verrostet auch im regen, habe gewiß, kan ihn aber nicht finden, soll ohnfehlbar mitt ehister gelegenheit gesendet werden.

Tschirnhaus hatte, seitdem die Acta Eruditorum Lipsiensia im Jahre 1682 ins Leben getreten waren, mathematische Abhandlungen darin veröffentlicht. Im October 1683 erschien von ihm die Abhandlung: Methodus datae figurae, rectis lineis et Curva Geometrica terminatae, aut Quadraturam aut impossibilitatem ejusdem Quadraturae determinandi. Die hier gegebene Methode zur Quadratur war im Princip mit der übereinstimmend, in deren Besitz Leibniz seit 1675 war; er hatte sie Tschirnhaus während seines Pariser Aufenthalts mitgetheilt. Nur hatte letzterer sie etwas weiter ausgeführt und einige Lehrsätze hinzugefügt. Da Leibniz sich bewußt war, daß er durch den Fortschritt, den er in Betreff der Quadraturen gemacht hatte, zu seiner wichtigsten Entdeckung, zu dem Algorithmus der höheren Analysis, den er bisher vor jeder Veröffentlichung aufs sorgfältigste bewahrt hatte, gelangt war, so durfte er mit Recht besorgen, daß er durch die Veröffentlichungen Tschirnhausens des Ruhmes des Entdeckers dieses Algorithmus verlustig gehen könnte. Er beschloß, seine Ansprüche auf die Entdeckung der von Tschirnhaus veröffentlichten Quadraturmethode zu wahren; er ließ in die Act. Erudit. Lips. die Abhandlung: De dimensionibus figurarum inveniendis (Act. Erudit. Lips. mensis Maji 1684) einrücken. Hier äußert sich Leibniz folgendermaßen: Sciendum est, istas ipsas (d. h. die Curven, die Descartes mechanische nannte) quoque, ut Cycloidem, Logarithmicam aliasque id genus, quae maximos habent usus, posse calculo et aequationibus etiam finitis exprimi, at non Algebraicis seu certi gradus, sed gradus indefiniti sive transcendentis, et ita eodem modo posse calculo subjici ac reliquas, licet ille calculus sit alterius naturae quam qui vulgo usurpatur. Hujusmodi cogitationum mearum, quas alibi non observavi, participem feci Amicum ingeniosissimum, qui etiam eas multis de suo inventis auxit et suo tempore praeclara dabit; idem calculum inveniendi quadratrices algebraicos supra dicta methodo aggressus aliquot theoremata dedit. Unum tamen cogit me monere amor veritatis, hanc ipsam methodum meam quaerendi quadratrices, insignes quidem usus habere, sed non sufficere ad inveniendas quadraturas quascunque, neque ex ea probari posse impossibilitatem Quadraturae Circuli aut Hyperbolae. — Zugleich hatte Leibniz, wie aus einer Andeutung in

seinem nächsten Schreiben an Tschirnhaus zu schließen ist, sich brieflich an letztern gewandt, ohne jedoch eine Antwort zu erhalten.

Die zwischen Leibniz und Tschirnhaus unterbrochene Correspondenz wurde wieder angeregt durch das folgende Schreiben Mencke's, des Herausgebers der Act. Erudit. Lips.:

Mencke an Leibniz.

Demselben sol ich negst dienstschuldigsten Grusse nicht verhalten, daß Mons. Tschirnhaus uns diese tage eine große weitläuftige apologiam wieder meinen hochz. Patron eingeschicket, undt begehret, daß solche je eher je lieber in unsern Actis möchte publiciret werden. Er wil darin außführlich erweisen, daß er nicht, wie er aperte beschuldiget worden, eines andern inventum vor das seinige außgegeben, sondern daß er selbst erst auf diese gedancken gekommen, undt praetendiret, die wieder ihn formirte objectiones zu removiren. Nun sehen wir gar ungern, wan M. Herr Patron undt obgedachter Mons. Tschirnhaus in einander gerathen solten, alß die in teutschland heute in hoc studiorum genere die berühmtesten seyn, undt so lange zeit vertraute freunde gewesen. Ich weiß auch nicht, ob es ihnen beyden solte reputirlich seyn, wan hierauß ein krieg entstehen solte, zumahl da sich die exteri, welche uns teutschen ohne dem nicht gern die Ehre eines neuen inventi gönnen wollen, gewiß damit kitzeln werden. Wie ich dan von gewisser hand nachricht habe, daß man in Engeland im wercke begriffen, ich weiß nicht welche quadraturam circuli, die unsern Actis inseriret ist, ihrem professori Newton zu Cambridge publice zu vindiciren, undt zu erweisen, daß solches dießem, undt nicht eines teutschen inventum sey. Also bin ich angestanden, gedachte des von Tschirnhausens apologiam in die Acta zu bringen, ehe undt bevor ich meinen hochg. Patron communication davon gethan, ungeachtet er urgieret, daß man doch diese apologiam den nechsten Monat inseriren möchte, undt stelle also M. Herrn anheim zu bedencken, obs nicht dienlicher sey, daß Sie mit einander durch briefwechselung, alß vorhin gewesene gute freunde, die gantze Sache außmachten, damit hernach ein concept, das ihnen beyden anständig, denen Actis einverleibet werden könte, ut utriusque honori consulatur. Erwarte also hierauf mit negster post schleunige andword, undt habe diesen brief deßwegen auf Osterode dirigiret, weil ich vermuthe, er werde desto eher meinem hochg. Patron zu handen kommen. Den monat Julium habe ich auf Hannover, wie jedesmahl geschehen, gesant, dem desselben meditationes de resistentia solidorum einverleibet seyn. Solte was verdrucket seyn, so bitte es zu erinnern, den H. P. Pfautz damalß die correctur nicht abwarten können, da er kaum von Oldenburg zurückgekommen war, undt gar zu viel zu thun vor sich finde. Wie er den noch jetzo selbst an M. Herrn zu schreiben verhindert wird, einen dienstl. gruß aber zu überschreiben gebeten. Was mein hochg. Patron sonst an curieusen inventis hat, wil ich erwarten, undt in den Actis willigst publi-

ciren, alß die dadurch bey frembden umb so viel angenehmer seyn. Ich verbleibe u. s. w.

Leipzig den 16 Julii 1684.

Leibniz an Mencke.

Dessen werthes 16 Jul. habe zurecht erhalten, und bedancke mich daß derselbe mir von M. Tschirnhaus schrifft part gegeben; erkenne auch aus dem vorschlag, so M. Herr so selbiger gethan, umb den streit privatim beyzulegen, desselben wohl intentionirtes gemüth, so allem nachtheiligen zuvorzukommen erachtet. Ich habe an M. Tschirnhaus bereits deswegen schohn vorlängst geschrieben gehabt, und ihm zu verstehen geben, er möchte sich dieses nicht so absolute allein zuschreiben, weil ich aus seinem brieff gefolgert, daß ers in druck geben wolte, aber ich habe keine antwort erhalten. Schreibe ihm iezo nochmahls beykommendes, so vernehmlich deswegen abgehen lasse, damit M. Herr sehe, daß ich seinem consilio deferire. Denn in übrigen endtlich Hr. Tschirnhaus am wenigsten ehre von diesem streite haben würde, maßen ob er gleich über vermuthen vorgeben wolte, daß er hierinn von mir das fundament nicht gehabt und ich ihn in re inter amicos sine teste acta nicht überführen kan, auch solches nicht tanti (?), so wird er doch seinen paralogismum nicht excusiren, sondern mich zwingen, selbigen clarens zu entdecken, da ich zuvor also davon gesprochen, daß es vielleicht wenig mercken werden. Denn gewiß ists, daß er das problema quadraturae circuli nicht seiner meinung nach absolviret, noch dessen impossibilitatem erwiesen, und bin ich versichert, daß man zu Paris und London mit mir eins seyn wird. So kan man auch leicht erachten, daß derjenige das fundamentum methodi beßer verstehe, so dessen gebrauch und limites weiß, als der damit in paralogismos verfället. Was sonst Hr. Newton betrifft, so habe ich dessen sowohl als Herrn Oldenburgs seel. briefe, darinn sie mir meine quadraturam nicht disputiren, sondern zugestehen; ich glaube auch nicht, daß Herr Newton sie sich zuschreiben werde, sondern nur einige inventa circa series infinitas, die er theils auch ad circulum appliciret, darauff Hr. Mercator, ein Teutscher, zuerst gefallen, Hr. Newton sie weiter bracht, ich aber auff eine andere weise dahinter kommen; unterdessen bekenne ich, daß Hr. Newton die principia, daraus er eben die quadratur schließen hätte können, schohn gehabt, allein man fallet nicht gleich auf alle consequenzen, einer macht diese, der andere eine andere combination. Hierbey schicke M. Herrn eine Methodum de maximis et minimis, welche treflichen usum in der ganzen Mathesi hat.*)

*) Ohne Ort und Datum.

XXII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Nunciatur mihi Lipsia nescio quod scriptum Tuum illuc allatum esse, quo quereris, me in partem cujusdam inventi Geometrici a Te editi venire velle. Ego quidem spero adhuc nihil in eo contineri ab urbanitate tua, sed maxime ab illis quae mihi saepe coram et per literas contestatus es, alienum, neque enim ita de Te meritus sum, praesertim cum mature id egerim ut hoc quicquid est subusculi evitaretur. Nam cum intelligerem ex tuis literis Te Methodum quadraturarum edere velle, dissuasi tum quod esset adhuc imperfecta, tum quod aliquid mihi quoque in ipsam juris esset, tum quod satius esset specimina quam Methodos publicare ad continendos in officio nonnullos qui origine inventorum intellecta jactant hoc se quoque potuisse. Et scis, nisi ista me retinuisset causa (ut alias taceam) et hanc methodum et alias complures, quas prope a decennio habeo, a me potuisse publicari; sed Tu neglecto amici desiderio, quod commune nobis erat publicum fecisti, et me silentium abrumpere coëgisti, ne forte aliquando rem a tot annis meam adhibens ab aliquibus quasi ea Tibi sublecta, plagii accusarer. Equidem nescio utrum neges mihi Methodum ante Te notam fuisse an tantum Te a me didicisse; sane adjecisse Te non contemnenda nec facilia fateor lubens, et agnosco me Aequationes illas, quas exhibes, condendas potius censuisse, quam conditas habuisse, itaque hactenus consilium meum, tuam executionem esse, quae peringeniosa est et ut spero (nondum enim examinavi) errorum vacua erit, sed plura largiri non possum, nisi contra conscientiam meam tuamque. Equidem qui videbit, quae jam multo ante ad complures scripsi, facile judicabit me ista non potuisse ignorare, forte et de tua manu erunt quae id firmabunt. Vim sane methodi hujus et limites quoque dudum perspexi, neque enim adhuc eam habet perfectionem, cujus scio esse capacem, et si quemadmodum alias monitis meis in viam Te revocari passus fuisti, ita nunc monentem audivisses, nunquam suscepisses solutionem problematis de quadratura Circuli, quemadmodum in scripto edito tentata frustra impossibilitatis demonstratione fecisti. Vellem nosse quid figurae a me propositae respondeas, quae quadrabilis est et secundum regulas tuas non esset; item an tandem habeas promissam radicem generalem Aequationis cubicae sine imaginariis, de quo magnae rationes me dubitare cogunt; denique an ope Methodi tuae pro radicibus aequationum

omnium exhibueris tandem radices aequationis surdesolidae tam diu speratas, nam inferiores dudum per alias methodos habemus.

Haec scribere volui (quanquam responsum ad eas quas hoc vere dedi, jure meo potuissem exspectare) idque non tantum ut hortatui communium amicorum obsequerer, sed et (utcunque res a Te accipiatur) ut conscius essem ipse mihi nihil a me neglectum esse, quod ad amici officium pertineret. Vale etc.*)

Tschirnhausen's Antwort ist datirt: 31 August 1684. Er entschuldigt darin die Veröffentlichung seiner Abhandlungen, er sei als Mitglied der Pariser Akademie dazu verpflichtet, auch wolle er zeigen, daß er die in Aussicht gestellte Pension von Seiten des Königs von Frankreich verdiene. Er ist mit dem Vorschlag Mencke's einverstanden, die Sache nicht öffentlich zu verhandeln, er hat die Erklärung, die er an Mencke geschickt, zurückgefordert und übersendet sie an Leibniz.

Leibniz entwarf die folgende längere Antwort:

Novissimas**) meas acceperis, opinor, hortatu Lipsiensium amicorum ad Te scriptas, ut colendae ac conservandae necessitudinis nostrae me paratum ostenderem. Interea redditae mihi sunt tuae quoque, ex quibus libentissime intellexi eandem Tibi sententiam esse. Cum vero adjeceris scriptum illud Apologeticum, quod prius Lipsiam miseras, fateor id non sine quadam admiratione mihi lectum esse nec aliam rationem reperire excusandi candoris tui, quam ut memoriam accusem. Profecto enim methodnm meam per differentias serierum inveniendi summas aut quadraturas monstravi Tibi saepissime, quin et indicavi, quomodo generalibus formulis quaerendo curvarum generaliter expressarum figuras differentiales, semper determinare possem an data figura inter differentiales illas possibiles contineretur adeoque quadrabilis esset. Memini tamen ea Tibi satis tunc quidem arrisisse eo obtentu, quod calculus esset prolixior, et quod alias vias sperares longe meliores; itaque cum nunc ad ea recte postliminio rediisti, fieri potest, ut oblitus sis tot post annis, quanam occasione in has cogitationes deveneris. Credo me adhuc schedas habere, ex quibus ostendi posset Tibi talia communicata. Legisti etiam Epistolam meam ad Oldenburgium Parisiis scriptam occasione Neutonianarum literarum, in quibus ea continebantur, unde ista satis clare constarent. Et cum novissime hac transires ac vel verbo hanc methodum tangere coepisses, statim dixi, esse hanc ipsissimam meam,

---

*) Ohne Ort und Datum.

**) Leibniz hat bemerkt: ist nicht abgangen.

nec vel olim vel tunc in solis generalibus verbis substiti dicendo rem me habere in potestate, sed ea protuli, ex quibus procedendi modus non difficulter appareret; saltem scio Te dubitare non posse quin mihi dudum innotuerit, quod secundum Methodos Calculi mei differentialis quem nosti fugere me non poterat. Equidem facillima res est, data curva Algebraica invenire aliquam aliam figuram Algebraicam, ejus ope quadrabilem, sed viam qua quis retrorsum ire et datae figurae quadrabilitatem inventa quadratrice ejus determinare possit, non inde quivis statim agnoscat; qui vero mecum tantum considerat, quadratricem datae inveniri inveniendo lineam, cujus differentialis sit ipsa data, et datae differentialem ex calculo tangentium semper haberi posse (seu quadraturas et tangentes figurarum invenire, esse invenire summas et differentias serierum, seriesque summandas esse summatricium differentiales) is statim videt, inter differentiales figuras generalibus formulis expressas etiam datam, si quadrabilis est, contineri debere. Ex hac methodo differentialis calculi scis me alia magni momenti ducere, inprimis evitationem sublationis irrationalium in calculo tangentium aliaque innumera circa Geometriam sublimiorem, nec quisquam opinor ista ante me tam efficaci generalique ratione concepit. Ipse quoque Parisiis, cum ultima vice ibi esses, me scribens tunc cum jam haberes methodum quadrandi nostram, fateris, Te non habere in potestate Methodum Tangentium inversam seu inventionem curvae data Tangentium proprietate, quae tamen et ipsa ex hac eadem Methodo Calculi differentialis, per generales formulas tractati, eodem modo sequitur, quo methodus quadraturarum, imo methodus quadraturarum nil nisi ejus exemplum est: nimirum sume formulas curvarum generales, earumque quaere differentiales aequationes seu tangentes, easque aequationes conjungendo cum data aequatione differentiali, habebis aequationem assumtae coincidentem. Ex quo Methodum Tangentium inversam Tute nunc statim potes perspicere, et potuisses dudum, sed non omnia per nos animadvertimus et subinde opus est ut ab aliis admoneamur. Quia deinde in scripto tuo calculum meum transcendentem paulo arctius accipere videris, scito ejus nomine designari a me omnem calculum, quo tractantur transcendentes curvae vel quantitates, hoc est, ubi incognita vel indeterminata non potest exprimi per aequationem certi gradus. Et cum ego ni fallor primus admonuerim, quas Cartesius Mechanicas vocat, non minus Geometricas esse, putavi appellandas Transcendentes, quia primus animadverti adhibendum pro illis esse calculum, in quo incognita non sit certi gradus; inveni et prodire novas quasdem affectiones, scilicet praeter potentias et radices, nempe y, yy, y^3, $\sqrt[2]{y}$, $\sqrt[3]{y}$ etc. adhiberi aliquando $d\overline{y}$, $dd\overline{y}$ vel $\int\overline{y}$, $\int\int y$, et horum rursus potentias vel radices. Unde novus oritur

calculus plane mirabilis, quem voco differentialem, cujus usus est maximus servitque ad ea paucissimis lineis calculi exhibenda, quae vix maximis figurarum circuitionibus communi Methodo exprimuntur. Et quemadmodum in communi Algebra insignis est usus calculi vel ideo quoniam altiores gradus non nisi per ambages in figuris exhibentur, tametsi aliquis veteri Geometriae assuetus et novae methodi obtrectator dicere possit se omnia vel etiam communi via exhibere per plures proportionales, et sane inferiora, ut yy, y^3, per plana aut solida facile exhibentur, ita in hoc calculo transcendente, etsi dy vel ∫y per tangentes aut quadraturas exprimantur, tamen altiores affectiones, ut ∫∫y, ∫∫∫y, ddy, dddy, aut horum variae complicationes non sine multis ambagibus exprimuntur in figuris aut in communi calculo algebraico, sed nec nisi istis affectionibus dy, ∫y etc. adhibitis aequationes curvarum ex tangentibus pendentes ad duas incognitas x et y reduci possunt, quod tamen ad exprimendas curvarum naturas requiritur. Generaliter autem Calculus Transcendens mihi est triplex. Est enim adhibenda aequatio quoad numerum terminorum vel infinita vel finita; si infinita, tunc proveniunt series infinitae, quas jam et alii ante me adhibuere, etsi in illis nova quaedam magni momenti detexerim. Si aequatio numerum terminorum habeat finitum, tunc rursus vel adhibet quantitates infinitas infiniteve parvas (tangentium tamen ope in ordinariis repraesentabiles), quod speciatim facit Calculus meus differentialis, vel adhibet quantitates ordinarias, sed tunc necesse est ut incognitae ingrediantur exponentem, et hanc ultimam expressionem omnium Transcendentium censeo perfectissimam, hanc enim ubi semel nacti sumus, finitum est problema. Calculus differentialis ostendit non tantum quicquid ab aliis circa tangentes et quadraturas hactenus repertum est, sed et innumera, in quae quis nisi calculo meo usus (cujus nuper initia quaedam Lipsiam publicanda misi) non facile incidet, quia isto calculo omnia mira brevitate et claritate oculis ac menti objiciuntur. Facile tamen unumquemque patior abundare suo sensu et inventa fruge glandibus vesci. Vides ergo meum calculum transcendentem non consistere in sola illa incognitarum translatione in exponentem, de quo fateor me non nisi pauca Tibi monstrasse, nempe regulam pro numeris primitivis quam inde duco, et modum quem habebam jam Parisiis, per aequationem finitam ordinariis quantitalibus constantem exprimendi quadratricem circuli, sed calculi differentialis mei fundamenta saepissime Tibi a me monstrata exemplisque etiam aliquando illustrata non poteris diffiteri. Methodus tangentes exhibendi transcendentium, meae generalis methodi corollarium est adeo facile, ut per se pateat intuenti, imo methodus mea calculi differentialis a transcendentibus et algebraicis abstrahit.

Quod ais Te posse curvam transcendentem Algebraicae quadratricem, licet transcendens sit, metiri seu in rectam extendere per spatiorum alterius curvae Algebraicae dimensionem, id in meo calculo differentiali tam facile est ut vix moneri mereatur. Nam si ordinata figurae quadrandae seu differentialis sit z, tunc ordinata figurae, cujus spatia serviunt ad curvam quadratricis seu summatricis metiendam, erit $\sqrt[2]{aa+zz}$: scilicet talia quae Tibi magni momenti visa sunt, apud me facillima sunt et levis armaturae. Illud laudarem mirifice, si posses efficere facili aliqua ratione, quod ego nondum praestiti, ut liceat quadraturas reducere ad dimensiones curvarum, seu ut semper curvae Algebraicae reperiri possent, ex quarum dimensione posset datae figurae Algebraicae haberi quadratura. Hoc ego inventum maximi facerem, et si aliquid apud Te possem, mi Amice, hortarer potius ut vere nova aggredereris, quam actum ageres, nam praeter illa quae de focis praeclara dedisti et summo ingenio tuo digna, in caeteris quae probo nihil quod mihi quidem novum sit agnosco. Fateor tamen, si demonstrare potes, quod in scripto tuo apologetico asseris et ad tuendum Methodi tuae . . . . necessarium esse agnoscis, nempe si Figurae Algebraicae, cujus quadratrix Algebraica (seu quadratura indefinita sive generalis) non datur, ejusdem figurae nec quadraturam specialem ullam dari posse, Te aliquid magnum ac mihi ignotum praestitisse, eoque casu retractabo lubens, quae contra methodum tuam sive eam improbando, sive quod in ea probum est mihi quoque ascribendo dixi, fatebor enim hoc modo et probam et unice tuam esse. Offertque mihi ea res occasionem, qua si placet Tibi publice satisfacere et utriusque existimationi, si tanti est, consulere possim; profitebor enim id ipsum ut in scheda hic adjecta vides, eamque si consentis poterit in Actis imprimendam curare Dn. Menckenius. Scribis denique Te non parum miratum, cur publice Tibi contradicere in animum induxissem quod Tibi officere poterat; sed purgare me non difficile erit. Primum enim rogaveram et coram et per literas, ut in Methodo publicanda, in quam et mihi aliquid juris esse putabam, velles communi consilio uti; cum vero ne respondisses quidem et viderem Schediasma tuum comparere in Actis Eruditorum, coactus sum juris mei vel ideo meminisse (quod honestissimis verbis a me factum vides) ne si aliquando uterer eadem methodo tanquam mea, mihi ab ignaris plagii crimen intentaretur. Itaque nihil me ab officio alienum fecisse puto. Spero Te quoque, mi Amice, suum cuique ingenue tribuendo effecturum ut amicitia nostra, si quidem ea Tibi tanti videtur quanti videtur mihi, in solido collocata nullis suspicionibus labefactetur.

P. S. Si quando vacat, quaeso ut mihi processus illos pro phos-

phoro a Parisiensibus communicatos denuo mittas, in quibus erat auri volatilisatio; scripsi enim me schedas perdidisse.

Additio ad Schedam in Actis proximi mensis Maji editam de Dimensionibus Curvilineorum per G. G. L.

Cum eximiae eruditionis Mathematicus Joh. Christophorus Sturmius in Actis nuperi mensis Martii publicaverit Methodum qua dimensiones figurarum ab Euclide, Archimede aliisque datae directius et compendiosius quam vulgo fieri solet demonstrantur, reducendo scilicet ad series infinitas continua abscissarum seu partium axis bisectione et parallelogrammorum semper aliorum atque aliorum, pro altitudine partes axis, pro basi ordinatas habentium, circumscriptione ac de ea re meam nominatim aliorumque Geometrarum sententiam desideraverit: officii mei putavi, quid sentiam paucis expromere, etsi serius fortasse quam facturus eram, si illum Actorum locum maturius animadvertissem. Et quidem non possum non agnoscere Methodum hanc demonstrandi probam esse et laudandam; sentio autem et hanc viam et alias hactenus adhibitas omnes deduci posse ex generali illo meo dimentiendorum Curvilineorum Principio quod figura curvilinea censenda sit aequipollere polygono infinitorum laterum, ex quo sequitur, quicquid de tali polygono demonstrari potest sive ita ut nullus habeatur ad laterum numerum respectus, sive etiam ita ut tanto magis verificetur, quanto major assumitur laterum numerus, ita ut error tandem fiat quovis dato minor, id de curva posse pronuntiari. Unde duae oriuntur Methodorum species, ex quibus meo judicio pendet quicquid hactenus vel inventum est circa dimensionem Curvilineorum, vel imposterum poterit inveniri, idque hactenus non satis consideratum reperio. Caeterum hortor Virum Clarissimum, ut tentet Methodum suam ad eas promovere figuras, quarum dimensio nondum datur, ut scilicet non tantum ad demonstrandum, sed et ad inveniendum serviat, quod variis modis praestari posse video. Licet autem generaliores Methodos dudum habeam, qualis illa est quam in Scheda mensis Maji Actorum hujus anni publicavi, non tamen tales contemno vias magis restrictas, quia saepe sunt compendiosiores in quibusdam casibus, et variare methodos ad perfectionem scientiae pertinet, quia aliae Methodi aliis problematis sunt aptiores et quasi a natura assignatae, praesertim cum Generalis illa Methodus mea comparata sit ad inveniendas Quadraturas indefinitas seu figurae toti pariter et partibus ejus quibuscunque communes, pro definitis vero portionibus vel totis figuris solis nondum mihi sufficere, sed alia plane adhibenda videatur.

Qua tamen occasione non dissimulabo Virum eximium qui in iisdem Actis mense Octobri anni praeteriti 1683 etiam quadraturas definitas aut eorum impossibilitatem (et speciatim circa dimensionem totius circuli) Methodo deducere voluit (quod mihi ex iis quae affert nondum sequi videbatur) nuper mihi significasse, inventum se habere modum satisfaciendi huic difficultati. Id inventum si legitimum est, lubens quae in Actis proximi mensis Martii contra scripsi retractabo et fatebor eum aliquid magni momenti mihique secundum hanc investigandi rationem ignotum et insperatum praestitisse, magnumque illud problema Tetragonismi Circularis quoad eum quadrandi modum qui vulgo quaeritur, absolvisse demonstrata ejus impossibilitate, quod hactenus publice fecit nemo. Ait enim se posse demonstrare: quandocunque figurae alicujus linea algebraica (ut ego loqui soleo) terminatae non datur quadatura algebraica indefinita seu generalis, seu quando non datur linea quadratrix Algebraica, tunc nec posse dari alicujus portionis ejus quadraturam algebraicam definitam seu specialem. Alibi autem explicui me algebraicam vocare quantitatem vel lineam, cujus natura per aequationem certi gradus exprimi potest. Ego sane me fateor ob graves rationes hactenus in alia fuisse sententia, quoniam tamen promittentis amici ingenium maximi facio, ideo nondum desperare volo de successu, hortorque magnopere ut hanc demonstrationem edat, unde plurimum lucis accedet Geometriae.

Leibniz legte das vorstehende ausführliche Schreiben zurück und übersandte an Tschirnhaus die folgende Antwort:

XXIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Novissimas meas acceperis hortatu Domini Licentiati Menckenii scriptas, ut colendae ac conservandae amicitiae nostrae me paratum ostenderem; interea et accepi tuas, ex quibus libenter intellexi, eandem Tibi sententiam esse. Certamen nostrum non magis amori mutuo officere debet, quam duorum inter se chartulis ludentium commotiunculae. Caeterum ego qui certus sum Tibi jam Parisiis monstrasse Methodi quam publicavimus substantiam, cum Te video contra asserere quod per Te in eandem incideris, non tam candorem tuum, quam memoriam in dubium revoco, haud dubie enim Tibi saepe methodum summandi series,

vel quadrandi figuras per differentias monstravi, dum scilicet generalibus calculis figuras differentiales seu quadrandas possibiles determinari posse ostendebam, sed memini Te tunc alias meliores methodos sperare, quae neque calculo implicato, qualis sane iste est, nec tangentibus (coincidunt enim tangentium et differentiarum inquisitiones) niterentur. Unde factum pie credo, ut tunc animum non attenderis, et cum multo post tempore ad eandem methodum postliminio rediisses, non distincte memineris, per quem profecisses. Paravi responsionem longiorem ad Schedam a Te Lipsiam missam mihique proximis tuis literis communicatam; hanc responsionem vicissim communicabo, ubi opus erit; eam his verbis finio: „In calculo differentiali cujus fundamenta et specimina ami- „cissimo Viro saepissime communicavi, quicquid hactenus circa „Curvilineorum dimensiones et tangentes inventum est, alia multa „nondum hactenus inventa continentur; sane quod ait exempli „gratia se posse curvam transcendentem Algebraicae quadratricem „metiri seu in rectam extendere per spatiorum alterius curvae „Algebraicae dimensionem, id in meo calculo differentiali tam est „facile ut vix moneri mereatur. Nam si ordinata figurae algebraicae „quadrandae seu differentialis sit z, tunc ordinata figurae, cujus „spatia serviunt ad curvam quadratricis metiendam, erit $\sqrt[2]{aa+zz}$, „scilicet istiusmodi. Omnia (inter quae etiam est quod ait se „infinitarum curvarum Transcendentium tangentes eo modo quo „algebraicarum exhibere) quae Amico magni momenti visa sunt, „apud me facillima sunt et levis armaturae. Illud laudarem „mirifice, si posset efficere, quod ego nondum praestiti, ut liceat „quadraturas reducere ad dimensiones curvarum seu ut semper „curva Algebraica reperiri possit, ex cujus dimensione supposita „posset datae figurae algebraicae haberi quadratura. Hoc ego inventum „maximi facerem, et si quid possem apud illustrem Amicum, hor- „tarer eum potius, ut vere nova aggrederetur, quam uti hactenus „saepe facere visum est, actum ageret, nam praeter illa quae de „focis praeclara habuit et summo suo ingenio digna, in cae- „teris quae probo, nihil quod mihi quidem novum sit agnosco.“ Atque haec in responsione mea continentur, quae ideo huc transcribo, ut Te ad egregia et mihi nondum pervestigata excitem. Fateor etiam, si demonstrare potes, quando generalis quadratura algebraica seu quadratrix algebraica non procedit, nec procedere quadraturam specialem, quemadmodum in tua defensione promittis, fatebor profecto Te rem magnam effecisse et Methodum istam longissime provexisse; imo si putas officere Tibi posse, quod in Actis publicari curavi, libens hoc quicquid est damni reparabo, statim fatendo publice, si ita postulas,

Te ubi hoc demonstraveris, vere aliquid magnum et mihi ignotum circa hanc methodum praestitisse, imo magnum illud problema quadraturae Circuli quoad modum solvendi vulgo quaesitum demonstrata algebraicae solutionis impossibilitate absolvisse; imo ut videas promptitudinem inserviendi meam, ecce Schedam adjicio, quae Actis Lipsiensibus, si quidem Tibi probatur, inseri potest.*)

Unter den Schreiben, die Leibniz an Tschirnhaus um diese Zeit entwarf, verdient noch nachstehendes hinsichtlich seines Inhaltes hervorgehoben zu werden.

XXIV.

Leibniz an Tschirnhaus.

Vous aures receu ma lettre que j'avois adressée à Mons. Mencken; cependant j'ay aussi receu la vostre, qui m'a surpris en quelques endroits, où vous ne vous souvenés pas des choses passées, ce que je croirais tousjours plustost que de douter de vostre sincereté. Mais nous nous en pourrons mieux éclaircir une autre fois. Cependant comme je voy que vous avés trouvé estrange que j'en ay touché quelque chose dans les Actes publics, je vous supplie de considerer que je vous avois prié de differer la publication de la Methode, sans que j'aye eu de reponse. Peut estre même si je n'avois dit mot, on m'auroit fait passer un jour pour un plagiaire, quand j'aurois voulu user de cette Methode comme mienne. Ainsi vous voyés, Monsieur, que c'estoit à regret et par une espece de necessité que j'ay parlé. Neantmoins comme je cheris infiniment l'honneur de vostre amitié, j'ay songé comment je vous pourray contenter sans me faire tort, et vostre écrit (communiqué à nos amis de Leipzig et qui m'a esté envoyé par apres avec vostre lettre) m'en a fourni l'occasion. Car si vous avés trouvé un moyen de demonstrer que les parties des figures algebraiques, qui n'ont point de courbe quadratrice, ne sont point quadrables, je demeure d'accord que vostre methode prise de ce biais est universelle, et enrichit beaucoup sur la mienne. Si vous le trouvés à propos, j'en feray un aveu public en faisant imprimer dans les Actes le papier cyjoint. Ou

---

*) Ohne Ort und Datum.

si vous y trouvés quelque chose à changer, je vous prie de me le signifier et en tout cas de renvoyer le papier à Mons. Mencken.

Il y a bien du temps que mes correspondances de France et partout ailleurs sont interrompues. Et je n'apprends presque d'autres nouveautés maintenant en matiere de lettres que ce que les Actes de Leipzig m'apprennent.

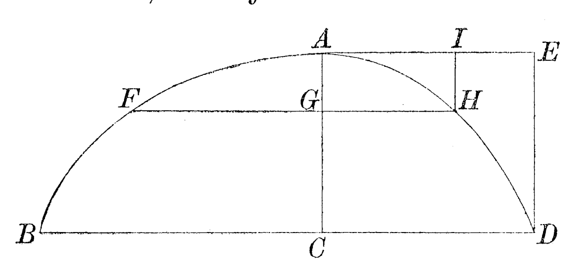
J'ay ouy parler autres fois de Mons. Gallet comme d'un habile homme, mais j'ay de la peine à croire que l'anneau de Saturne ne soit qu'une simple apparence comme il dit.

En Hollande on dispute maintenant fort et ferme, si les bestes sont des machines, et même le peuple s'en divertit, et traite les Cartesiens de ridicules, qui s'imaginent qu'un chien qu'on bat, crie à peu prés comme une musette qu'on touche. Pourquoy, quoyque j'accorde aux Cartesiens que toutes les operations exterieures des bestes peuvent estre expliquées machinalement, je croy neantmoins que les bestes ont quelque connoissance et qu'il y a en eux quelque chose qui n'est point étendue proprement et qu'on peut appeller ame ou si vous voulés forme substantielle. On m'a dit que Mons. Carcavy n'a plus la garde de la Bibliotheque du Roy, qu'on y a mis un certain Abbé Varese, qui est mort bientost apres, et que Mons. Cordemoy qui y pretendoit, est mort aussi.

Je m'etonne que Messieurs Arnaud et Malebranche, qui estoient si bons amis, quand j'estois à Paris, écrivent maintenant l'un contre l'autre; je n'ay pas encor lû leur écrits opposés, mais autant que je puis juger par leurs autres ouvrages, le Pere Malebranche a beaucoup d'esprit, mais Mons. Arnaud écrit avec plus de jugement. Il y a quantité de jolies pensées dans la Recherche de la verité, mais il s'en faut beaucoup que l'auteur ait penetré bien avant dans l'analyse et generalement dans l'art d'inventer, et je ne pouvois m'empecher de rire, quand je voyois qu'il croit l'Algebre la premiere et la plus sublime des sciences, et que la verité n'est qu'un rapport d'egalité et d'inegalité, que l'Arithmetique et l'Algebre sont les seules sciences qui donnent à l'esprit toute la perfection et toute l'estendue dont il est capable, enfin que l'Arithmetique et l'Algebre sont ensemble la veritable Logique. Et cependant je ne voy pas que luy même ait grande connoissance de l'Algebre. Les louanges qu'il donne à l'Algebre, se devroient donner à la Symbolique en general, dont l'Algebre n'est qu'un echantillon assés particulier et assés borné.*)

*) Der Schluß fehlt.

Die mehrfach erwähnte Vertheidigungsschrift, die Tschirnhaus nach Leipzig zur Aufnahme in die Act. Erudit. geschickt hatte, hat die Aufschrift: Responsio ad objectionem, quae impressa mense Maji praesentis anni circa inventum, quod mense Octobris anni praeteriti publicatum, ubi insinuatur Methodus datae figurae Geometricae aut quadraturam aut impossibilitatem determinandi per D. T. Nur folgende Stelle, in welcher Tschirnhaus seine Methode zu rechtfertigen sucht, soll daraus hervorgehoben werden: Sit enim curva AFB Geometrica, et sit jam demonstratum mea methodo, quod curva AHD quae talis ut rectangulum AGHI sit semper aequale spatio AFG, non possit esse Geometrica, sed Mechanica, non statim sequitur, quod omnia spatia AFG hujus curvae AFB non possint absolute quadrari; dantur enim (quod maxime notandum) infinitae curvae Mechanicae AHD, ubi aliquae ex ordinatim applicatis GH geometrice possunt mensurari, et per consequens non obstante quod AHD sit curva Mechanica, probabile videtur, quod quandoque spatium aliquod AFG poterit absolute quadrari. Si quis exemplum desideret: sit AFB cyclois, curva quadratrix AHD erit Mechanica et hujus ope interim spatium aliquod cycloidis, prout a Nobilissimo Hugenio primo observatum, absolute quadratur. Requiritur itaque, ut quis qui praetendit se methodum exhibuisse datae curvae Geometricae aut quadraturam aut impossibilitatem quadrandi, adhuc insuper demonstret, quod existente AFB curva Geometrica, loco AHD nulla talis curva Mechanica unquam possit exoriri, hoc est ubi aliqua ex ordinatim applicatis GH sit Geometrice mensurabilis, adeoque hoc quidem fieri posse si curva AFB sit quoque Mechanica, nunquam autem si geometrica existat; hanc autem demonstrationem, quam a nullo alio quoque didici, Lector suo loco videbit. Hoc ipsum vero ab Authore harum objectionum mihi absolute jam negatur; sed videamus num contrarium hujus rei probet. Dicit primo: Fieri enim potest, ut aliqua certa portio quadrantis Circuli vel etiam totus quadrans quadrari possit, etiamsi non detur quadratura generalis cujusvis portionis etc. Quae objectio utique ingenio suo digna et idem prorsus est, quod modo insinuavi, quod nimirum probabile videatur, si curva AFB sit quadrans circuli, quia in publicatione hujus methodi demonstravi, curvam AHD, ope cujus portio quadrantis AFB semper quadratur. esse Mechanicam, et inter Mechanicas curvas infinitae dantur, ubi aliquando aliqua ordinatim applicatarum est Geometrice designabilis (veluti modo declaravi)



quod, inquam, probabile sit, forte hinc aliquam portionem quadrantis AFG aut etiam integrum quadrantem ABC fore quadrabilem, utut AHD sit Mechanica. Verum hoc, quod ab initio objicit his verbis „Fieri enim potest“ per me non aliter interpretari potest, quam quod probabile videatur; nullibi enim hoc demonstrat, adeoque nihil adhuc primo hoc in loco meae sententiae contrarium affertur, et suo loco ostendam, veluti modo promisi, generaliter si curva AFB sit Geometrica, nunquam accidere posse.

Secundo ulterius progreditur: ponatur etenim $AG = x$ et $FG = z$ et $AC = h$, dicit posito curvae AFB naturam talem esse ut sit $4zz - 8hz + \frac{4hhxx - 4hx^3 + x^4}{hh - 2hx + xx} = o$, curvae hujus quadratrix Geometrica AHD haberi non potest, quia cum Theoremate, quod alias exhibui:

$$\begin{array}{l} bzz + caz + eaa \\ \quad + 2dxz + 2fax \\ \quad\quad + 4gxx \end{array} + \frac{ddeaaxx + ccgaaxx + bffaaxx - cdfaaxx - 4begaaxx}{\begin{array}{c} 4beaa + 4bfax + 4bgxx \\ - ccaa - 2cdax - ddxx \end{array}} = o$$

non potest conferri; sed bone Deus! quam miram hic collationem instituit; dicit enim: Manifestum est, collationem non procedere, deberet enim $4hh - 4hx + xx$ coincidere cum aa in $dde + ccg + bff - cdf - 4beg$, indeterminatum cum determinato etc. Quis unquam hominum ipsi docuit hac ratione comparationem instituere; certe qui hac ratione procedent, mihi multa absurda admodum injuste affingent, nec credo quod ullus, qui comparationem aequationum ex Cartesio probe didicit, non statim primo intuitu absurdam hanc applicationem hujus methodi perspiciat, et sane dum haec vel primum spectavi, cogitavi mecum: Quandoque bonus dormitat Homerus.

Tertio objicit et tamen aliunde .... trilineum propositum esse quadrabile, quod denuo non probat; ubi ipsum rogo ut hoc prius mihi demonstret, dum ego comparationem instituam inter hanc suae curvae exhibitam naturam et meum Theorema, prout nimirum decet, et tunc videbimus num curva AHD erit Mechanica aut Geometrica; jam etenim quia res haec aliquo modo prolixa, laborem molestum aggredi non vacat, ubi exitus forte nullius usus et utiliora negotia prae manibus habeam exequenda .....

Caeterum reliqua quae Author in objectione hac recenset, me meaque non spectant, cum ego transcendentali calculo (prout ille loquitur) nullatenus utar, nec de illo plus minusve non sciam, quam quod ille in exponente indeterminatarum quantitatum, quae relationem curvae ad rectam aliquam exhibent, literas, non vero numeros veluti Cartesius et post ipsum reliqui Analystae, adhibeat; quanquam hoc non ob-

stante et quod plurium me non participem fecerit, omnia illa calculo meo Algebraico possum praestare quae ibi refert; nam quod curvas quae Cartesius Mechanicas vocat, aeque analytice possum tractare ac Cartesius Geometricas, satis in illo specimine Anni 1682 ostendi, ubi docui quod eo ipso, dum Cartesius Tangentem alicujus curvae Geometricae designat, ego semper regula perquam generali et expedita, non solum illius curvae Geometricae, sed una et eadem opera infinitarum curvarum ex Mechanicis Tangentes determino. Porro eodem calculo Algebraico, si curva quadratrix curvae alicujus Geometricae sit Mechanica, perfacile possum ipsius naturam aequatione algebraica comprehendere, non solum circuli et hyperbolae, sed omnium curvarum Geometricarum Mechanicas quadratrices easque simplicissimas omnium (cum infinitae tales existant) quae in rerum natura existunt, quod etiam annotatione sexta in publicatione hujus methodi satis indigitavi, ubi insuper singularem harum Mechanicarum quadratricium proprietatem a nemine quod sciam productam insinuavi, quod nimirum certa spatia harum aequalia semper sint spatiis curva Geometrica terminatis. Addam jam quod etiam curva haec quadratrix Mechanica, ope dati spatii curva Geometrica terminati, potest mensurari; quae quidem hic non ideo refero, quod credam cogitationes hujus ingeniosissimi Viri, quas circa calculum transcendentalem formavit, parvi esse faciendas, potius nova prorsus et singularia mihi hinc promitto, cum observem talia a Tanto Viro magni fieri. Verum haec hoc loco recensere eam ob causam coactus quodam modo fui, quia circa finem suae objectionis perhibet, quod harum suarum cogitationum me participem fecerit, quo proinde aliis quoque innotescat, quaenam hac de re sciam, quodque has speculationes nunquam ullo modo prosequuntur, quia meae inclinationi illo tempore nec etiamnum incongruentes esse observavi; ego vero nulla studia soleam tractare, nisi ad quae propria inclinatione me incitari sentio. Gaudio interim non levi perfundor, dum re ipsa sic cognosco, quod pleraque quae tam illustris Vir se praestare posse perhibet, ego quoque methodo mea licet diversa et forte non tam ingeniosa assequi valeam.

Leibniz hat die vorstehende Schrift Tschirnhausens mit folgenden Bemerkungen versehen:

Annotatiunculae ad scriptum Tchirnhusii contra me.

Primum ait se lecta objectione mea gavisum, quod nihil in ea invenerit, quod non antea sibi optime sit perspectum. Verum nisi nota esset mihi egregii autoris moderatio et ingenium, crederem profecto jactatiunculam esse eo tantum consilio adhibitam, ut statim ab initio

sibi praeoccuparet lectores, nam si considerasset et praenovisset quae a me objiciuntur, non asseruisset a se demonstratam hac methodo quadraturae circuli impossibilitatem (quod minime subsistere ostendi) et respondere potuisset ad figuram quam ei ideo in exemplum proposui, ut scilicet ejus quadraturam, quam ego habeo, etiam sua methodo exhiberet, a quo se excusat, nunc ob defectum otii (cum tamen res sit brevis operae) nunc ob inutilitatem talis figurae, cum tamen ejus utilitas in eo nunc consistat, quod lapidis lydii instar servit ad methodum talem examinandam, hunc enim in finem expresse eam excogitavi. Quod vero postulat, ut ipsi quadraturae meae pro hac figura demonstrationem prius communicem, ut eam postea ex sua quoque methodo derivare possit, non video quo jure nitatur. Equidem tantillam rem amicissimo Viro, cui tot alia majoris momenti communicavi, serio negare ridiculum foret, sed cum nunc quasi ludendo inter nos certemus (ita enim hoc totum accipio, cum nec ejus nec mea magnopere intersit) liceat chartulas lusorias meas tantisper occulere.

Cum ait ab amicis suis non iri creditum, quod alius eum hujus methodi participem fecerit, eaque in parte se esse securum, gloriolae cujusdam captationem sapere crederem, nisi ut dixi meliora de autore opinarer. Non tamen ideo candorem ejus in dubium voco, sed memoriam, nam jam multis ab hinc annis cum ambo Parisiis essemus, hanc ipsam Methodum aliaque multa ei indicavi, sed tunc ille longe meliorem se proprio marte sperare prae se ferebat, quod non ita explico ac si studio tunc declinaverit ut multis post annis tanquam per se inventam producere posset, sed quod revera tunc ad eam animum non attenderit. Uter autem nostrum a publicandi sua festinatione et ut vocat famae captandae stultitia magis abfuerit, judicent qui sciant me quae in Actis Lipsiensibus publicavi et innumera alia quibus famam majorem obtinere forte non difficile erat, revera nonum, ut Horatius ait, in annum pressisse, et nisi amici Lipsienses gratam rem sibi fieri testati essent submissione hujusmodi meditatiuncularum, forte nec nunc producturum fuisse; nonnulla etiam ingentem applausum nacta publicasse, quorum nec nunc quidem autor noscitur. Non tamen reprehendo, si quis gloriam quam meretur sibi vindicet, et si quis subinde limites excedat, ut fecit amicus, qui se veterum ac recentiorum inventa longe superasse putat in eo, quod ego tanquam imperfectum necdum publicatione dignum judicabam, veniam facile dandam puto.

Quod ait, si mecum tantum per literas ageret, evidenter mihi monstraturum, quam non esset reus culpae, quam videar ei imputasse. Id equidem suo loco relinquo; haberem enim fortasse evidentiora non tam ad culpam ei impingendam, a quo absum, quam ad jus meum, si tanti

esset, asserendum. Caeterum generalia me tantum dixisse, scilicet quod ista habeam in potestate, non vero monstrasse modum, miror asseri, cum plus centies amicus viderit methodum meam per differentias perveniendi ad quadraturas, dum scilicet series, cujus summa quaeritur, debet esse differentialis seriei summatricis quaesitae, a quo non differt Methodus quadraturarum quam publicavimus. Sed quoniam tangentium et differentiarum inquisitio coincidit, ille tunc dicebat, se quaerere aliam quadrandi methodum a tangentibus independentem; nunc vero ad illam ipsam postliminio reversus est et recte fecit.

Catalogum deinde texit eorum quae requirantur, ut qui in Methodum istam incidat, et pleraque ex illis sibi non potuisse esse ignota ostendit. Sed aliud est principia nosse, ex quibus aliquid inveniri potest, aliud invenire. Cartesius poterat invenire modum curvas rectificandi, et tamen eum impossibilem putavit. Unum fatetur maximi momenti esse, quod et monueram, scilicet demonstrare viam qua utimur esse talem, ut si res secundum illam non succedat, nec secundum aliam possit succedere, et hoc certe sibi a me non fuisse communicatum, sed a se proprio marte inventum. Verum intelligenti Methodum haec consequentia est manifestissima, nam si algebraice per communem aliquam regulam quadrari potest figura, necesse est ejus lineam quadratricem esse algebraicam, seu ipsam quadrandam esse alicujus lineae algebraicae differentialem.

Sapienter autem facit et ex objectione mea se profecisse ostendit, quod subjicit ad Methodi hujus perfectionem aliquod amplius requiri, nempe ut ostendatur non tantum generaliter et indefinite datam quamvis figuram quadrari aliqua communi methodo non posse, sed nec posse ejus portionem quadrari in specie methodo aliqua peculiari. Id ipsum scilicet ego objeci, verum hujus praecautionis nullum in ejus edito Schediasmate reperitur vestigium, sed quia probaverat non dari quadraturam circuli portionumque ejus indefinitam, quod dudum constabat, sine haesitatione concluserat impossibilitatem quadraturae totius circuli, in quo argumentandi modo et Jac. Gregorius, insignis Geometra, olim lapsus erat, quemadmodum recte a Viro celeberrimo Christiano Hugenio fuit observatum. Nunc vero amicus a me admonitus de conclusionis infirmitate dicit, se habere arcanam rationem hoc ipsum supplendi ac demonstrandi, quod nulla portio figurae algebraicae methodo peculiari quadrari posset, quando non datur Methodus quadrandi eam indefinita, seu quando non datur linea quadratrix algebraica. Si hoc tunc, cum sua ederet, admonuisset et demonstrare suo tempore promisisset, non fuisset vitiosa argumentatio, et cogeremur credere animadversam ei rem hanc ante admonitionem meam. Nam haec assertio nova talis est, ut non

facile alicui in mentem venire atque a lectore sponte suppleri possit, et sine ea argumentatio plane imperfecta est; ideo tunc non debuisset praeteriri. Nolo tamen multis de hoc disputare, modo dein invenerit ejus assertionis demonstrationem; non refert quam mature invenerit, sat cito, si sat bene. Certe si hoc demonstrabit, praestabit rem maximi in Geometria momenti, et tum demum fatebor eum Methodo meae aliquid insigne et mihi hactenus ignotum adjecisse. Cum dixi fieri posse, ut totus circulus vel determinata quaedam portio quadrari possit, licet linea quadratrix algebraica circuli non detur, non volui asserere totum circulum revera esse algebraice quadrabilem, imo ne quidem id esse probabile, sed tantum argumentationem amici non prohibere, quo minus pro quadrabili adhuc ab aliquo haberi posset.

Porro ut argumento saltem ad hominem valido argumentationem ejus revincerem, attuli exemplum figurae, cujus quadraturam specialem dare possum, quae tamen generalis quadraturae non sit capax, ut secundum theoremata ab ipso publicata. Hoc argumentum est, ut dixi, ad hominem tantum, nam revera adhuc dubito an illa Theoremata sint satis generalia recteque constituta, quia jam aliquoties notavi ingeniosissimum virum nonnunquam in se ipsum indulgentiorem esse, et subinde aliqua magni momenti in re analytica a se inventa putasse non sine aliquo in me dissentientem stomacho, donec intellectis rationibus meis errorem agnovit. Certe suasor ero omnibus in analytica arte versantibus, ne Methodo alicui fidant, nisi eam compluribus exemplis comprobaverint, facile est enim in abstractioribus istis processibus labi. Quod vellem amicus non in his tantum, sed in aliis quoque a se promissis non neglexisset.

Sed admissis ejus theorematibus non video, quomodo argumentum ab exemplo figurae quam attuli, effugere possit. Secutus eram methodum ab eo praescriptam, et quia in exemplo z non assurgebat ultra zz, adhibui aequationem ejus ad zz pertinentem et eam cum aequatione figurae meae contuleram. Ille in comparatione instituta me dormitasse asserit, et sane fateor me tunc festinantem ob multas rationes praevidentem quod comparatio succedere non possit, inter comparandam paulo rigorosius quam par esset processisse. Sed cum postea instituerem comparationem quam accuratissime, eodem modo non procedere comperi, quod experietur aliquando, cum ipse aequationis meae cum sua comparationem instituere et quadraturam curvae a me propositae quaerere volet. Res enim et facilis, nec ab eo declinari debet, si Methodus ejus tam perfecta est, quam ab ipso venditatur, atque inde melius de perfectione ejus judicabimus, quam si (quod postulat) ego ipsi prius figurae

a me propositae quadraturam a me inventam communicem, ut eam postea tanquam ex sua methodo deducere possit.

Ait adhuc aliam objectionem superesse a nemine sibi communicatam, cui demonstrative satisfacere possit. Fortasse posterioribus cogitationibus deprehendit, dubitari posse an aequationes ab ipso pro quibusve gradibus assignatae sint adeo universales ac crediderat et an non sit adhuc aliquid addendum. Quod ego sane suspicor, sed nondum totam rem de integro resumere vacavit.

His se et Methodum ipsam et jus in eam suum satis vindicasse putat, sed judicabunt harum rerum periti utrius potius credenda sit Methodus, ejusne qui veras ejus rationes limitesque cognovit et de ea moderate sensit, an ejus qui usum ejus longius ostendit quam extra paralogismum licet et nimia pollicetur. Certe non vereor ut quisquam ex praestantioribus Geometris in edito illo schediasmate impossibilitatem quadraturae circuli ab eo ostensam magnum illud problema tandem absolutum putet. Et fortasse ipsemet (quem ego inter praestantissimos Geometras numerare non dubito) idem judicasset, si haec demonstratio ab alio ei fuisset oblata, nam in nostris solemus esse faciliores; sane maximis ingeniis, inter quae ipsum esse semper judicavi, id evenire potest, ut animi vivacis impetum sequentes aliquando labantur.

Caeterum methodus mea versandi circa quantitates algebram transcendentes non tantum ut ipsi videtur in eo consistit, quod utor exponentibus indeterminatis, sed etiam in calculo differentiali, cujus fundamenta et specimina amicissimo Viro saepissime communicavi, in quo quidquid hactenus circa curvilineorum dimensiones et Tangentes inventum est, et alia multa nondum alibi inventa continentur. Sane, quod ait exempli gratia se posse curvam transcendentem Algebraicae quadratricem metiri seu in rectam extendere per spatiorum curvae alterius Algebraicae dimensionem, id in calculo meo differentiali tam est facilis ut vix moneri mereatur, nam si ordinata figurae algebraicae quadrandae seu differentialis sit z, tunc ordinata figurae, cujus spatia serviunt ad curvam quadratricis metiendam, erit $\sqrt[2]{aa + zz}$. Et quod ait a se inventum certa curvae quadratricis transcendentis spatia semper aequalia esse spatiis curva quadam Algebraica terminatis, si scilicet differentialis ipsius quadratricis sit Algebraica, id ego non tantum de certis, sed et de omnibus asserere possum, fluitque ex illis quae dudum et aliis fuere nota. Sit Trilinei orthogonii quadrandi cujuscunque altitudo h, abscissa inde a vertice x, ordinata y, et ordinata figurae algebraicae cujus spatium trilineo quadratricis respondenti aequale est, erit $y - \frac{xy}{h}$. Scilicet

ista omnia quae amico magni momenti visa sunt (. . . . . . est quod ait se infinitarum transcendentium tangentes eo modo quo algebraicarum exhibere) apud me facillima sunt et levis armaturae; illud laudarem mirifice, si posset efficere, quod ego nondum praestiti, ut liceat quadraturas reducere ad dimensiones curvarum, seu ut semper curva Algebraica reperiri possit, ex cujus dimensione supposita, possit datae figurae algebraicae haberi quadratura. Hoc ego inventum maximi facerem, et si quid possem apud illustrem amicum, hortarer eum potius ut vere nova aggrederetur quam uti hactenus saepe facere visus est, actum ageret, nam praeter illa quae de focis praeclara et suo ingenio digna habuit, in caeteris quae probo nihil quod mihi quidem novum sit agnosco.

Tschirnhaus kam noch einmal in der Abhandlung: D. T. Additamentum ad methodum quadrandi curvilineas figuras aut earum impossibilitatem demonstrandi per finitam seriem (Act. Erudit. Lips. mensis Septembr. 1687) auf den in Rede stehenden Gegenstand zurück. Leibniz hat dazu folgende Antwort entworfen:

Responsio G. G. L. ad Dni. T. additamentum mense Septembri 1687 in Actis publicatum.

Cum additamento hoc accuser aliquid eximio ejus autori praeter meritum imputasse, reponendi nonnihil imposita fuit necessitas. Scilicet cum antea videretur asserere et agnoscere consequentiam ab impossibilitate Quadraturae Generalis ad impossibilitatem Quadraturae specialis, et ex hoc solo sibi magnum problema Quadraturae Circuli terminasse videretur, nunc cum veritatem instantiae meae post aliquot demum annos feliciter deprehendisset, verba sua olim posita optimus eorum interpres aliter intelligi jubet, addens se illa tunc certis de causis studio ita ut nunc facit explicare noluisse.

Ego qui nemini nedum amico candorem semper professo jus sententias suas exponendi derogatum ire volo, nihil haberem quod admonerem, nisi post tantum temporis intervallum demum accusarer ipsi praeter meritum imputasse quae credo tunc nemo aliter accipere poterat nec ipse declinarat. Diserte enim ipse ait in Actis Octob. 1683 p. 433: Si curva illa (quam ibi affert cujus ope quadratura quaeritur, quam curvam quadratricem appellare soleo) sit mechanica, tunc spatium tam quoad totum quam omnes suas partes fore mechanice quadrabile, seu quadraturam hujus Geometrice non posse inveniri: Unde p. 436 ex hoc solo quod linea illa pro circulo est

mechanica, statim infert quadraturam totius quoque circuli prout a Mathematicis quaeritur esse impossibilem. Quae vero nunc affert, cum his e diametro pugnare videntur. Agnoscit enim p. 525 anni 1687 mense Septembri: quadratricem figurae a me in instantiam propositae esse transcendentem sive mechanicam, et tamen fateri tandem cogitur, figuram illam esse quadrabilem secundum totum. Vereor etiam ut nova sententia sit priore melior, vult enim nunc, hoc habere figuras Geometricas ordinarias prae Transcendentibus, ut in illis data quadratura speciali detur si non generalis, attamen indefinita, idque illustrat exemplo Lunulae Hippocratis; sed ego puto, nec hoc forte semper succedere*), et praeterea etiam excogitari posse lunulas transcendentibus lineis comprehensas, quarum partes secundum certam tantum aliquam regulam assumtae indefinite sint quadrabiles, nec arbitror in his geometricas ullum habere privilegium, aut a Dn. T. rationem discriminis talis ullam reditum iri.

Caeterum videri possit Vir ingeniosissimus non tam Methodo aliqua universali pro quibuscunque figuris valitura, quam ex hoc ipsa consideratione Lunulae Hippocraticae tandem in instantiae meae veritatem ac figurae dimensionem a me tunc exercitii causa, ut methodi suae generalis assertam praestantiam experiri posset, suppressam incidisse. Nam et ipse eam figuram ex Lunula fabricaveram, instantiam enim ipsi opponendam quaerenti, in mentem venit Lunula quae tota quadrari potest, partes autem omnes non possunt; nempe in fig. 2 ab ipso in proximi Septembris Actis 1687 p. 526 posita ordinatae ipsius Lunulae quae si producerentur ad BF cornua connectentem forent normales, ordinatim ad dictam rectam BF translatae, a B usque ad G statim dabunt figuram quam in Actis Maji 1684 proposui et quae Sept. 1687 p. 525 rursus exhibetur. Unde facile erat judicatu, generalem cujusvis partis dimensionem pendere a quadratura circuli (quemadmodum et partes Lunulae respondentes), totam vero figuram (quemadmodum et dimidia Lunula) aequari Triangulo AGB dictae figurae 2.

Haec autem adducere volui stimuli sive incitamenti gratia, ut si falsa est suspicio mea, nec D. T. casu et per Lunulam (in cujus contemplatione se hic occupatum fuisse prodidit) sed generali aliqua arte, ut pollicitus fuerat, meae instantiae veritatem invenit, reapse nos producta

---

*) Si duae lineae ordinariae, quibus comprehenditur Lunula, tantum in casu totalitatis sint condimensurabiles, non procedet quod ait Dn. T. et licet tota lunula sit quadrabilis, non ideo tamen indefinitae partes quadrabiles poterunt assignari. Bemerkung von Leibniz. Er hat hinzugefügt: Dieses auszulassen (für die Abschrift), habe es nur für mich pro memoria annotiret, und ist zu seiner zeit zu expliciren, wenn M. Tsch. wieder antworten solte.

Methodo sua cum fructu publico convincere possit. Quin etsi nondum haberet talem artem, ego tantum ipsi tribuo ut nervos ingenii intendentem reperire posse putem, atque ita conflictus hic noster in communem utilitatem cedet. Credo et ego me vias habere pro specialibus Tetragonismis universales, sed nondum ita meditando calculandoque perpolitas, ut usus sit in promtu.

Die Correspondenz zwischen Leibniz und Tschirnhaus ist bis zu Ende des Jahres 1692 unterbrochen. Der Brief Leibnizens, durch welchen sie wieder angeknüpft wird, fehlt.

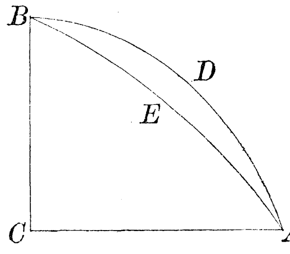
XXV.

Tschirnhaus an Leibniz.

Deßen angenehmes von 16 Decembr. de dato Hannover habe den 12 Januarii alhie erhalten, über deßen contente höchlich erfrewet bin worden. Daß selbter aber annoch die verlangte processe, die volatilisation des goldes und das sal vegetans nicht erhalten, wundert mich nicht wenig, den sobald verstanden, daß selbiger die von mir zwar einmahl communicirten processe verlanget, aber nicht wieder finden können, so habe solche gleich an Hrn. Findekellern in Dreßen communicirt . . . . .

Daß Mr. Hugens annoch bey leben und die dioptrique in druck geben wird, welche er so lange zeit versprochen (bereits in commentariis der Geom. des des Cartes) erfrewt mich sehr; zweifle nicht daran daß es was sonderbahres sein werde, wie sein schöner Tractat de lumine et Gravitate, welches inhalt selbst ad Acta Lipsiensia referiret, und war erfrewt daß bereits etliche sachen vorhero schon ad Acta communiciret, ehe seinen Tractat erhalten können, den sonst würde er ohne zweifel gedacht haben, daß etwas von ihm erborget, wiewohlen auch andere proben habe, die gantz evident eben dieses . . . können. Sonsten bin gleichfals in diesen intent die Opticam zu perficiren, nicht sowohl was die Theorie anlangt als die praxin, da sehr zweifle ob leicht iemand auff dieses gefallen was mir hierinne bekand worden. Die Telescopia zu bereiten weiß ungemeine sachen, daß ob sie schon von unglaublicher größe, dennoch gantz accurat können fabricirt werden, und wen ein vornehmer Herr die Kosten wolte dran wagen, ich wolte ein objectivum lieffern, das auff 1000 Fuß so accurat elaborirt, als wir bieshero Tubos haben von 6 schuen, aber solches mit menschen henden zu verfertigen, ist plane unmöglich. Was die Microscopia betrifft, habe angemerkt daß wie wir Telescopia können machen, so indefinite mehr und mehr die entfernten sachen entdecken, so könne es gleichfals mit diesen

Microscopiis geschehen, daß wir indefinite immer mehr und mehr die nahen sachen entdecken, und zwar nicht wie bieshero geschehen, daß man nur kleine theile von großen objectis, sondern dieselbige gantz betrachten könne. Das licht weiß auch so wohl in Telescopiis als in Microscopiis zu augiren, daß ob es gleich sehr dunckel wetter, man doch durch selbige viel klährer und heller als der tag selber ist sehen kan. Endlich den 3ten effect den wir bieshero in opticis gehabt, ein sehr groß augmentum caloris zu machen und dahero alle cörper auff allerhand art vel accidentaliter vel essentialiter quoque zu verendern habe so hoch gebracht, als bieshero nicht gesehen, davon Sie etwas in Actis Lipsiensibus werden gesehen haben. Habe auch bereits dergleichen gläßer 2 ... deren eines Ihro Keyserliche Majestät offerirt, welches den Pater Menegoti sehr oblectirt, und unsern ietzigen Churfürsten, wie den hiervor sehr ansehnlich regalirt worden. Das 3te glaß ist in Leipzig bey Hrn. George Bossen, weiß noch nicht was es vor einen Hrn. bekommen wird, verwundere mich aber daß nicht mehrere nachfrage darnach, da sie doch viel größer an effectum als alle bieshero fabricirte brennspiegel eine beständige politur haben, sehr leicht portatif, indem sie nicht über 36 pfund schwer (wiewohl selbige vor der arbeit wohl bey ettlich und 60 pfund schwer sind) und auff der post eines dergleichen nach Wien ohne schaden überbracht. Endlich auch die strahlen von oben herunter colligiren, daß man solche also infinitis usibus destiniren kan. Ein doppelt ducaten ist in wenigen secunden durchgeschmoltzen, und wird in einer minute zeit in eine Kugel verwandelt, das Asbestum zu einer durchsichtigen glaßkugel (wie den alle fluida und dura in kugeln sich zusammen ziehen), worauß Sie leicht von dem effectu werden zu urtheilen haben. Dieses alles aber verfertige durch eine Maschine, die so simpel (daß nicht leicht glaube daß iemand drauff fallen werde, welches eher geschehen solte wen sie künstlicher und mehr compositer wehre) daß man nur dabey stehen und zusehen darff, wiewohl ein so groß glaß wie ietzo verfertige von einer Leipziger Ellen groß in diametro, nicht unter 8 wochen kan verfertigt werden; ietzo aber habe gantz sonderbahre sachen unter handen, wo die wohl reuissiren, so wird die weld einen newen Nuntium sydereum zu erlangen haben, aber da futuris so noch nicht perficirt, kan nichts gewieses versprechen.



Diesen winter habe mir vorgenommen, die materie de quadraturis zu acheviren; dieweil auff zwey wege, die universal und leichter sind als alles was wihr bieshero gehabt, gefallen, und habe bieshero sonderbahre sachen hierinne entdecket, als zum exempel: datum spatium ADBC curva Geometrica ADB terminatum per aliam curvam AEB in spatia ADBE et AEBC secare quae non solum in ratione ut numerus ad numerum sint, sondern

auch ut linea ad lineam datam; spatii autem ADBC mensura darff nicht bekand sein; und viel andere sachen noch habe entdeckt, die von weit größer wichtigkeit als dieses. Gott verleihe! daß mir zu meinen studiis ein recht otium compariren kan (es hatt aber hierzu nuhmero nach sehr großen hingelegten impedimentis ein groß ansehen) so hoffe, daß in continuatione specialiori meiner Medicinae Mentis noch nützliche sachen dem publico werde entdecken können. Aber in Physicis bin so weit avancirt, daß es unmöglich gedencken darff, den alle weld hielte mich vor einen auffschneider; es sind auch viele sachen die nicht anders als cabalistice kan offenbahren, den ich bin ietzo der gedancken, daß man durch die Cabalam zu den grösten geheimnissen gelangen kan. Sat sapienti. Die Kauffleute kommen ihrer zeitlichen vergänglichen Dinge wegen zu Leipzig auff der Meße zusammen; köndten nicht auch gelehrte leute auß wichtigern ursachen einmahl alda zusammen kommen. Ich bin vielmahl da gewesen und hette mir Dero anwesenheit sehr gewüntschet; solte ich aber die hohe Ehre genießen Sie selbst in meinem hauße zu bedienen, so würde auff alle wege darauff bedacht sein, daß Sie nicht unvergnügt von mir wegzögen. Vielleicht lest der Friede zu, daß einmahl hernach eine tour nach Holland und also Hannover thue. Übrigens glauben Sie, daß selbigen vor den herrlichsten Philosophum den Teutschland hatt, in meinen gedancken alle zeit venerire und u. s. w.

Kießlingswalda d. 13 Jan. Ano 1693.

Luminis natura dünckt mich kan nicht klährer dargethan werden, als per pressionem vividam materiae viel leichter als per undas; darauß den eben klar folget daß luminis motus nicht instantaneus sey, und auch alle colores gar leicht meines bedünckens sowohl die fixi als apparentes.

XXVI.

Leibniz an Tschirnhaus.

Dero erwündschtes antwortschreiben vom 13 Januar habe zurecht erhalten, und nebenst meldung Dero vielen und herrlicher gedancken sowohl M. Hrn. gesundheit und wohlwesen, als auch beharrende gewogenheit daraus erfreulich verstanden, wündsche beständigen und langwierigen verfolg Dero vollkommenen vergnügung von herzen.

Wegen der verlangter Chymischen Experimenten, so sie mir von Paris

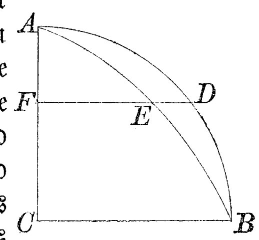
mitgebracht, so ist nicht ohne, daß ich das sal vegetans bekommen, welches ich auch unlängst unter meinen schrifften gefunden, aber volatilisationem Auri habe nicht finden können. Erinnere mich wohl daß sie aus dem Honig gangen, doch möchte den rechten Proceß gern wissen. Man nimt sonst vermittelst des Honigs dem ☉ fluminanti seine schlagende Kraft, daraus glaub ich dieses erfunden worden, indem man so lange abgestiegen, biß man den rechten Punct gefunden, so zwischen dem schlag und fixität das mittel hält, welches ist die volatilität. Werde also verbunden seyn, dafern M. H. beliebt, seinen geneigten erbieten nach mir solche wieder zu schicken.

Was Sie in opticis gethan, schätze gewißlich überauß hoch, zumahl nicht ein ieder im stande, auch nicht fähig ungemeine Dinge zu finden und die schöhne demonstration zu werck zu richten. Was M. H. circa Telescopia und Microscopia verspricht, sind trefliche sachen, so zu bereiten ich wegen des großen daher erwartenden Nuzens Sie selbst höchlich ersuche. Was mag beßeres erdacht werden, als den Microscopiis zugleich Vergrößerung, liecht und ein großes feld geben. Ich schätze dieß höher als einen neuen nuntium sidereum, wiewohl auch solcher so rühmlich als wichtig seyn würde. Hr. Hugenius wird sich darüber zum höchsten verwundern, wenn ich etwas in meinem schreiben an ihn davon melden darff, welches ohne zulaßen nicht thun will. Es scheinet inzwischen, daß dieße instrumenta von der natur daher begrenzet, weil endtlich die stäubgen in der lufft alzu sichtbar werden und die objecta bedecken würden. Doch wenn wir nur noch so weit es thunlich uns diesen grenzen nähern köndten, wäre es schohn genug, zumahlen auch bey den Microscopiis noch zur zeit nicht so wohl wegen der vergrößerung, als liecht und feld, sorge zu machen, maßen jene freylich weit genug bisher zu treiben gewesen, aber mit abgang dieser beyden.

Was die theoriam luminis betrifft, so sind die undae Hugenianae nichts anders als ein gewißer modus pressionem considerandi, doch mit dieser besonderheit daß ein ieder erleuchtete punckt wiederleuchtet. Mir hat sehr gefallen, daß dadurch die lex refractionis so artlich herauß komt secundum sinus. Der guthe Pater Pardies oder auß ihm der P. Ango in seiner dioptrica, haben schlecht bestanden, als sie auß ihrer vermeinten art die undas bey den liechtstrahlen zu brechen, die hauptpunckt herausbringen wolten. Ich wündschte die colores fixos recht ercläret zu sehen ad minimum ex hypothesi apparentium. Nehmlich man nehme vor bekand an die farbe die ein tropfen, oder das prisma gibt, die endtliche ursach dahinstellend, und frage weiter, wie mit deren hülfe beständige durchgehende farben zu wege zu bringen. Ich achte solches thunlich und von großer wichtigkeit.

Ich zweifle nicht, daß noch trefliche vortheil circa quadraturas auß zufinden, und mein hochverehrtister Herr darinn ..... Dero problema: Trilineum datum ADBC ducta curva AEB secare in ratione data, finde gar

schöhn zu seyn; ich habe mich daran gemacht und auch sofort einen weg dazu entdecket. Als gesezt, das Trilineum datum sey der Quadrant eines Zirkels, und AEBC solle seyn zu ADBC wie n zu 1 (da n bedeutet was für eine zahl man will, so hier kleiner als die unität) so nehme man ein lini G welche sey zu FD wie 1 zu 1—n und dann G, CF, DE in continua proportione, so wird man haben E und also die gesuchte lini AEB, welches nicht seze als ich mich gleichsam rühmen wolte alles finden zu können, das M. H. Hr. in diesen Dingen erfunden, denn da fehlet es weit an, sondern nur umb einen versuch zu thun. Ich möchte wündschen vollkommene allgemeine und kurze wege die problemata Tangentium conversa allezeit wenigstens auff quadraturas zu bringen, und dann die quadraturas auff extensiones curvarum in rectas, denn ja natürlicher ist spatia zu messen per lineas, als contra.



Ich habe viel wunderliche grillen in vielen Dingen gehabt, aber die Historico-politica nehmen mir viel zeit weg, wollen doch auch gethan seyn, zumahl wenn man in bedienungen stehet. Ich vermeyne iezo meine Arithmetische Machinam einsmahls recht verfertigen zu laßen. Herr Arnaud, Hugens und andere haben mich etliche mahl deswegen erinnert.

Weil M. H. Hr. so viel liecht in der Naturkundigung erlanget, so bitte ich sonderlich auch auff Medicinam Corporis mit mehreren zu gedencken, und darinn den überschwencklichen nuzen und gebrauch Medicinae mentis zu zeigen. Was Sie sonst de Cabbala gedencken, verstehe ich de Cabbala sapientium, das ist Characteristica, deswegen Sie meine gedancken wißen. Solten Sie aber noch eine andere Cabbalam meinen, so werde erläuterung des verstandes erwarten. Sonst wäre freylich zum höchsten zu wündschen, was Sie gedencken, daß ein forum sapientiae wäre, welches nicht weniger bestehen würde als die Leipzigische Messe. Ein baar arcana lucrifera wären guth dazu, aber darauff muß man nicht warten. Inzwischen können briefe auch etwas thun, aber die solche schreiben können, wie mein hochwerther Herr, deren sind wenig oder vielleicht niemand in Teutschland. Ich zweifle nicht, es werden nach der zeit, da M. Hrn. ich nicht gesehen, Sie noch ein viel größer liecht erlanget haben, zumahl in physicis und da steckts am meisten. Köndte man dermahleins einige guthe abreden nehmen, so zu unser vergnügung und gemeinen nuz dienen möchte, so wündsche dazu gelegenheit von Herzen. [Den guthen alten Hrn. Krafft hoffe bei Uns anzubringen, maßen bey Churfürstliche Durchl. ihn vorzuschlagen mich erkühnet, darauff seine gedancken angehöhret und ziemlich wohl aufgenommen worden. Schade ist, daß er nicht zwanzig Jahr jünger; doch ist er noch frisch genug. Er hat große Experienz in vielen Dingen]. Es ist schade, daß man so wenig auff das nöthigste dencket, man stifftet eine Academie oder Schuhle

über die andere, aber die darinn eigentlich realia tractirt würde, soll noch fundiret werden. Schade ists, daß vor etlich hundert jahren einem vor heilig gehaltenen Mann nicht im sinn gekommen aus dem grund der christlichen liebe, umb die arme Krancke umbsonst zu versehen, einen Orden der Erzte oder Naturkündiger zu stifften. Dem Orden würde die welt offen und zu dienste stehen, zumahl wenn trefliche leute darinn wären, die ihr gemüth auff nüzliche entdeckungen richteten und natürliche wunder thun köndten. Aber was halt ich mich auff mit wündschen M. H. Hr. als eine zierde unserer zeit scheinet solche Dinge dermahleins leisten zu können, die ich kaum mit wündschen erreiche. Gott erhalte ihn dazu viele und lange jahre bey vollkommenen kräfften, und gebe mir das glück und die vergnügung, deßen hochgeschätzte Freundschafft noch lange und viel und so es möglich näher und öffter zu genießen, der ich etc.*)

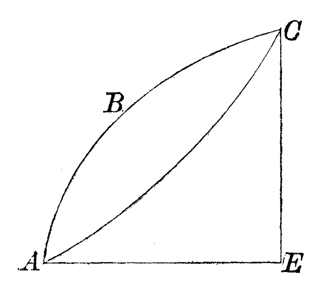
XXVII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Sie werden sich in etwas wundern, daß auff Dero letztes sehr obligentes zuschreiben nicht eher geantwortet; theils hatt verursachet, daß den verlangten Process erst vor weniger zeit von einen gutten freund wieder erhalten, theils daß auf ietzige Meße gedacht, alwo solche meine antwort den Hrn. Professor Mencke selbst zustellen wollen, damitt selbige richtig erhalten wurde; bin aber nuhmero so viel obruiret wegen vielen zuspruchs, daß zwar . . . Process verlangter maßen übersende, aber hierbey nicht wohl meine gedancken zusammen bringen kan auff eines und das andere außführlich zu antworten, melde also mitt wenigen vor diesesmahl, daß die Cabalam nur schertzweise angeführet, als eine der größesten wießenschaften, dadurch man ohne mühe zu den verborgensten geheimnüßen gelangen kan, weil die Juden solches vorgeben, ich aber auff solche weise interpretire. Cabala ist so viel als traditio, da gelehrte leute einander was sie mitt vieler mühe erfunden und manchmahl wegen der so vielen Ignoranten, die doch große leute sein wollen, nicht eben so publick machen, einander oretenus und ohne alle ambages communiciren, und zweyfele nicht, daß wan die hohe Ehre und satzsahmen faveur des Glückes haben sollen, dessen Wertiste persohn alhie zu sehen, ich würde dieser cabalae so große effecta verspühret haben, daß sie nicht unbillich allen bieshero erlernten würde mitt

*) Ohne Ort und Datum.

recht vorziehen können. Was den Methodum quadraturarum anlangt, auff den vor ettlich wenigen jahren gefallen, so erfordert solcher keinen großen verstand, au contraire es ist solcher leichter als alles was bieshero geleßen oder selbst erfunden, und durch solchen kan alles bieshero erfundene gantz leicht resolviren, ja dergleichen sachen, die durch keine bieshero gebrauchte manier weiß zu entdecken. Deßen habe ein specimen communicirt, in dem gesagt: Sit quaecunque curva Geometrica ABC 1) sive spatium ABCE sit quadrabile sive non, 2) nicht durch viele unterschiedene curvas ADC (wie Wallisius, Gregorius Prop. 62 Geometriae suae universalis, und mein hochgeehrtister Herr ietzo praestiren, da stets eine andere curva producirt wird, nachdem die proportio spatii ABDC ad ADCE anders und anders ist), 3) nicht allein da proportio spatii ABCD ad spat. ADCE wie numerus ad numerum gegeben wird (welches bieshero in Circulo oder Spirali und vielen andern curvis praestirt worden) sondern auch da proportio ist ut linea data ad datam lineam, idque 4) infinitis modis facillime praestare, welches hier weitläufftiger deduciret, damitt Sie meinen mentem assequiren, den vielleicht zu ander zeit gar obscur werde exprimirt haben. Unterdeßen obschon nicht Dero werthiste praesenz alhie genoßen, so habe iedennoch bald anfangs etwas von Dero parte meliori zu ersehen gehabt, den Codicem nehmlich Juris Gentium, und etwas so de seriebus infinitis den Actis inserirt worden; wüntschte von hertzen, daß Sie noch lange zeit dem publico zum besten in gutter gesundheit sich befinden mögen, so zweifele nicht daß selbiges nebenst mir sich hoch über Dero ingenieuse specimina wird zu erfreuen haben. Ich recommandire mich ietzo der beständigen faveur etc.



Leipzig d. 7 Maj. An. 1693.

XXVIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Daß selbiger die güthigkeit gehabt mich mit den verlangten Chymischen process zu begünstigen, deswegen bin dienstlich verbunden. Weilen Mons. du Clos todt, und die andern bey der Academie Royale nichts davon wißen wollen, so würde ich ohne diese hülff den schaden, so eine Mauß meinen papier gethan, nicht haben ersetzen können.

Ich zweifle nicht, der Methodus Quadraturarum, deßen M. Hr. gedencket, werde von großer Wichtigkeit seyn, und auch noch viel wichtigere Dinge nach sich ziehen, als die sectionem Trilinei in data ratione, welches zwar auch sehr important und zu zeiten dienen kan ad quadraturas, wenn nehmlich die linea data und die linea secans con-quadrabiles seyn.

Mein Methodus serierum infinitarum*), der unlängst in die Acta kommen, ist zwar bei mir uralt, und habe ihn bereits in dem tractatu Quadraturae Arithmeticae, welchen Mein Hochgeehrtester Herr in Paris gelesen, in der that gebrauchet, habe ihn aber immer verschoben herauszugeben, weil ich einsmahls gemeinet etwas ausführliches von diesen Dingen herfürzubringen. Nachdem aber meine mehr und mehr anwachsenden distractiones wenig hofnung dazu mir übrig laßen, und gleichwohl diese Methodus universalissima, und ad praxin ipsam perficiendam gerichtet, also ad utilitatem publicam gereichet, so habe sie endlich gemein machen wollen.

Ersehe nunmehr was Sie durch ihre Cabbalam gemeinet, und muß bekennen, daß dienliche anstalt dießfals wohl zu wündschen wäre. Denn die publicatio der besten Dinge offtmahls bedencklich, ich auch selbst nicht alzu gern noch geschwind dazu komme; es giebt freylich nicht nur leute, so ein und ander wohl gemeintes übel aufnehmen, sondern auch etliche undanckbare gesellen die sich mit frembden federn schmücken, und wenn sie einmahl etwas von den Methodis secretioribus erschnappet, sich damit groß machen wollen, gleich als ob alles von ihnen hehrrühre. So hat es unser Hr. Ozannam gemacht, der sich nicht entsehen, die demonstrationem meines Theorematis Quadraturae Arithmeticae, die Mein werthister Hr. (habender guther macht nach) ihm oder anderen zu Paris mitgetheilet, in seinen Tractatum Geometriae practicae einzurücken, allwo er nicht einmahl den inventorem des Theorematis meldet, und von der demonstration wesen macht, als ob er sie gefunden, da er doch nicht einmahl die darinn enthaltenen propositiones fortsetzen und deren gebrauch erweitern können, wie leicht es auch an sich selbsten ist.

Alleine zu rechten gebrauch der Cabbalae würde gehöhren eine Societät recht gelehrter und wohl gesinter Leute; ich verstehe aber eine Societät nicht wie sie insgemein seyn, auch wie die Englische und Naturae Curiosorum ist, so kein festes band, auch keinen Nachdruck noch Dauer haben, noch die von großer Herrn besoldungen unterhalten werden, wie die Universitäten, Collegia und die Academie Royale zu Paris, denn da werden gemeiniglich durch die Hofleute allerhand Personen hineingeschoben, die nicht auß guthem eifer und lobesbegierde, sondern umbs geld arbeiten, ja hernach aus faulheit und neid das guthe verhindern, sondern eine solche societät die ihren eigenen fundum

*) Supplementum Geometriae practicae sese ad problemata transcendentia extendens, ope novae Methodi generalissimae, per series infinitas (Act. Erudit. Lips. an. 1693).

hätte, wie die Clöster und Orden der Römischen Religion. Nun ist zwar bei den Evangelischen nichts dergleichen, doch wär es nicht ohnmüglich, wenn einige Reiche und lachende Erben habende von verständigen, wohlgesinten, ehrliebenden Personen beredet werden köndten, das ihrige zum theil oder gänzlich zu einem so wichtigen werck zu wiedmen, vermittelst deßen ich versichert bin, daß zum besten des menschlichen geschlechts in 10 jahren mehr auszurichten, als sonst in hunderten nicht geschehen wird. Ich bin vor vielen jahren mit diesem Einfall schwanger gangen und sehe fast allein diesen weg übrig etwas rechtes auszurichten, nachdem der andere an sich selbsten leichtere, nehmlich einen großen Fürsten, der dem werck allein gewachsen, dazu zu vermögen bey gegenwärtigen elenden Zeiten, da sie fast selbsten alle mit einander in weitläufftigkeiten vertieffet, nicht zu hoffen; dieser vorschlag aber ist so bewand, daß er mit einem geringen den anfang nehmen und bald zu etwas ansehnliches erwachsen köndte, denn etliche Exempel andere aufmuntern würden. In Holland glaub ich solten sich dergleichen leute finden, wiewohl auch Teutschland einige an hand geben möchte. Ich weiß, wie sehr M. H. H. sich allgemein nüzige Dinge angelegen seyn lassen und wie leicht alles begreiffen, habe also dieses noch in vertrauen Dero erwegung und urtheil unterwerffen wollen; bitte die gedancken darauff gehen zu laßen und mich einsmahls mit wiederantwort zu erfreuen, der ich Dero etc.*)

XXIX.

Leibniz an Tschirnhaus.

Janvier 1694.

Je profite de la coustume de la nouvelle année pour vous asseurer de mon zele, et je prie Dieu, qui fait tout pour le bien, de vous donner un si grand nombre d'années heureuses, que vous puissiés augmenter considerablement les vrais tresors du genre humain, c'est à dire les sciences. Il convient encor aux philosophes de prier Dieu, car bienque tout soit écrit là haut, il est encor écrit dans ce grand livre des destinées, que les prieres des bons seront considerées.

Ma Machine Arithmetique dont vous avés veu l'echantillon, sera bientost mise à 12 chifres.

Vous aurés vû ma construction generale des Quadratures, mise dans les Actes de Leipzig**), par ce monvement, dont feu Mons. Per-

*) Ohne Ort und Datum.

**) Supplementum Geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium Tetragonis-

raut m'avoit fait la proposition. Il me semble qu'il vous en avoit parlé aussi. Cela joint à mon autre machine, dont vous avés vû le dessein, qui sert à construire toutes les Equations, n'avance pas mal dans la Geometrie.

Mais il est quasi temps que nous commencions à tourner nos pensées à la physique. Vous ne m'avés rien repondu à une pensée dont je vous avois parlé d'une societé ou communication au moins, mais un peu autrement reglée que celle, où il y a trop de mercenaires qui ne font ses choses que par maniere d'acquit pour gagner leur pension, ou trop de curieux volages qui considerent les sciences non pas comme une chose tres importante pour le bien des hommes, mais comme un amusement ou jeu. Vostre Cabale m'en avoit donné l'occasion, mais vous aviés brisé là dessus. Je vous supplie de me donner un peu de part de temps en temps de vos excellentes pensées et de me croire etc.

P. S. Vous aurés vû les echantillons de l'Historia Annalis Medica, que Mons. Ramazzini, Medecin de Modene, a accordée en partie à mes exhortations. Il est important, qu'on imite ce dessein partout. On l'a inserée dans les Ephemerides des Medecins d'Allemagne avec ma lettre.

XXX.

Tschirnhaus an Leibniz.

Meine Circkul, wie man saget, sind mir bieshero zimlich verrücket worden oder turbiret: Immaßen etwan vor 18 wochen dem Höchsten gefallen mir ein todtes Töchterchen einkommen zu laßen. Meine liebste, eine Frau die mir nicht besser wüntschen können, verstarb mir ingleichen, wie auch mein ältester Sohn, der mirabile Ingenium war, daß offt gedacht ich würde noch einmahl zu ihm in die Schule gehen müßen, und das alles geschah innerhalb noch nicht 24 stunden: Hier war es gutt, bey gutten Tagen sein Gemüthe wohl wieder alle schweren casus präservirt haben, und Gottlob! mir that es so wenig an meiner Gemüthsruhe, daß viele denen bekand wie vergnügt wir gelebet und wie hoch diesen Sohn geschätzet sich nicht wenig gewundert haben; daß meiste war die so vielen besuchungen, condolenz Brieffe, und endlich das begräbniß, welches

---

morum effectio per Motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data Tangentium conditione (Act. Erudit. Lips. an. 1693).

hier zu lande nicht kleine beschweerung sind; doch Gottlob! auch alles dieses ist vorbey, und bin bieshero sehr tieff in Studiis drinne gestecket, und gehe wege die nicht weiß, ob solche von vielen betretten worden, das also ietzo gelebet, als wenn kein Mensch als ich nur allein in der weld wehre; gestern aber hatt mich Dero angenehmer Brieff wie auß einen schlaff auffgewecket, das also mir vorgenommen gleich drauff zu antworten, und dan wieder an die consuetos labores mich zu wenden; wobey dan anfangs mein hertzlicher wuntsch ist, daß ein so unschätzbahres herrliches subjectum als mein Herr ist, viele Jahre annoch bei unß erhalten, alle impedimenta die im wege stehen auffs beste weggenommen, und also nebenst der höchsten vergnügung die man bey entdeckung der unbekannten warheit befindet, auch dem Publico durch deren communikation bestens können gedienet werden: Höhre sehr gerne daß Dero machina Arithmetica zu größer perfection kombt, und wird wohl schon genug sein, wen solche bies auf 12 Zieffern kommt, da in praxi nicht leicht dergleichen exempel vorkommen; Ich bin auch auff eine dergleichen machinam gefallen, habe aber solche noch nicht gäntzlich acheviret, ist aber in totum diversa ab hac, denn bey dieser keine rotae; gehet auch alles aus einen andern fundament: Was die Curven anlangt, darzu Mons. Perault anlaß gegeben und die schöne inventa so bieshero darauß deriviret, so hatt Herr Hugenius mir davon erwähnung zu Paris gethan: Ich considerirte aber solche nicht hoch noch aestimirete dieselbigen damahlen; aber ietzo aestimire dieses nur daran, daß selbige deßwegen hoch zu aestimiren, dieweil auff diese art alle curvae una et eadem generatione formari possunt; weil nun alle generationes hoch zu aestimiren, so sind absonderlich dieselbige von großer wichtigkeit, so generationes infinitarum, ja omnium curvarum exhibiren; aber daß alle quadraturae hernach herausfolgen, ist nothwendig; den wer mir alle curvas formirt, der giebt mir auch alle quadraturas, welches Meinem Herrn nicht unbekandt sein kan, ob es gleich nicht ein ieder weiß und also rede von der sache in se considerirt, wan ich aber respective dieselbe ansehe, das ist ob wir eine beßere formationem omnium curvarum haben, so achte solche nicht hoch; den es ist gewieß daß die formatio omnium curvarum per centra seu focos auff die arth wie solche in der Medicina Mentis vorgestellet, viel vortrefflicher sey und habe alda sonderbahre effecta derselbigen nur deßentwegen erzehlet, damitt einige auffmerksam würden und der sache beßer nachdencken lerneten und sich auch darauff applicirten, wie Mein Herr, und die Bernoulli bereits schon etwas gethan haben; den hier kommen nicht allein alle quadraturae auff die leichste art herauß, sondern sachen, die quantivis pretii, und deren gantz unerwähnet und die bieshero kein Mensch noch nicht inventirt; ja Circuli Quadratura wo sie möglich kombt absolute herauß, wie es den eine große apparenz hatt auß dem was bieshero entdecket, daß solche, und alle quadraturae möglich, licet curva clausa sit nec ne; waß hierin vor sonderbahre sachen entdecket, wird kein Mensch

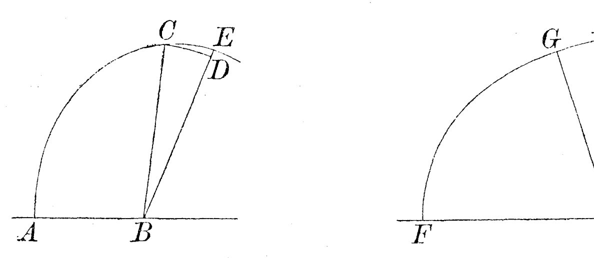
glauben; ja in Conicis Sectionibus habe circa dimensionem gantz neue und schöne Theoremata und eine Methode, da una et eadem via ac Circulus Archimedea ratione quadratus alle curvae quadrirt werden, und welche nicht möglich durch diesen weg zu quadriren, da habe gleich ein indicium infallibile, daß es nicht sein kan; den hierdurch finde nur alle quadraturas, die curvam tam quoad totum quam omnes partes quadriren; hernach habe eine andere Methode, dadurch finde alle specielle quadraturen, das ist wen zum exempel nur gewieße Theile einer Curve quadrabiles wehren, also wen der Circulus zum exempel vielleicht gantz und etwan ein theil absolute quadrabel, so muß es nothwendig herauß kommen. Diese Methode ist sonderbahr, welches Sie darauß schließen werden; ich muß umb eine Curvam zu quadriren, 4 Curvas haben; zum exempel wen ich die Parabolam Archimedeam quadrire, so kommen 4 Parabolae herauß, und durch deren hülffe werden nur partialia spatia von derselben quadrirt; wen ich den Circul oder Ellipsin nehme, da kommen 3 Ellipses herauß und eine Curve 4ti gradus die sonderbahr ist: Aber dieser weg ist so unbetreten; finde auch nicht die geringsten vestigia darvon, daß also sehr lente fortgehe, indem mir viele sachen hier zu eruiren sind, die man bieshero nicht gehabt, wen solche vorhanden, so würde es sehr leicht zu thun sein. Wiewohl weilen nuhnmero ein trauerjahr, da ohne dem nicht in gesellschafften groß komme, so will es wohl anwenden; den ich wehre die Mathesin sehr gerne loß, damitt mich unice der Physicae ergeben köndte, in welcher unglaublich avanciret, daß alles geringe ist was der Des Cartes und andere nach ihm gegeben, welches zwar Herr Newton noch Herr Hugenius glauben würden, auch solches wohl vor eine aufffschneiderey halten; den auff die wege wie sie gehen, so werden wir noch lange in Physicis viel herrliche sachen nicht haben, indem es durch die Mathesin unmöglich zu eruiren, und köndten sie leicht sehen, daß ihre wege nicht richtig, weil sie so schwer, die Physica aber so leicht sein muß, daß nichts leichteres kann concipirt werden, welches auch meinen Principiis nach gantz klar ist. Nach diesen Principiis habe eine gantze neue Chymia, da absque igne, ungemein schöne sachen entdecke, und wen das feuer darzu gebrauche, so geschiehts nur, daß nicht so lange Zeit zu brauchen habe als die Natur hieran wendet. Ich brauche aber gleich wohl kein solch starkes Feuer wie die Chymici: wiewohl einen neuen offen inventirt, den kein Chymicus weiß, der so eine große force des Feuers hatt, daß aller Chymicorum offenfeuer wie kalt waßer dagegen ist, wie durch schöne proben dargethan. Ich habe diesen winter in der stuben sehr schöne experimenta Chymica gemacht ohne alle Chymischen öffen, dadurch der Metallen nnd Mineralien generatio sehr klar erkennet wird; aller fontium Origo weiß gantz klar und sind solche alle lapidificantes, ob man es gleich nicht in allen so reusibel merket: steine und marmel wihl in kleine stücke zerschlagen, und wieder gantz machen wie zuvor wen nur zeit genug darzu habe, außgenommen den

Kieselstein, der wird gantz auff andere art formirt: den edelsteinen bin auch sehr nahe getreten. Allezeit der Diamant, sed hic jubet Plato quiescere: woher Argilla, limus kommt weiß so wohl a priori, daß solche arte produciren kan und dieß haben mich auch auff die gedanken gebracht den Porcellan zu bereiten, in welchen bieshero alle proben mir ex voto reusirt und keine conträr ging; aber nach dem mitt den töpfern zu thun gehabt, so hatt es viel mühe gesetzt, den ein iedweder töpfer kan die materia so hier zu haben nicht tractiren, sondern nur die besten töpfer, es wihl aber ein ieder angesehen sein, daß er es kan und also haben sie mir furtim andere materien beygemischet, hoffe aber alle impedimenta noch zu superiren. Diese woche habe eine probe in die glaßhütte gesendet, wo die reussiret, so haben wir einen leichten modum, schöner, beständiger und wohlfeyler glaß zu haben, als man bieshero gehabt; ratio ist clara, den ich brauche keine salia darzu; dieweil aber diese proben nur mitt meinen Brennspiegel gemachet, da es vollkommen angehet, so bin die sache noch nicht gewieß bies proben auß der glaßhütte habe, den es köndte sein daß ihr feuer zu schwach wehre dergleichen zu praestiren. Dieß habe alles nur deßwegen gedacht, damit Sie ein wenig sehen, wie die Natur aquam et ignem wie man sagt, verfolge und in dergleichen sehr occupat bin. Ich würde wenig particularia Physices thun können, wen nicht circa generalia Physices fertig wehre, welche ich theils Metaphysica nenne. Gottlob von keiner Krankheit weiß auch nicht und hatt es mein Vatter der kein Philosophus wahr, auff 80 jahr in guter gesundheit gebracht, so gedencke es auch wohl dahin zu bringen (wiewohl auch weiß daß alle tage casus geschehen können die dergleichen endern können) und wo mir dieß ferner angehet das mir einmahl angegangen, da ich bey mir merkte wie zu altern anfinge und mir schien einige verenderung zu merken, die in gutter Jugend nicht bemercket, und mich hierauff durch ein schön artificium das in etwas conform mit der Medicina Corporis, so wieder zurücke und in vorigen Kräfften setzte, daß mir schien umb 10 jahr jünger zu werden; wo dieß nur allezeit angehet, so köndte es noch wohl meinen Vatter zu vorthun; sed haec Providentiae Divinae committenda, allezeit es hatt noch ansehen genug, daß noch eine weile auff ietziegen theatro werde philosophiren können; gehets nicht, so wollen wir auff einem andern Theatro philosophiren, das viel herrlicher als dieses ist, und da ich vorher so viel curieuse experimenten gemacht, so muß ich auch die letzte nicht unversucht laßen, die in morte geschiht, das ist in remotione imaginationis praesentis et recuperatione novae imaginationis et praestantioris, quam jam possideo. Was Mein Werthester Freund von einer Societät gedacht in vorigen und in ietziegen wieder urgiren, meine gedancken hierüber zu eröffnen, so vermeine, daß in meiner Medicina Mentis, circa sextum impedimentum, in dem remedio deßelbigen, weitläufftig davon gedacht (da die rechte Artem ditescendi pro Philosopho sed brevibus innehalten) an welchen orthe auch eben dieß ge-

dencke, wie mein Herr ietzo referirt, daß Leute, die ohne Erben leben und die Philosophie liebten, solche mittel hierzu destiniren solten; sed surdo narratur fabula; es wird noch viel müßen davon geschrieben werden, ehe es Leute thun werden; man dencke was der Des Cartes, Gallilaeus etc. vor Leute gewesen, die viel sachen leicht hatten praestiren können, die andere nicht mitt großer mühe außrichten werden; es ist den Leuten genug bekandt geweßen, hatt es nicht Des Cartes in dissertatione de Methodo so deutlich gesaget, daß er hülffe von andern verlange, aber wehr hatt es gethan, und ob zwar in Holland gutte anstalt hierzu scheinet, ich auch etwas hierin schon lange gearbeitet, so sehe doch keine große apparenz hierzu, deßwegen mich wohl bedüncket, daß kein besser expedient, als das zuletzt bey erwähnten Remedio gedacht, aber brevibus, daß es nur Kluge merken, wohin ziehle. Nehmlich was mich betrifft. so habe mir erwehlet die Opticam zu excoliren, und wen mir gutte Freunde an der hand stünden, so wollte so viel lucriren, als mir iemahlen und andern zu philosophiren nöthig: ex gr. Ich habe eine Machine die nicht leicht iemannd erfinden wird, und wen iemand darauff kähme, so hatt er nicht bald die commodität so alhie auff dem Lande habe, in städten gehets nicht so wohl an; da kan lentes Opticae von unglaublicher größe und so vollkommen verfertigen, als iemahls das kleinste glaß geschlieffen und poliret worden. Perspective gläßer von unglaublicher länge können hiedurch bereitet werden, welches keinen Menschen möglich; aber ich habe die sachen vorerst vor die hand nehmen müßen die die unkosten ersetzen. Ich habe bereits gläßer gemacht, die in Diametro 2 pedes Rhynlandicos haben: diese praestiren admiranda effecta, viel vortrefflicher als alle spiegel so bieshero gemacht: Ich habe zwar in Actis Eruditorum etwas erwähnet, aber ich wuste damahlen noch nicht alle effecta, hatte sie auch nicht von der größe wie ietzo: so habe unlängst ein buch papier in kurtzer zeit zu 18 schönen durchsichtigen glaßkugeln transmutiret, ein bogen giebt eine glaßkugel so groß o als hier gezeichnet; wen sie die spiegel zur Römer zeit gehabt und eine glaßkugel auß der asche Julii Caesaris oder Augusti gemacht hetten, manch großer Herr würde vor eine solche Kugel ietzo wohl ettliche tausend Thl. geben, umb selbige in sein raritäten Cabinet zu haben. Aber wieder auff das vorige zu kommen, so giebt alle asche auß den Vegetabilien gleich ein glaß ohne einzigen zusatz. Porcellan, Talck, Asbest schmeltzen in wenig secunden zeit zu vollkomnen glaßkugeln. Ein Chymicus praestire dieß wo er kan in 4 Wochen mitt dem stärckſten feuer: unter den waßer brennt es gleich einen schwartzen fleck ins holtz, viele materien schmelzet es, als schwefel, pech, kolofonium: die metalla reducirt es in ein glaß; Gold in ein Rubin glaß etc. Ein duppelt ducaten ist noch nicht in einen Ave Maria so zerschmoltzen, daß man ihn wie waßer gießen kan; aber ein loch ist noch nicht in einer secunden zeit durch; die metallen stehen in fluße nicht oben blatt, sondern wie eine perfecte Kugel, das gold siehet gantz durchsichtig auß, und

wen man es auff einen stein schüttet, so lauffet es noch in gestalt einer Kugel fort ehe es kalt wird: wan man zinn und bley .... nimbt, so giebt es einen sehr starcken dampf, wen es auffhöret, so hatt sich eine perfecte cristallisation formiret, wie die bergdrüßen in gebürgen, in summa es ist sehenswürdig. Nun hatt Ihro Keyserliche Majestät dergleichen eines von mir genommen, Ihro Churfürstliche Durchl. zu Sachsen ingleichen, wovor ansehnlich regalirt worden, ietzo nimts der dritte der Herr Landgraff von Heßen Caßel auch. Ich habe auch eines in Holland gesendet vor den König in Engeland. Ich habe auch eines parat, das die Französische Academie haben solte; wen also gutte Freunde mir an die Hand stünden, so köndte man bald einen fond haben vor gutte sachen außzufinden, wiewohl bießher mir noch nicht die unkosten ersetzet sind so drauff gewendet, da ich unglaubliche mühe hierzu angewendet. Ein solch glaß hat 3 oder 4 große fortheil vor spiegel 1.) daß sie größere effecta thun 2.) nicht so schwer und groß, und also leicht fortzubringen, wie den eines auff der post nach Wien mitt mir genommen; zum 3ten so gehen die strahlen per refractionem unterwerts, welches considerabel, dan also können auff fluida, pulveres allerhand tentamina geschehen, so in spiegeln nicht möglich; 4.) so ist die Politur beständig, so in spiegeln dan und wan mitt mühe wieder muß renoviret werden. Weil nun Fürsten und Herrn gerne waz recht rares haben, und kein jahr daß sie nicht viel 1000 Thl. umbsonst hingeben, so kondten sie ja leicht 1000 Thl. an ein solch glaß wenden, und köndten mir also gutte freunde bey großen Herrn hin und wieder solches zu recommandiren einen großen dienst thun; solte es aber hiermitt nicht angehen, so weiß noch ein leichter mittel: wan man ein solch glaß in Holland öffentlich um geld sehen ließe und forderte nur wenig von der persohn, zum ex. einen stiever, ich glaube daß viel tausend Thl. köndten gewonnen werden, wiewohl ich in Opticis noch herrliche sachen weiß, die niemand bieshero probiret auch nicht gekundt; wie ich nun also hierin verfahre, so solten andere gelehrte leute auch thun; wir wolten bald einen considerabeln fond haben; dieser fond nun müste destiniret sein vor alle membra der Societät. Aber die gröste difficultät ist was die membra selbst anlangt, den vorerst müste keiner darzu genommen werden, als der gewiß in einer gutten Methode was außzufinden wohl exerciret, zum andern einen eignen trieb und Ardorem was außzufinden hatt, das ist daß seine Passio Dominans, die über alle seine andern passiones, sey die Erforschung der warheit; 3tens daß er kein lucrum nicht ansehe, wie mein Herr wohl saget, kein mercenarius sey, die warheit vor sich selbst und ihrer großen Vergnügung wegen hoch schätze und liebe ohne ansehung einziges zeitlichen nutzens; 4tens gloriam so hoch zwar aestimire, daß er in der weld in gutten ansehen als ein ehrlicher Man lebe und in gutten concept bey iederman sey, aber in scientiis solches durchaus nicht ansehe: was solches vor großen schaden dem Augmento scientiarum bieshero gethan, werde in der Neuen Edition Medicinae

Mentis in einer Präfation darthun. Ich bin Gottlob! von dieser passion so herunter, daß wen Leute mir gelegenheit wolten machen, das in offenso pede in untersuchung der warheit köndte fortgehen, ich wolte alle meine inventa (die gewieß ohne Vanität in publicirung mir einen großen nahmen solten machen) communiciren, auch was noch finden würde, und wie ich darauff gefallen, und verlangte nicht in geringsten vor den Authoren zu passiren, sondern es möchte unter der Societät Nahmen publicirt werden; daß kein mercenarius bin, beweise klar dardurch, daß alle gelder so in Opticis inventis oder andern sachen fallen werden, nicht vor mich, sondern vor dergleichen Societät destiniret sollen sein, da nicht mehr als pro rata auff meine persohn felt, habe. Mein Herr zeuge mir dergleichen Leute von diesen berührten Eigenschafften, so wihl gerne mich einlaßen, und ein membrum mit abgeben; aber ich sorge es sind leyder! wenig die die warheit einzig und allein ihres grosen Nutzens wegen so sie dem menschlichen geschlechte bringen würde, lieben, sondern nur ihres particulieren geld und ehrgeitzes wegen. Doch genug von diesen, indem mich der Ardor scribendi von einen so löblichen instituto bies zum 3ten bogen kommen laßen. Was Mein Herr von einen Medico von Modena erwehnt, habe nicht gesehen, wihl aber gleich nachsehen, sonsten werde diese Meße nach Leipzig kommen, und wie NB. in Vertrauen melde, möchte auch wohl eine tour nach ....*) thun, weiß aber noch nicht wan; es geschehe aber, wan es wolle ich komme auff Sie zu und hoffe alsdan mündlich über dergleichen mitt selbigen zu conferiren. Mein Herr sey so gutt und sehe doch nach, wie Ihm dies Theorema gefält: Sit



Curva data ACE, sit B punctum fixum, ducantur rectae BC et BE quae distent intervallo indefinite parvo, describatur arcus CD Radio BC: jam curva sit invenienda FGH hujus conditionis ut GI et HK sint pependiculares ad curvam, et sit GI ∞ BC, HK ∞ BE, et tandem sit GH ∞ CD. Ich bekomme zwar ein sehr schön Theorema, dadurch diese sache determinirt wird aber es kombt mir vor als wen es nicht der rechte weg sey, den solcher solte auß der sachen natur gantz leichte sein; biette mir Dero gedancken zu communiciren, so sie was leichtes recontriren. Eines wihl noch gedencken in Opticis, was ich unlängst einmahl gedacht, daß die micro-

*) Das Wort ist weggerissen.

scopia in infinitum zu augiren wieße quoad 1) majorem campum videndi, 2) augmentum rei videndae, 3) majorem illustrationem, behalten sie nur bey sich, die sache ist gantz gewieß. Aber mitt meinen inventis ehe sie produciren kan gehets langsam her, den die Leute in glaßehütten fördern nicht allezeit, hernach gehe gar circumspect und versuche alle proben, bies mir gäntzlich alle dubia removirt, darzu gehöret zeit, und so gebe dan nur unterdeßen proben vor gutte Freunde, daß sie sehen was unter händen habe, aber vor anderen ist es nicht, den wen sie von dergleichen hören, und sehen nicht hernach bald die Effecta hiervon, so kan es an gutter Renomè schaden. Ich habe auch bereits proben gemacht von einem glaße, so in distantia pedum viginti Rhinlandicorum und in eines Reichsthalers größe brennt; aber ich sehe, man kan es weit höher bringen, und wen ich auf den glaßehütten köndte gefördert werden, ich hette es schon verfertigt, welches vor den Römischen König destinirt ist. Sonsten hatt mir auch Gott hin und wieder große Patronen conciliirt, daß es immer beßer gehet; wie den glaube daß Gott eine singulare Providenz hatt über Leute, die mitt gewalt sich von allen mutabilibus bonis abtrennen, und mitt prudenz dem bono publico dienen, und ich darff es nicht glauben, ich bin es gewieß. Noch eines, giebt man so schöne Codices Juris Gentium herauß und denckt nicht mitt einen exemplar an einen gutten Freund; die praefation, so in einem buchladen geleßen, hatt mir sehr wohl gefallen; daß Sie solches gethan bey Edirung Ihres buches de suprematu Principum Fürstenerii hatt eine andere raison, weil Sie unbekandt sein wollen, wiewohl mir es doch auff eine art bekand worden, die Sie leicht nicht glauben solten; maßen hiervon Dero eigene Hand durch sonderbahren zufall erhalten. Wormitt der Gnade Gottes bestens empfohlen, bin mitt sinceren Gemüthe etc.

Kießlingswalde d. 27 Febr. Anno 1694.

Dero Brieff ist zwar d. 29 Decemb. habe selbigen aber erst gestern erhalten, sah sehr übel conditionirt auß.

XXXI.

Leibniz an Tschirnhaus.

Hannover 21 Martis 1694.

Dero Geehrtes vom 27 Febr. habe zu recht erhalten und die laidige confirmation deßen so mir nach abgang meines Vorigen von Dero schmertzlichen unfall zu ohren kommen, darauß vernehmen müßen. Die menschliche natur ist also bewand, daß dergleichen trauerfälle sie nothwendig rühren, also daß auch ich nicht wenig theil daran nehme. Weilen aber Gott Meinen Hoch=

geehrtesten Herrn mit solchen hohen Verstande und auffgerichteten Gemüht begabt, daß ihm dergleichen nicht nieder drücken kan, so hat man bey dieser harten Probe, seiner gemühtsgabe wegen ihm mitten in der condolenz zu gratuliren, wie dann auch mitten im schmerzen eine lust daher entstehet, daß man sich ..... befindet denselben zu überwinden. Gott erhalte uns M.H.H. selbst noch lange zeit und zwar bey solcher gemüthsruhe, davon wir sämtlich den Nutzen empfinden können.

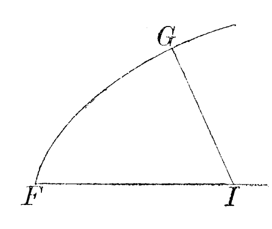
Ich komme von diesen traurigen gedancken auff die schöhnen und angenehmen dinge so in Dero schreiben enthalten. [Solte Dero projectirte Machina Arithmetica sine rotis eben daß thun, was die meinige, so wolte ich lieber die meinige zum stillschweigen verdammen].*) Als ich gegen den P. Grimaldi zu Rom von der meinigen gedachte (welche er mit nach China, daher er kommen, und wohin er als vom Monarchen daselbst zum Mandarin und Praesident des Mathematischen Tribunals benennet, wiedergehen wolte, zu nehmen wünschte wenn sie fertig gewesen wäre) sagte er mir, daß er etwas per Logarihmos vorgehabt, aber daß ist eine andere sache gleichwie auch alles dasjenige, so von dem Neperianischen fundament hehrrührt, einer andern Natur ist. Es ist auch in dem proportional Zirckel ein principium multiplicandi et dividendi. Solte aber MHH. fundament ganz von diesen unterschieden seyn, und der würckung des meinigen dennoch näher kommen, wäre es billig hoch zu schätzen. Ich erinnere mich vor alters meine Constructionem Generalem aequationum per Machinam gezeiget zu haben, seither dem habe sie ad praxin accommodatiorem gemacht.

Wenn MHH. in den Actis meine Constructionem Generalem omnium quadraturarum per motum gesehen haben wird (so nicht leicht zu finden gewesen, und weder Hrn. Hugenio noch den Hrn. Bernoullis zu Gemüth kommen, nachdem sie doch schohn von den Tractoriis gewust) wird er bekennen, daß bey dieser construction etwas sonderliches. Es sind zwar viel constructiones deren iede alle curvas geben kan; aber nicht alle constructiones sind bequem ad inveniendos regressus seu ad constuendas quaesitas seu propositas curvas, sind zwar bequem ad synthesin, aber nicht allemahl ad analysin. Zwar durch die aequationes generales müste alles herauß kommen, aber man verfält in calculos immensae prolixitatis, wenn nicht erst Tabulae vel Canones gemacht werden. In übrigen bin ich damit einig, daß wenn man die quadraturas per meras evolutiones Hugenianas vel coëvolutiones Tschirnhausianas Linearum ordinariarum zu geben gewiße anweisung hätte, solches zu gewißen absehen höher zu schätzen als der Tetragonismus per motum generalis Leibnitianus. Denn dadurch erhielten wir dieß desideratum daß wir alle quadraturas köndten bringen auff rectificationes, und also omnem dimensionem superficiei ad dimensionem solius Lineae, worauff ich denn

*) Diese eingeklammerte Stelle sollte wahrscheinlich in der Abschrift wegbleiben.

längst mit success bedacht gewesen [habe es hernach völlig gefunden]. Inzwischen hat mein Tetragonismus dieses, daß er von der Natur gleichsahm destiniret, das Verlangte ohne praecepta, alsbald und ohnmittelbar darzugeben. Ich zweifle nicht, daß vor andern constructionibus in Methodo per focos vel coëvolutiones große mysteria stecken; wenn darin ein indicium infallibile quadraturarum tam quoad totum quam quoad partes, wäre es desto schöhner. Ich zweifle nicht, daß Sie nicht weil ganz unbetretene wege gangen, dadurch etwas trefliches zu ergründen. Ich kan wohl auch sagen, daß ich offt sehr wunderliche einfälle in solche sachen gehabt und die große Dinge geben müsten so man sie verfolgte, aber wenn ich sie annotiret, so lege ich sie hin und verfolge sie nicht, denn deren menge und meine distraction sind zu groß. Es heißet inopem me copia fecit. Die perfectio Analytica quadraturarum bestünde meines ermeßens darinn, daß man sie durch aequationes transcendentes finitas a quantitatibus differentialibus vel summatoriis liberatas geben köndte, alda aber die incognita vel indeterminata in den exponenten hinein fiele. Allein ich aestimire nicht so hoch die quadraturas, als die conversam tangentium, davon die quadraturae nur ein casus simplicior seyn. Möchte gern pro conversa Tangentium auch eine solche construction haben, wie pro quadraturis; habe zwar dergleichen in allerhand fällen, aber nicht so general noch so leicht. Damit ich aber M. Hochgeehrtesten Herrn nicht nur de Methodis meis, sondern auch etwas ex ipsis methodis schreibe, und also vertraulich verfahre, so will ich einen von den generalesten und importantesten wegen kürzlich melden, welcher rem a compositis ad simpliciora analysi anagogica transferiret. Sie wißen wie alle curvas ad seriem infinitam zubringen von mir in Actis generalissima Methodo angewiesen, wenn ich nun dergestallt valorem ordinatae (y) per seriem infinitam habe, und zwar also daß ich inter calculandum von allen destructionibus vel contractionibus abstrahiere, so kan ich diese seriem infinitam compositam resolviren in series infinitas simplices componentes, deren entweder eine gewiße zahl oder eine unendliche zahl. Ist es eine gewiße zahl so bin ich fertig, dan die constructio curvae quaesitae dependirt also a constructione aliquot curvarum simpliciorum, quas series istae componentes indicant, et haberi jam suppono. Bestehet aber die series composita ex componentibus simplicibus numero infinitis, so suche summam cujusque ex istis componentibus saltem transcendenter, welches ich praesupponire thunlich zu seyn, weilen praesupponir daß man alle series infinitas simplices in potestate habe. Dergestalt habe ich tot terminos, quot antea habui series, und bekomme also valorem incognitae quaesitae (y) per seriem novam infinitam priore infinities simpliciorem, et vel simplicem vel simili methodo repetita tandem reducendam ad simplicem. Ich habe gantz kein bedencken meine Methodos und inventa, wie sie nahmen haben mögen, dahin zu communiciren, woher ich wiederumb liecht hoffe. Diese

Methodus ist eine von den wichtigsten und glaube ich, wenn eine ist, so sey es diese, dadurch man könne der Geometri loß werden, wie wohlen noch immer ad melius esse, viel schönes den posteris zu erfinden übrig bleiben wird. Meines Hochgeehrtesten Herrn problema reducire ich auff dieses folgende, und finde also das es gehöre ad conversam Tangentium: Data relatione inter GI et FG invenire curvam vel data rationis inter Elementum curvae FG et respondens elementum perpendicularis GI determinatione ex ratione perpendicularis GI ad constantem a invenire curvam.*) Bey dessen Beleuchtung sehr nachdrückliche dinge fürkommen, wer nur sie zu verfolgen zeit hätte. Mein Hochwehrtester Herr und Ich hätten juvenes von nöthen, die lust hätten etwas rechtes in diesen studiis zu thun und die sich und Uns zugleich helffen köndten. Wüste ich dergleichen so magnae spei und in vulgari Mathesi bereits weit kommen, so wüste ich vor einen solchen wohl eine avantageuse und honorable stelle. Aber ich weiß wenig excitata ingenia, so in tanta luce saeculi zu verwundern.



Was Sie mir ehemahlen und ietzo in opticis und sonst überschreiben, das communicire ich niemals, denn ob Sie schohn nichts als nur titulos inventionum gemeldet, so weiß ich doch wohl das viele leute sich nur dadurch ärgern. Ich wünsche zum höchsten daß Sie in Physicis Dero treffliche Gabe anwenden. Es ist ewig schade das Cartesius, der solches vorgehabt, darin abgehalten worden. Sie differiren nicht zu lange. Freylich ist der weg per Mathesin in Physicis noch alzu weit entfernet, mich deucht aber auch nicht daß man es recht angriffe umb solchen zu verkürtzen. Productionem argillae et aliorum ejusmodi per artem aestimire ich billig hoch. Ich bin der meinung, daß ein großes in physica particulari zu thun, auch ante notitiam generalis, doch ists mit dieser desto beßer. Mit porcellan ist ein großes in England geschehen; allein die indianischen sind nun selbst sehr wohlfeil. Die perfection der Spiegel oder vielmehr lentium tam ad urendum quam videndum ist freylich von großer wichtigkeit zumahl bey denen so es verstehen. Über alles aber wäre M. H. Hrn. ars rejuvenescendi vel saltem roborandi, das solte mir mehr nützen als MHH. mein Codex diplomaticus, welchen Hr. Lic. Mencken schicken wird. Ich habe vielmehr deßwegen von MHH. reprochés gefürchtet, daß ich etwas Zeit auf solche dinge wende so freylich außer der praefation nichts als ad populum phalerae sein. Betreffend das letzte und wichtigste de comparandis auxiliis, so war Cartesii modus nicht guth, er wolte nur mercenarios operarios und geld dazu haben, aber darin stack

*) Hoc problema semper per Geometriam communem solvi potest, quia Circuli positione dati sunt, quorum concursu seu intersectionibus ordinatim sumtis habetur curva.

eine heimliche ambition, daß er alles allein wolte gethan haben. Man siehet es aus seinen Episteln. Leute so alle qualitäten hätten, so MHH. meldet, sind hienieden nicht zu finden. Muß man also mit einem theil zufrieden seyn. Und ist das Vohrnehmste ardor aliquid egregii praestandi conjunctus cum animo erga alios aequo und muß man ihnen den stimulum gloriae dabey laßen, qui etiam sapientissimis novissimus exuitur. Wenn bey denen (so nicht ad summum sapientiae gradum kommen) gloriae amor nicht ist so finds mercenarii oder carnales. Wolte Gott ich wüste deren viele bey denen amor gloriae in laudabilibus quaerendae. Cicero sagt, daß die philosophi so contra gloriam geschrieben, ungern gesehen haben würden, wen man ihre Nahmen nicht gewust hätte, war also bey ihnen protestatio factis contraria. Mit societäten ist es freylich auch schwehr, nehmlich wie wir es wündschen, es fehlet meist am anfang, diese zeiten laßen wenig von großen Herrn hoffen, so sonst wohl intentioniret seyn möchten. MHHrn. methodus mit den Brenngläsern ist sehr guth pro initio fundi. Steckte etwas bey dem: hic Plato quiescere jubet, so sie bey der mentione des diamanten angehänget, wäre es noch beßer pro hominum captu, ich dencke auff ein novum et mirificum commercii genus, dadurch ein großes zu thun, wenn man sich nur verduppeln köndte, daß ist, wenn man nur iemand an hand hätte, deßen man sich in so wichtigen dingen bedienen köndte, vel hoc solum toti negotio sufficeret, ist ganz leicht und absolute in potestate, tantum opus amico fido et intelligente, denn wan man gebunden, so will wieder die prudenz noch wohlstand dergleichen entreprisen leiden, so prima fronte wunderlich scheinen. Ich kan leicht erachten, daß die nachricht von dem Jure suprematus sie unter Hrn. Schillers seel. briefen gefunden. Vale et rem praeclare gere, id est tantum vale et caetera adjicientur. Ich verbleibe etc.

Was sie de recuperata quadam praestantiore imaginatione post mortem schreiben und vergewißern, davon möchte rationem sehen. Die Crystallisatio fusorum per Vitrum Causticum, et refrigeratorum confirmirt meine suspicionem, daß viel larvae rerum mineralium a vera fusione, davon ich einen eigenen discours aufgesetzet, auch etwas in Actis gemeldet sub tit: Protagaea.

XXXII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Ich bin Gottlob! den Montag, wie mir vorgesetzet hatte, in allen Vergnügen hier arriviret, und bies 14 tagen alhie blieben, da den unter vielen sachen die erfahren, mir auch Dero angenehmstes Briefigen ein sonderbahres Vergnügen causiret. Die Zeit aber gehet unter vielen affairen so weg, daß

also vor dieses mahl nur dieses wenige antworten kan. Ein stückichen von Porcellan sende hiermitt, darauff daß gold geschmoltzen eine Tinctur farbe gemachet wie verlanget wird; soll wohl beßere proben communiciren mitt der zeit, ietzo habe selbst nicht mehr als ein stückichen noch von den Artificiosen Porcellan, so bald von solchen in der perfection gefäße gemachet, daß sie zu communiciren taugen, wihl auch eingedenk sein Dero Vergnügen satisfaction zu geben. Von den weisen durchsichtigen Christal küglichen, so ohne zusatz einzigen salien oder asche fabriciret, soll auch etwas folgen zu seiner zeit, wen der vorrath größer sein wird. Daß die Edelgesteine so eine große vim Electricam haben, ist nach meiner hypothesi keine andere ursach, als daß sie so wohl poliret, welches man in glaßschleifen leicht verificiren kan, und wird Hr. Hugenius ohne zweyfel in polirung der gläßer seine sonderbahre annotata in vim Electricam dahero genommen haben; aber was hart ist, leydet so eine vollkomne politur, daß also bewuste sachen, weil sie an härte so gutt, indem sie das ordinaire glaß schnaiden, also auch eine vollkomne politur haben können. Wegen des Problematis Tangentium inversarum, so ist es vor mich ietzo alzu abstract, absonderlich da mitt ein haufen Hoffleuten umbgeben; sobald in ruhe bin, so wihl alles außführlich überschreiben. Wie Hr. Mohrenthal seine reise dirigiren wird, indem er nicht mitt der post gehet, weiß wohl nicht; sehe auch nicht wie Ihm dieß so bald avisiren kan, den ich glaube, daß er unßer abrede nach schon auff der reise sein wird. Mit Hrn. Fritschen habe geredet, wie Sie verlanget; er wird auch selbst an Sie schreiben. Er ist ein geschickter man, und alle europaeischen sprachen wohl verstehet, auch hier den besten laudem hatt und in gröster Renomèe lebet; vermeinet daß es keine difficultäten hette wegen anderer Buchführer und hatt absonderlich großen appetit zu der alliance zwischen Franciscus I und der Pforte, weil es bey ietzigen zustande wohl zu passe kombt. Sonsten kenne auch einen ehrlichen man, Hrn. Lippern zu Lüneburg, der sich zu dergleichen wohl schicken würde und hetten solchen in der nähe; er spahret auch keine unkosten, wie Sie an beygelegten wercke sehen werden, so nicht allein sehr nützlich, sondern auch so wohl conditionirt gedruckt als dergleichen in Deutschland nicht gesehen. Er hatt meine Medicinam Corporis gedruckt und habe erkandt daß er ein perfect honester homme ist, welchen Sie sich also bestens wollen recommandiret sein laßen. Diesen brieff hat er nebenst beygefügten packet auff sich genommen, an Meinen Werthesten Freund zu übernehmen und wird Dero zuschreiben erwarten, was und wie Sie selbigen nur befehlen werden. Was die großen Brennspiegel so in diametro eine Ellen groß anlangt, geschehe mir ein großer gefallen wen einen von solchen zu Hanover wohl anbringen köndte und daß so bald als möglich NB Sie köndten auch im winter alle proben thun (den in der grösten Kälte gehets an) welches also desto wunderbahrer fallen würde. Sie sein so gutt und ertheilen mir bald nachricht hiervon, den anders möchten dergleichen große gläßer bald

weggehen, und wen der man so selbige fabricirt stürbe, so wüste dergleichen nicht bald wieder anzuschaffen; wormitt Göttlicher Gnade bestens empfohlen bin nach allen Vermögen pp.

Leipzig in höchster eyle d. 12 Octobr. Anno 1694.

Von büchern hatt mir absonderlich gefallen Recueil d'observations faites en plusieurs Voyages pour perfectionner l'Astronomie et la Geographie, A Paris de L'imprimerie Royale Anno 1693, da vortreffliche und unglaubliche sachen drinnen sind, ex. gr. Parallaxin solarem esse 9″; magnitudinem Solis zehnmahl hundert tausend größer als die Erde; Vierzig Observationes da der unterschied nicht über 16 secunden außträgt, größere accuratesse kan man nicht hoffen, aber auch bald nicht mehr wüntschen. Das andere ist Divers Ouvrages de Mathematique et de Physique par Mess. de l'Academie Royale des Sciences, A Paris de L'imprimerie Royale Anno 1693, alle beyde in folio, kommen zusammen 14 Thl. so auch an mich erhandelt. A Dieu.

XXXIII.

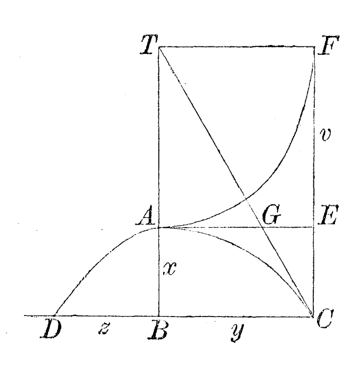
Leibniz an Tschirnhaus.

20 Octobr. 1694.

Zweifle nicht Sie werden zu Leipzig glücklich angelanget seyn, wündsche offt angenehme Zeitung von Dero zustand zu vernehmen. Hiebey komt wieder zurück was unlängst bey mir blieben, welches mich sehr wie alle das ihrige vergnüget.

Dürffte ich wohl umb ein stückgen von ihren mit dem Brennglaß geschmolzenen porcellan bitten, darauff angeflogen gold, dabey man siehet wie es gleichwohl dem glaß die farbe mittheilet. Von dem artificiali möchte auch eine probe wündschen, zumahl wenn man etwas darauff machen köndte, darauff zu sehen, daß er Europaeisch, wie auch Hr. Settala gethan haben soll. Hätte wohl auch umb eines von den schöhnen weißen Kügelgen bitten mögen; habe aber dessen fast bedencken, und stelle es alles in Dero gefallen. Wegen des aufgetragenen werde schohn die gelegenheit beobachten. Anietzo will mit weitläufftigen Schreiben nicht aufhalten, da Sie in der Meß ohne dem viel zu thun haben werden. Nur will ich gedencken, daß ich eine schwührigkeit in Dero Weise des Hrn. Bernoullis problema zu solviren finde, und daher sie wohl nicht recht begriffen haben werde. Denn mich deucht es sey alles so beschrencket daß ungeacht drey indeterminatae zulezt in der aequation bleiben, man doch nicht

wohl macht habe etwas neues anzunehmen, weil sie schohn ihre gewißen relationes unter einander haben, so man eben in assumendo treffen müste, welches ob es durch die divulsion geschehe, verstehen muß. Ich will meinen process nach ihrer weise hehr setzen, darauß Sie abnehmen werden, ob ich Dero meinung erreichet. AB, x; BC, y; EF, v; BD, z; nehmlich wo mir recht, wenn der lini AC tangens ist CT und AB abscissa, BC ordinata, so soll BT und CF ein ander gleich seyn; item die Trilinea ABDA nnd AEFA, woraus folget, daß AG und DB ein ander gleich seyn müßen, welches außer zweifel bewußt. Kan es aber zum überfluß leicht beweisen. Gesetzet EF sey v, und BD sey z, weil nun die Trilinea allzeit gleich, so sind auch ihre Elementa ein ander allezeit gleich. Wir wollen umb geliebter kürze willen das Elementum von x nennen dx, und von y es nennen dy. So ist des Trilinei ABDA Elementum zdx und das Trilinei AEFA elementum ist vdy, ist also zdx gleich vdy, oder es ist z zu v wie dy zu dx. Nun ist aber AG zu AT oder zu v auch wie dy zu dx, ist also z so viel als AG. Wenn man demnach die Lini AC suchet, deren proprietät erfordere, daß CG sey zu AG, wie constans r zur unität, derowegen weil GE zu EC oder zu x wie AG oder z zu AT oder v so ist GE, $\frac{xz}{v}$; ergo quadr. GC ist $xx + \frac{xxzz}{vv}$, also GC oder $\frac{x}{v}\sqrt{vv + zz}$ zu AG oder z wie r zu 1, oder es wird $xxvv + xxzz = rrvvzz$. Wolte man das x abschaffen, und dafür das y brauchen, so kann es geschehen, dann GE ist $\frac{xz}{v}$ und auch $y - z$, ergo ist $x = \frac{yv - zv}{z}$. Solches vor x substituiret, gibt



$$yyv^2 - 2yzv^2 + v^2z^2 + y^2z^2 - 2yz^3 + z^4 = rrz^4.$$

Wenn man nun die quantität darinn z nur einerley dimension hat, evanesciren machen köndte, umb dadurch zu einer neuen aequation zu gelangen, so dürffte man sagen, $yy + vv = o$, welches aber ohnmöglich. Wolte man das vv auf zu heben sagen: $yy - 2yz + zz = o$ oder $y = z$, so würde folgen das x wäre o, welches absurd. Kan ich also den verlangten success darinnen nicht finden. Solten Sie aber eine regulam divellendi geben können, so wäre es treflich. Zweifle nicht Sie werden gleichwohl etwas sonderbares darinn beobachtet haben, weilen ihm durch einen dergleichen weg des Marchionis Hospitalii construction auch herauß kommen.

Wegen Hrn. Fritschen stelle ich zu Dero guthen gelegenheit bey ihm einen

grund zu näher kundschafft mit mir zu legen. Solte er etwa wegen der hiesigen Buchhändler bedencken haben, mit denen er etwa besorgen möchte dergestalt zu zerfallen, so dienet darauff, daß ich genug vorhabe umb mehr als eine wichtige Materien an hand zu schaffen.

Der Churfürst wird sich zu seines Hrn. Bruders Herzogs zu Zell Durchlaucht begeben, und alda etliche wochen mit der jagt sich biß der frost komt, erlustigen. Nach der rückkunfft werde ich das bewuste zu . . . . . . trachten. Es würde wohl guth seyn, daß ich wüste wie bald Hr. Morenthal hierdurch passiren wird. Solte es sobald noch nicht geschehen so stende dahin, ob solche abrede zu nehmen, daß man sich wegen der zeit darnach richten köndte. Wenn er das Ms. Cartesii bey sich hätte, möchte ich es alsdann wohl sehen. Die Epistolam Cartesii ineditam, da er lehren will, wie man die Aequationes pares ad proxime inferiores impares generaliter reduciren soll, will ich auch auffsuchen. Wie mich aber bedüncket, so gehet es also nicht an. Doch Sie werden beßer davon urtheilen. Ich wündsche alle vollkomne Vergnügung, und das ist stete und herrliche progressus, doch nicht sobald de globo in globum und verbleibe etc.

Boyle hat probirt, daß Edelsteine sonderlich Diamanten eine starke vim Electricam haben; er hält es vor eine der höchsten proben. Habe es erwehnen wollen, umb darauff zu dencken.

XXXIV.

Tschirnhaus an Leibniz.

Bey dieser gelegenheit, da meiner Schwester Sohn nebenst einen hoffmeister in Holland verreisen laße, so habe selbigen auff Hannover zugehen laßen, und mitt diesen beygelegten versehen, welches mir Hr. Professor Mencke zugestellet und ich mich offeriret solches wohl zu befördern. Des Marquis Hospital seines wird selbigen gar wohl gefallen, weil er sehr perspicue diese sache tractiret, wiewohl ich wenig zeit alhie bey der meße gehabt solchen durchzusehen; doch glaube daß wenig drinnen sein wird, daß mir nicht ziemlich bekand. Ich bin bieshero in vielen und wichtigen occupationen auffgehalten geweßen, maßen von Ihro Churfürstliche Durchlaucht gewiße commissiones gehabt, die ich sehr glückseelig vollzogen, und habe ich alhie in Edelgesteinen einen Königlichen schatz nahe bey Freyberg entdecket, der ohne meinen fleyß wohl viel hundert jahre solte verborgen gelegen haben, und wen er auch bekand gewesen, so hette solchen niemand brauchen können. Aber durch meine politur

kombt eine schönheit herauß die man fast nicht glauben kan, und kan man taffeln von sehr großer größe haben, die auff 2 zoll dicke, wenn sie poliret durchsichtig sind. Der Hertzog zu Florenz hatt eine capelle die schön ist, aber dergleichen ist alda nichts vorhanden. Es sind nur calcedonier, Jaspis und Ametisten adern, die aber besonder curieuse figuren bey jeden schnitt geben. Die Italiäner die Ihro Churf. Durchlaucht hatt, können ihn fast nicht oder doch in langer zeit kaum schneiden, die politur aber ist gantz nichts wertich. Ich verrichte aber beydes sehr leicht mitt geringen unkosten, und glaube nicht daß eine schönere politur kan hervorgebracht werden. Doch mitt allen dem so verlaße den Ursprung nicht, dadurch zu diesen sachen kommen, nehmlich das gläßer schleiffen, und habe hierinnen auch nach wuntsch reussiret, wie Sie bereits auß den Actis Eruditorum werden haben ersehen. Ich habe diese meße wieder ein glaß erhalten, so 300 pfund schwer; ist fast 2 leipziger ellen groß in diametro, perfect rund 5 zoll dicke. Ich werde dergleichen noch vor den newen jahr 3 fertig haben, so alle über anderhalb ellen groß. Waß hier vor effecte sich zeugen werden, wird die weld mitt erstaunen vernehmen. Die vorigen gläßer von einer elle groß sind alle weg, so daß nicht mehr als ein einziges vorhanden. Ich werde aber dergleichen keines mehr fabriciren. In perspectiven und microscopiis da habe sonderbahre sachen entdecket, auff welches man bieshero ohne hülffe dergleichen großer gläßer nicht leicht dencken können. Die zeit entbricht mir, daß vor dießmahl hiermitt abbreche und bin etc.

Leipzig d. 22 Obtobr. An. 1696.

XXXV.

Tschirnhaus an Leibniz.

Dresden d. 6. Sept. An. 1697.

Ich habe Dero angenehmes de dato Hanover d. 7 Aug.*) vor 4 tagen alhie zu Budissin auff den landtag erhalten. Vorietzo bin in Dressen und gedencke in 6 Tagen zu Cracau in Pohlen zu sein, wohin morgen auff bin; auß welchen Sie ersehen werden wie enge mir die zeit sein müße, besonders gutte studia zu prosequiren so zwar daß sie mitt andern viel communiciren könne; sonsten gehe dennoch fort und ist kein dies absque linea seu einer besondern observation, so nicht allezeit in Bibliothequen anzutreffen. Habe auch etwas beylegen wollen, damitt mein gäntzliches stillschweigen auf den pas-

*) Dieser Brief Leibnitzens fehlt.

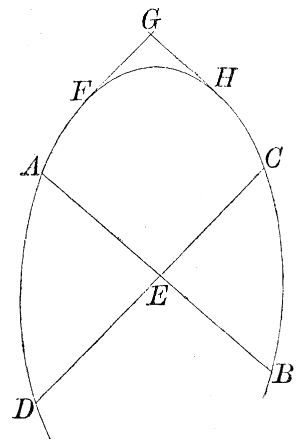
sum mathematicum in etwas recompensire. Doch dieß muß melden auff die worte de belles pierres dont vous faites faire de si grosses pieces qui ont tant eclat qu'elles ressemblent à des pierres pretieuses, darbey zu mercken, daß sie nicht edelgesteinen gleich scheinen zu sein, sondern wahrhafftig edelgesteine sind und zwar die aller vortrefflichsten so wir haben (den der Diamant und Rubin sind die edelsten von den kleinesten) von den großen edelgesteinen, und versichere daß der Hertzog von Florenz dergleichen nicht in seiner schönen capel hatt. Daß Sie ferner setzen pour apprendre le detail des prix etc. car Elle en voudra prendre une bonne partie, daran sehr zweyfele, den es sind schon leute vorhanden, die vor iedes stück so in plano eine halbe elle groß und breit, tausend Thl. gleich außzahlen wollen. Die ursache ist, daß dieß der Alten berühmbter Jaspis ist, welchen bieshero kein edelgesteinschneider, wan er auch den Diamant auffs beste poliren kan, en gros kan arbeiten wegen seiner unglaublichen härte. Die politur ist so schön, daß kein glaß ihn gleich kombt, keine andere adern als Calcedon, die rothe Jaspis und Ametisten adern, welche so seltzam durch einander spielen, daß in tausend stücken nicht eines den andern gleich kombt, und ist bey 2 finger dicke schön transparent. Ich habe bereits eine kleine probe an Son Altesse Royale, als in Berlin zu ende vorigen jahres war, durch den Hrn. Baron Schweinitz praesentiren laßen, auch damahlen versprochen (weilen die probe nicht auß handen ließ) dergleichen zu ander zeit zu senden. Der Hr. Danckelmann wie auch vornehme Jubilier kennen solchen alzuwohl, nur daß sie alle sagen, er sey unmöglich zu arbeiten en gros und fordern nur vor ein stück eines Reichsthalers groß 12 bies fünfzehn Thl. Die bieshergen wichtigen verenderungen alhie haben mich in etwas auffgehalten, dieß werck in stand zu bringen, habe aber dennoch viel avanciret. Wegen enge der zeit kan unmöglich ein mehreres melden. Hr. Bloeck (?) hatt einen Atlanten der vor 12000 Thl. und mehr von verständigen geschätzt wird, indem dergleichen nicht in der weld; das wehre was vor den Zaar. A Dieu etc.

XXXVI.

Tschirnhaus an Leibniz.

Daß vorietzo die gelegenheit nehme an Selbige zu schreiben, ist vorerst daß wohl gerne wießen möchte, wie Sie sich Ihrer Orthen wegen wieder neuer verenderung der Herrschafft befinden, und ob etwas ad emolumentum bonarum scientiarum dahero zu hoffen sey; vor daß andere so habe in Dero letzten Schreiben gesehen, daß Sie sich gewießer Theorematum nicht erinnern können,

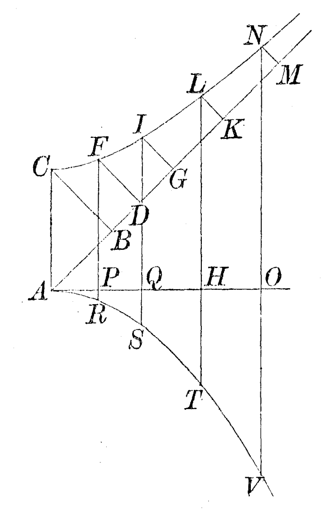
welche in meiner letzteren durchreise nach Hanover erwähnet; so wihl hiermitt eines erwähnen, dadurch Sie sich leicht der andern erinnern werden: Sit quaecunque sectio Conica DAFHCB; ducantur duae rectae AB et DC se intersecantes in E; jam ducantur Tangentes FG et HG his rectis DC et AB parallelae, concurrentes in G; dico rectang. AEB esse ad rectang. DEC ut quadrat. GH ad quadrat. FG.



Hinc patet, quia in Circulo FS et GH aequales, rectangula fore aequalia, et contra: si desideretur curva talis, ubi rectangula aequalia, haecce a priori per hoc Theorema statim possit determinari.

Von solchen Theorematibus habe damahl gesagt, daß es dergleichen vor alle curvas Geometricas gebe und daß die mathematici solche vor allen andern zuerst hetten eruiren sollen, und daß allezeit dergleichen Theoremata universal vor einem gantzen gradum, wie auch eines produciret, daß pro tertio gradu war. Dieweilen aber den methodum dergleichen Theoremata a priori zu eruiren bereits in Actis Eruditorum publiciret, so wihl hiervon nichts weiter gedencken, aber hierdurch wird klar sein, daß also curvae a priori können entdecket werden, cujus producta segmentorum AE, EB, DE, EC secundum quasvis potestates sint aequalia. Daß dritte, was hierbey vor dießmahl zu gedencken vor nöhtig erachtet, bestehet hierin: Es ist mir vor weniger zeit in Leipzig communiciret worden daß Hrn. Johan. Bernoullii Modus genuinus Arcus Parabolicos inter se comparandi, da den viele sachen angetroffen, da er mich angreifet und sehr viel falsa affingiret. Nun wundere ich mich zwar gar nicht seines verfahrens, den haben die Brüder selbst publice so scharff einander angegriefen, so werden sie fremde nicht schonen, und besonders da dieser Joh. Bernoully klar zu erkennen gegeben, daß sein vornehmbster zweck sey Gloria: so ist mir alzubekand, daß dergleichen Leute aller ander Inventa suchen zu verkleinern und ihre eigen zu extolliren, und mit was vor circumspection also mitt solchen persohnen umbzugehen sey, maßen mir gewieß bekand, daß nicht bald eine schändlichere Passion, sowohl vor die eigene Tranquillität sey, als auch vor den augmentum scientiarum, wie klährlich in der Medicina Mentis angewießen. Wie ich mich nun Gottlob! von dieser Passion so wohl befreyet befinde, daß ich gewieß alle meine zwecke in Metaphysicis, Physicis und Mathematicis, so dem publico vorhoffendlich einmahl gefallen werden, einen andern gäntzlich überlaßen wolte, sie in seinen nahmen zu ediren (den die weißheit ist .... rechtschaffener liebhabern gröster lohn, wen es auch niemand andern bekand würde, daß sie solche in großen grad

besäßen) wan ich nur gewieß erhielte, daß absque impedimento et necessario adjumento in cognitione veritatis gewieß fortgehen köndte, alſo wüntſchete auch wohl von hertzen, daß andere gleichen ſinnes mitt mir in dieſen passu wehren. Doch dieweil ſolchen nicht zu helffen ſtehet, als intendire nichts anders als andere bono modo abzuhalten mir zu ſchaden. Dieweil ich nun den mitt meiner responsion gegen den Hrn. Bernoully, ich mag ſie in terminis modestissimis einrichten, wie ich wihl, wan nur die wahrheit ſagen wihl, gewieß anſtoße, ſo habe gedacht, es ſey ein modus intermedius vorhanden, wan nehmlich meine gedancken meinen Höchſtgeehrteſten Herrn und alten bekandten Freunde eröffnete, ſo köndten Sie vor der publication des Inventi Bernoulliani ihm, was Sie vermeinten, hiervon communiciren; zweyfele nicht, Sie werden ſolches willigſt über ſich nehmen; vielleicht würde er hierdurch zu beßern gedancken gebracht. Deßen inventum habe abcopiren laßen und hierbey legen, damitt Sie es mitt meiner Antwort collationiren können. Dieſe nun würde ohngefähr alſo lauten. Ich habe bey vergangener Newen Jahres Meße in Leipzig bereits den modum des Hrn. Bernoulli geſehen, die Arcus Parabolicos zu compariren, nun hette zwar ex tempore gleich darauff antworten können, obſchon mediis Aulae occupationibus et diverticulis damahl abgehalten zu ſein ſchiene; doch nicht praecipitanter zu verfahren, ſo habe erwartet bies zu meinen ordinären otio vor die Studia gelanget; da annoch gleicher gedancken bin, daß nehmlich vorerſt deßen inventum, die Arcus Parabolicos zu compariren absolute falsum ſey und dan, daß er mir unterſchiedene ſachen affingiret, welche mir niehmals in ſinn gekommen. Das erſte wihl ich ſo klar darthun, daß es niemand wird leügnen können, der nur aliqualem cognitionem in hisce studiis hatt. Sit CFILN hyperbola aequilatera, cujus Asymptoton AM Angulum CAO bifariam dividens; dupla AC tanquam latere recto describatur Parabola ARSTV. Notum est, vel ab Heuratii tempore, rectangl. ex recta CA in curvam AS aequari semper spatio Hyperbolico CAQI; 2[do] iſt auch bekand, si duo spatia sint hyperbolica FDGI et LKMN hac ratione in se posita, ut AD sit ad AG sic AK ad quartam proportionalem AM, spatia haec fore aequalia, welches auch gantz leicht per methodum Indivisibilium Cavalerii zu demonſtriren. Wir wollen nun ſetzen, daß der Arcus Parabolicus RS ſey aequalis x und der Arcus TV ſey ex. gr. duplus prioris, sit AB ∞ a ∞ BC, AD ∞ b, AG ∞ c, AK ∞ f, AM ∞ g, $\sqrt{\text{area}}$ ∞ k.



Dieweilen nun spatium ex AC in RS und TV aequalia sind den spatiis hyperbolicis PFIQ und TLNO, und ex his spatiis gantz leicht zu deriviren die spatia FDGI und LKMN, ponamus haec jam aequalia et obtinebitur aequatio talis $f^4 \infty \frac{bbccff + a^4ff}{cc} + \frac{4kbbccffx}{c^4 - bbcc} - \frac{a^4bb}{cc}$, in welcher ad determinandam f nihil obstat quam quantitas x seu Arcus Parabolici mensura; aber diesen ist leicht zu helffen, nam quia ad determinandas AN et AO a. Dn. Bernoullio aequatio inventa, ubi Arcus Parabolicus non comprehenditur, ope duarum harum aequationum non solum determinabitur Arcus duplus, sed etiam absoluta mensura Arcus Parabolici dati (quia duae aequationes Joh. Bernoullii et haec mea, et duae hic incognitae sunt Arcus RS ∞ x et AK ∞ f). Adeoque certo hinc sequitur vel spatii Hyperbolici mensura hactenus desiderata, vel quod methodus quam nobis exhibuit falsa sit, et quia ipse prius neget (quadraturam nimirum hyperbolae) hinc impetrari, suspicor calculi lapsum, Authori inanimadversum, alicubi haerere, prout expertissimo circa similia facile accidere potest. Und kan diese methode (so ich bieshero gebraucht) gantz leicht durch einen Generalem calculum verificirt werden. Daß man multiplicire datum arcum wie man wihl, niehmals das intentum Geometrice kan obtinirt werden, ohne die quadraturam Hyperbolae, außer wan Arcus aequales desideriret werden, aber alsdan kombt Arcus ab altera Parabolae parte existens herauß, welches wohl kein novum inventum zu nennen eo respectu, daß es nicht bieshero bekand, aber doch novum ea ratione ist, wan man demonstriren kan, daß ohne die quadraturam hyperbolae dergleichen nicht zu erhalten, wie vorietzo gethan, wiewohl einen gantz andern weg weiß, solam naturam curvae Parabolicae considerando, ohne einzige reflexion auff die hyperbolam zu haben, da den eben dieß conclusum herauß kombt, und ea ratione glaube daß es noch weniger unrecht als aliquid novi vormahls erwähnet habe. Wie dan mein methodus universalis non ejusdem saltem curvae, sed qua quarumvis diversarum curvarum inter se comparandarum non absolute kan geschehen, wie mir affingiret wird, sondern nichts anders anweiset, als wieweit es möglich oder unmöglich wie der Hr. Bernoulli ingleichen vorietzo in der Parabola intendiret hatt zu thun, obschon infelici successu.

Ferner habe niehmahlen irgendswo gesaget, daß secare curvam rectificationis ignotae et secare spatium curvilineum quadraturae ignotae, ejusdem difficultatis res sit, sehe also nicht auß was vor ursachen mir dergleichen affingiret wird. Wie mich endlich auch nicht wenig gewundert, daß der Herr Bernoulli mir die hierauff folgenden objectiones macht, dan ob zwar schon von des Cavalerii zeiten an das bekandt ist, was er hierbey saget, daß man nehmlich ex. gr. Ellipsin per infinitas Ellipses, und so alle spatia

curva per curvas ejusdem generis dieselbige in data ratione dividiren kan, ob auch gleich einer, der bloß den titulum meines inventi ansehe, auff diese gedancken gerahten kondte, so dächte doch nicht, daß wen er die sache selber ferner deduciret sehe, und die curvas so produciret und da besonders des Hrn. Gregorii Scoti 62 Propos. seiner Geometriae Universalis citiret, daß, sage ich, niemand mir dies objiciren kondte, den hierdurch werden nicht curvae ejusdem gradus gefunden, sondern diversae naturae, die aber sehr nahe bey=kommen, wie dan in der Hyperbola und Circulo curvae können gegeben werden, deren indeterminatarum dimensio saltem ad 3 dimensiones ascendunt; aber hierauff antwortet der Hr. Bernoulli, se non videre quid me permoverit ad indagandum per aliena et remota, quod in ipso statim vestibulo nulli non obvium; dieweilen aber durch meine methode, die spatia in data ratione zu seciren, allezeit zugleich die quadratura spatii, wan es möglich, heraußkombt, welches, wie bekand, durch den vorigen weg nicht erhalten wird, so ersiehet man leicht, was mich dieß zu indagiren bewogen, und daß dieses non cuilibet obvium sey, und also noch wohl Eruditi Orbis conspectum meritiret. De Circulo habe dergleichen auch nirgendswo gesagt, daß solche per lineas rectas in data ratione seciren kan, und also können die letzteren worte auff mich nicht gerichtet sein, wie zwar alle Lectores nicht anders dencken werden. Den auß meiner methode klar folget, daß die aller geringste curva Geometrica, dadurch wir solches thun können, ad tertium gradum gehöre, und also solches unmöglich sey; welches ein fein specimen, quanti momenti haec methodus sey, zumahlen es cuivis curvae kan appliciret werden. Dieses wehre also, was ich, wie gesagt, den Actis zu inseriren vorhatte, wihl aber solches zu Dero überlegung vorher communiciren, und auß Dero antwort sehen, was hierbey zu thun sein wird. Was die Cycloidem anlangt, ist demselbigen und mir lange bekand gewesen, wie die singularis proprietas Hugenii gar leicht zu demonstriren, wie auch Pardies publice gethan, und in Actis Anglicanis längst dergleichen etwas publiciret.

Endlich köndte auch mit wenigen meinen zustand gedencken, doch der Brieff ist über verhoffen zu lang gerahten, gedencke also mitt wenigen daß nuhnmero in kurtzen durch hülffe Ihro Durchlaucht von Fürstenberg, so ein Herr von un=gemeinen herrlichen talent ist, in dem stande zu sein, was guttes pro publico zu effectuiren, wovon dan und wan in Actis bericht geben werde; vorietzo werden Spiegel fabriciret, die in der länge über 4 Leipziger Ellen und in der breite über 3 ellen halten, dergleichen Venedig noch Frankreich nicht zu wege gebracht. Dieß wehre also eine schöne sache vor eine Academie pro scientiis zu establiren, viel beßer als des Weigelii, durch ein Universal Calendarium (welches schwer zu erhalten sein wird) besonders wen ich meine machinam (auff welche nicht glaube leicht die exteri fallen werden) hierzu communicirte, der=gleichen große gläßer zu schleifen; vermeine auch specimina genug hierdurch

praestiret zu haben, indem gläßer von $1\frac{1}{2}$ bies 3 Centner schwere zu perfecten lentibus sphaericis fabriciret, davon eines in Leipzig bei Hrn. George Bosse, einen Kauffman, zu sehen, damitt niemand dran zweyfeln könne, wovon die effecta in beygelegten vor die so nicht gerne lattein leßen, zu ersehen sein werden.*) Womitt Selbigen Göttlicher Obhutt empfehle etc.

Kießlingswalda d. 8 Martii 1698.

XXXVII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Dero werthes habe zu recht erhalten und dem Hrn. Bernoulli zu Gröningen sofort davon nachricht geben, daß Sie ihn eines in seiner sectione lineae parabolicae vermuthlich eingeschlichenen irrthums erinneren wollen, daher auch vor guth gehalten, daß deren publication annoch verschoben würde. Dero Schreibens Extract habe ihm aber sogleich nicht mittheilen können, weilen ich solchen selbst zu machen nicht Zeit gehabt und niemand bey der hand gewesen, der die copey in dergleichen materi wohl machen können. Darauf aber ist bald ein schediasma novum von dem Hrn. Bernoullio eingelauffen, bloß seinen calculum zu verificiren, ohne einige berührung des ihrigen, welches ich auch auff sein begehren Hrn. Lic. Menckenio zugeschicket. Ich möchte wündschen, daß man die materi de sectionibus curvarum, et comparationibus arearum non-quadrabilium fortsezete, denn zweifelsohne die natur mit den Areis conicarum nicht aufhöhren wird eine relationem unter den areis darzugeben, sondern es wird in einer gewißen progression fortgehen. Von einer area figurae partem imperatam abzuschneiden, ist zwar an sich selbst nicht schwehr, wenn Sie es aber, wie Sie es wehnen, also praestiren köndten, daß darauß impossibilitas vel possibilitas Quadraturarum erhellen köndte, wäre es wichtig. Ihres Theorematis, quod in conica a segmentis duarum rectarum utcunque ductarum facta rectangula sint ut quadrata Tangentium parallelarum, habe mich nicht erinnert, finde es aber überschöhn; erinnere mich der andern auch nicht, und wird mir deren communication allezeit sehr lieb seyn. Denn ich habe das gemüth alzusehr mit andern Dingen angefüllet, umb solche, obschon gar feine Theoremata, die man mir etwa ein-

*) Tschirnhaus hatte eine in deutscher Sprache abgefaßte, für das große Publicum bestimmte Anweisung zum Gebrauch der Linsen und optischen Instrumente drucken lassen.

mahl gesagt, zu behalten. Ich pflege auch lieber methodos zu suchen, dadurch man problemata resolviren könne. Doch verachte ich theoremata nicht, und schätze solche sonderlich hoch, welche eine progression geben. Inzwischen ist die erfindung der problematum bey weitem durch solche theoremata nicht ausgerichtet, wenn man gleich deren eines pro quolibet gradu gebe, und müste man deren unzehlich viel haben. Hoffe also, Sie werden von der methodo pro quotcunque punctis solvendi problemata, die ich vor vielen jahren ausgefunden und dadurch ich Hrn. Bernoulli problema so leicht solvirt, ganz anders als von solchen particular Theorematibus urtheilen.

Ich will zwar glauben, daß Hr. Bernoulli sein absehen mit auff die glori habe, denn wie M. H. H. am besten selbsten weiß, so hilfft sie viel in der welt bey andern Menschen; doch habe ich bey ihm noch zur zeit noch nicht gespühret, daß er andrer inventa zu verkleinern suche; denn er hat selbst gar schöhne Dinge ausgefunden, und wer das kan, der hat nicht nöthig, sich durch andrer verachtung groß zu machen; thut es auch nicht, wenn er verstand hat. Was aber in specie Dero controvers mit ihm betrifft, bekenne ich daß ich sie gründtlich zu untersuchen die zeit nicht gehabt, will doch hoffen, er werde wie bishehr sich gegen Sie alles glimpfes gebrauchen, wozu ich dann allezeit rathe.

Freue mich sonderlich zu vernehmen, daß Sie Hofnung haben durch vornehme Assistenz nun etwas großes auszurichten. Wenn ich bedencke, was Ihre und meine zeit almählig dahin gehet, und allerley hinderniße verursachen, daß wir dasjenige so sonst in unser macht, wenn requisita vorhanden, nicht zuwerck richten und also zu besorgen, daß viel sachen verlohren gehen werden, so nicht leicht sobald zu ersezen, wenn, sage ich, dieses bedencke, so finde nöthig, daß wir einmahl mit mehreren ernst auff beßere anstalt dencken. Meine gegenwärtige labores betreffend die jura und interessen der Herrschafft halten mich zwar sehr ab, doch hoffe sie auch nun bald zu stande zu bringen, und alsdann freyer zu seyn. Wündsche daß Sie in vollkommener gesundheit noch lange Zeit mit schöhnen inventis fortgehen, und sonderlich was ad Medicinam gehöhret, noch beßer excoliren mögen, denn daran wäre wohl am meisten gelegen. Verbleibe etc.

P. S. Wie gehts weiter mit ihren edelen steinen?*)

*) Ohne Ort und Datum.

XXXVIII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Wen Sie in allen selbst beliebten wohlstand leben, so erfrewet es mich auffs höchste. Ich lebe, Gottlob! et mente et corpore vollkommen wohl und hatte mir feste vorgenommen vergangenen Sommer Sie selbst zu besuchen, wurde aber wieder meinen willen daran verhindert, obschohn daß bieß Caßel gieng, auch einen theil von so genannten Hartz durchstrich. Vorietzo hatte man mich versichern wollen, daß die Ehre Sie selbst bey dieser meße zu sehen genießen würde, aber auch umbsonst, habe also durch diese wenige zeilen in etwas meinen zustand notificiren wollen. Ich werde voranietzo fast stets in Dresden anzutreffen sein. Solte alda was dienen können, so haben Sie zu befehlen, indem in so weit außehenden zeiten man wohl zu vigiliren hatt. Ich habe die gelegenheit intim mitt dem Hrn. Stadhalter, als auch bey anwesenheit mitt Ih. K. Maj. selbst zu sprechen gehabt, und gehet es unter dem praetext daß nur curiosa vorhabe, sehr bequem an, daß niemand leicht dergleichen penetriren kan. Hienebenst habe zwey schöne laboratoria alda auffgerichtet, auß welchen sonderbahre sachen kommen möchten. Daß eine ist in polirung der durchsichtigen Jaspis occupat, das andere eine glaßhütte. Nun weiß ich gar wohl, was man in Venedig fabricirt, auch nuhmero in Berlin, besonders in Frankreich, wovon die schönsten proben selbst mit augen gesehen, aber gewieß es ist alles Kinderwerck was wir vorhaben, und wovon bereit von allen proben gemacht sind. Die zeit wird meine worte verificiren. Ich habe diesen winter ein perspectiv glaß schleifen laßen, so in Diametro $^5/_4$ der ellen, welches auß einen radio von 36 fuß, und nach derselbigen art, wie in Actis Eruditorum bericht gethan, gebraucht kan werden. Hiernebenst brennet es auch eine klahre flamme in gedachter distanz in hart holtz, wovon eine probe nach Caßel geschickt. Sed de his alias. In studiis avancire ietzo ungemein sehr, und habe nur hinterlegtes jahr solche progressen gethan, als nicht sonst in 3 jahren, gehe aber gantz besondere wege, absonderlich in Mathesi, so daß ich gar nicht einzige spuhr finde oder vor mir habe, daß sie iemand gegangen. Davon Sie in kurtzen vielleicht etwas besonders möchten vernehmen. Vielleicht sprechen Sie wohl selbst diesen Sommer, wo es die . . . . zeiten nur nicht verhindern; unterdeßen sende etwas hierbey so auff anderer instanz auffgesetzet, habe es aber nur vor mich selbst drucken laßen.*) Womitt Göttlicher Gnade etc.

Leipzig d. 18 May An. 1700.

---

*) Aus dem Folgenden ergiebt sich, daß das, was Tschirnhaus hier an Leibniz übersendet, die von ihm verfaßte Schrift war: Gründtliche Anleitung zu nützlichen Wißen-

XXXIX.

Tschirnhaus an Leibniz.

Ich habe soviel gewieße Nachricht gehabt, daß fast nicht zweyfeln wollen, ich werde die Ehre genüßen Sie dieße Meße alhier zu sehen, welches mich hoch würde erfrewet haben, und bin bey 14 tagen alhier verblieben; dieweilen aber nuhmero alle hoffnung wegfellet und mich nach Dreßen wenden muß, als habe hiermitt schriftlich auffwarten wollen. Ich werde etwas in Dreßen permoriren, weilen in meinen laboratoriis alda viel zu thun, besonders bey der newen alda auffgerichteten glaßhütte, welche von den verständichsten die Approbation hatt, daß sie dergleichen nicht gesehen, da man mitt so wenigen holtzfewer ein so schönes glaß fabriciret, auch selbst von einen, der Director der Berlinischen glaßhütten geweßen, welcher vor 24 Thl. glaß alda kauffen wolte. Doch fichtet mich dieses wenig an; daß vornehmste ist daß nuhmero ein stettes fewer umbsonst habe, da vieles probiren kan, und daß herrliche gläßer werde haben können, umb die opticam ad talem perfectionem zu bringen, wie in Idea habe. Ich habe bereits vergangenen winter ein perspectiv glaß von 5 viertel der ellen gemacht, mitt welchen in distanz 3 teutscher meilen von Dreßen auß distincte zu Königsstein alles erkennen können, und welches in distanz 36 fuß einen starcken brand in holtz causiret. Sed de his alias. Ich hatte in willens diese Meße in die Acta Eruditorum specimina meines Methodi Generalis cujusvis curvae partes inter se comparandi absque ut ad ullam quadraturam respectus habeatur, aber ich habe noch den calculum zu revidiren nicht zeit gehabt. Durch diese Methode können partes in quavis data ratione gegeben werden quatenus possibile; ist auch alle zeit, excepto circulo, data subtensa alicujus arcus curvae, alia subtensa alterius arcus curvae dabilis, ita ut differentia curvarum sit absolute quadrabilis. Davon ein specimen in Ellipsi geben werde, den in der Parabola ist es sehr leicht. Manchmahl geschieht es daß auch summa Arcuum ejusdem curvae quadrabilis, und alsdan ist curvae Rectificatio verrichtet; sonst diversarum curvarum (ex. gr. Parabolarum) summas und differentias zu quadriren ist ex sola mea descriptione curvarum per focos nach der Medic. mentis bekand, und bedarff nur eine

---

schafften, absonderlich zu der Mathesi und Physica, wie sie aniezo von den gelehrtesten abgehandelt werden, in 4°. pagg. 32. Leibniz hielt im Interesse der Wissenschaft für wichtig, dieselbe durch eine sehr ausführliche Inhaltsanzeige in dem „Monatlichen Auszug aus neuen Büchern", der in den Jahren 1700 bis 1702 in Hannover erschien, bekannt zu machen. Daß diese Schrift Tschirnhausens eine größere allgemeine Beachtung erfuhr, geht daraus hervor, daß noch 1712 eine dritte Auflage erschien. Die Besprechung Leibnizens folgt als Beilage zu seinem nächsten Schreiben.

kleine reflexionem. Übrigens unterlaßen Sie ja nicht daß gutte moment, da man zu Berlin vorhatt eine Academiam ad Mathesin et Physicam excolendam zu stabiliren, vielleicht kombt was hierauß, so sich Exteri nicht imaginiren, den die Teutsche Nation ist sehr laborieus, wen sie auff die rechten Principia gerathen. Wan ich mitt Sie mündlich hierauß zu conferiren gelegenheit, ich wolte vielleicht viel dienliche vorschläge zu deren conservation beytragen. Womitt Sie Göttlicher Gnade etc.

Leipzig d. 16 Octob. An. 1700.

Die Observatio Flamstedii, quod Diameter orbis magni in respectu stellarum fixarum sensibilem parallaxin habe, ist quantivis pretii. A Dieu.

XL.

Leibniz an Tschirnhaus.

Hanover 17 April 1701.

Sie werden zweifelsohne von Hrn. Licentiat Mencken bereits vernommen haben, daß Dero werthes vom 16 Octobr. vorigen Jahres mir erst kürzlich zukommen, indem selbiger wegen meiner abwesenheit die überschickung verschoben, darüber es hernach gar in vergessen und endtlich wieder zum vorschein kommen. Inzwischen werden Sie meine antwort auf das vorige hochgeneigte Schreiben erhalten haben, und ist ihr herrliche teutsche Einleitung zur Mathematik durch meine veranstaltung in den hiesigen Monathlichen Auszügen gebührend recensirt und guthentheils excerpiret worden, damit die hochnüzliche Lehre mehr und mehr ausgebreitet werde.

Auff Dero jüngstes nun zu kommen, erfreue ich mich zuförderst, daß Sie sich meiner so gütigst erinnern, und möchte ich eine conversation von etlichen tagen wohl höchlich wündschen, bin darinn unglücklich gewesen, daß es neulich nicht geschehen mögen.

Ihre Entdeckung, deren solches Schreiben meldung thut, von vergleichung der krummen Linien, dadurch man allezeit zu einem gegebenen bogen einen andern in eben derselben Lini finde könne, dergestalt daß der unterschied beyder absolute zu meßen, wird von großer wichtigkeit seyn und ein neues liecht geben.

Ich habe in meinem vorigen von der Chur Brandenburg. nunmehr Königl. Societät bereits erwehnung gethan, welche der König in Preußen zu fundiren sich voriges Jahr entschlossen, da Seine Majestät sich meiner wenigen gedancken hierbey bedienen und mir das directorium dabey allergnädigst auftragen wollen.

Nun ist der zweck zwar wohl begriffen, aber mit der vollstreckung kan es wegen großer bekandter hinderniße und ander angelegener ausgaben nicht so geschwind von statten gehen. Weil man demnach die Königl. Kammer und Einkünffte zu beladen nicht gemeinet, so hat man sich zuförderst des monopolii der Calender auff mein erinnern bedienet, so man sonst einigen privatis nach dem Königl. Pohlnsch. Chur Sächsisch. Exempel überlaßen haben würde, allein weil solches zu was rechtes nicht zulänglich, habe ich allerhand andere vorschläge gethan, so man auch approbiret, als unter andern, daß der Societät das privilegium der Schlangensprüzen (?) vor alle Königl. Lande gegeben worden. So habe ich auch auff einteichung der Moräste und dergleichen gedacht (welches absehen aber noch nicht bekand gemacht) so alles zu seiner zeit geschehen kan. Sollte Ihnen etwas dienliches und thunliches beyfallen, wird Dero guther rath mir sehr angenehm seyn.

Das erste absehen ist auf ein observatorium hauptsächlich gerichtet gewesen, ich habe aber dafür gehalten, daß mathesis und physica insgemein zu beobachten, ja nachdem Ih. Majestät selbst guth gefunden, daß was in der Franz. Academie des Sciences und Academie Françoise de la Langue in eines gezogen, mithin die teutsche Sprache besorget würde, hat man vor nöthig geacht die zierlosen studia und die Histori nicht außzuschließen. Ich habe insonderheit vorgeschlagen, daß die zusammentragung der Kunstworthe im teutschen den scienzen und der Sprache zugleich zum Aufnehmen gereichen würde.

Was aber insonderheit die Astronomi anbelanget, so düncket mich daß etwas mehreres als bißher zu thun. Herrn Flamstead observation, daß die Fixsterne eine merckliche veränderung nach der veränderung ein diametro orbis magni zeigen, ist freylich wichtig, wenn man sich nur derselben genugsam versichern kann. Denn wenn es auf so kleine theile in observationibus ankomt, ist die sach mißlich, gleich wie schohn bei Hrn. Hookii auch dahin gerichteter observation der Verfolg ermangelt. Daher ich vermeyne, daß solches alles, wenn es richtig, wohl sensibler zu machen. Außerdem werden M. Hoch. Herrn vortrefliche inventa optica ein großes Liecht und Hülffe geben, damit Teutschland den frembden etwas wichtiges entgegensezen, und den Ruhm der vorfahren erhalten könne. Ich befehle Sie etc.

Beilage.

Gründtliche Anleitung zu nüzlichen Wißenschafften, absonderlich zu der Mathesi und Physica, wie sie aniezo von den gelehrtesten abgehandelt werden, in 4⁰. pagg. 32.

Der vortrefliche Herr Autor dieser so kurzen als schöhnen schrifft beruffet sich hin und wieder auff die Medicinam Mentis, darauß sie zum theil gezogen.

Wir wollen nichts desto minder einen außführlichen außzug daraus machen, weil wenig auch wohl große Bücher es beßer verdienen.

Alles Studirens zweck ist die Ehre Gottes, oder deßen rechte Erkäntniß. Dazu muß man die Gaben und Kräffte des gemüthes und leibes wohl anwenden. Was dazu dienet, sind rechte güther; was aber des leibes wohllust und sonst weltliche Dinge, als Ehre und reichthum angehet, sind nur scheingüther an sich selbsten, und führen leicht ab von der ruhe des gemüthes so nur durch tugend zu erhalten. Was aber tugend sey, und zum Hauptzweck bequem mache, zeiget die weißheit oder erkäntniß der Wahrheit. Die wahrheit erfahren wir durch Sinnen, Verstand und Glauben. Der weg zur Glaubens-wahrheit ist in der heiligen schrifft geoffenbahret und zu demselben treibet den Menschen innerlich die heilsame Gnade Gottes, der Mensch aber ist selten bey sich zu haus, und verspühret es wenig. Man muß derohalben auf solchen trieb acht haben, die hinderniße vermeiden, die heilige Schrifft fleißig lesen, die Reden und Lehren Christi wohl erwegen, auch geistreicher Leute schrifften, als Gerhardi, Arndii, Lutkemanni, Scriverii, Mulleri sich bekand machen, besonders des umb die Kirche Christi hochverdienten Theologi Herr D. Speners geistreiche schrifften, vornehmlich seine Lehre, Früchte und Schätze des glaubens, so in 3 absonderlichen jahrgängen gehalten, alda man viel antreffen werde, so man in viel andern büchern mit Müh und arbeit umbsonst suche, und werde von demselbigen glauben nicht so bald eine so außführliche und clare Nachricht beysammen finden.

Was die erlangung der Wahrheit durch Sinnen und Verstand betrifft, so sey der fehler, daß die jugend auf den Schuhlen nur zu der Schwäzkunst geführet werde, weil sich die meisten durch schwäzen bey der welt in Ansehen sezen. Daher wenn solche leute hernach zu ämtern kommen, so wißen sie keine realia, und verrichten ihr amt gar übel. Ihre philosophie selbst ist nur verbalis, oder aufs höchste Historica opinionum und ein leerer Scepticismus, pro und contra zu schwäzen dienlich, darüber denn erkäntniß und tugend versäumet werden. Dahingegen ist nöthig bey der jugend eine starcke liebe zur wahrheit zu erwecken. Dieß geschieht durch schöhne Experimenta, die zugleich eine verwunderung und ein liecht geben, und eine große begierde zu lernen verursachen. Einige streuen ein, alle Menschen hätten solche neigung nicht, aber der Hr. Autor sagt, die erfahrung habe ihm ein anderes gewiesen, kinder aus denen die informatores bekennet nichts machen zu können, nachdem er ihnen mit seiner methodo eine wenige zeit an die hand gestanden, hätten eine solche begierde hernach bezeiget, daß sie früh aufgestanden und nicht wieder von studiren können gebracht werden. Man muß also machen, daß sie eine passionem dominantem zur wahrheit bekommen, so andere begierden überwinde, und daß muß nicht geschehen durch Ehrsucht, denn die macht zancksüchtige, unruhige, schädliche Leute, sondern durch die schöhnheit der wahrheit selbst.

Die Wahrheit zeiget sich nirgend clärer als in der Mathematick, welche zwar großen nuzen zu waßer und land in krieg und friede hat, noch mehr aber darinn, daß sie vermittelst ihrer augenscheinlichen beweiß-schlüße die reine wahrheit und den Weg dazu recht zu erkennen giebet, zu geschweigen daß man dadurch ander Leute gemüther ohnwiederstreblich meistern kan, und neue aufmercksamkeit erwecken, so das rechte ohr ist die stimme der wahrheit zu vernehmen. Und eben die Mathematische Methode läßet sich auch in physicis, politicis und Ethicis anbringen, wie die Neoterici sich deren dann iezo darinn bedienen. Und Plato hat schohn in seinen gesprächen erwiesen, daß sie auch in gemeinem umbgang zu gebrauchen, wie deren übersezung in das französische zeige. Zwey wege nun werden zur Mathesi gebraucht, der eine ist weitschweiffig durch viel instrumente, praxin und bücher; aber man komt doch damit nicht auff den grund der wahrheit. Der andere ist durch die Theori, Euclidem, Archimedem, Apollonium und Analysin recentiorum, der scheint anfangs mit vergebenen Spizfindigkeiten aufzuhalten, allein er gibt den grund, daß man von sich selbst erfinden kan, was andre mit viel kosten suchen müßen. Doch muß man umb der Jugend willen die Mittelstraße gehen, den anfangenden aus allen disciplinis Mathematicis die nöthigsten praxes beybringen, umb eine liebe und einig liecht bey ihnen zu erwecken, hernach ihnen die ursachen zeigen und sie zur theoria führen.

Was solche praxes in sonderheit betrifft, so könne man brauchen des Reiheri sehr leichter anführung zur Arithmetik, die Erzherzogliche Geometri auff dem papier, Schwenters Geometriam practicam auff dem Felde mit wenig stäben und einer Meßkette, die globos, des Schickards Astroscopium, illuminirte Geographische Charten, so auch zu machen. In der Optik die Cameram obscuram, allerhand spiegel, refraction in waßer und gläsern, gläserschleiffen, und andere curiositäten, daraus telescopia, microscopia und brenngläser entstehen. Die fünff Mechanische Kräffte, Schotti Cursus Mathematicus ist zu dergleichen guth genug. In der fortification die Arbeiten des Mallet so guth vor die anfänger, wie auch Alberti Dureri perspectif. Hydrostatica und Hydraulica bey Schotto; in der Architectur die säulenriße, und dabey des Perrault außzug des Vitruvii; in der Gnomonica regular sonnenuhren, und dieß alles vor anfänger.

Aber höher zu kommen, müßte man zurückgehen und von der Theori anfangen; da könne man brauchen den Euclidem des Taquet, so der alten verdrießliche weitläuffigkeit meidet, sonderlich bei morgenstunden, und nicht mehr als 2 stunden auff einmahl, mit langsameren müße man ihn zweymahl durchgehen, also daß sie ihrem informatori selbst die demonstrationes thun, als ob ers nicht wüste, als dann selecta ex Archimede so Taquet beygefüget, die Conica Brameri oder des Chales oder la Hire oder Ozanam. Geschwinde ingenia können aus 10 oder 12 Lehrsetzen des Euclidis, Archimedis und

Apollonii das andere selbst führen, müßen doch solche Bücher auch zweymahl durchgehen, denn es sind die fundamenta, und behalten es besser, als wenn sie nur die principia hätten. Langsame und geschwinde können hernach des Lamy Nouveaux Elemens de Geometrie durchnehmen, da sie das vorige in beßer ordnung wiederhohlen.

Wenn dieß geschehen, komt man zum dritten grad, nehmlich der Analysi, erst numerosa, etwa bis an die quadraticas aequationes, als denn erst zur speciosa oder per literas, so siehet man recht deren großen vorzug, was sonst in 100 operationen geschehen müsse, verrichtet man nun auff einmahl und kan selbst regeln finden, da die alten den Methodum verschwiegen. Hiezu dienen Schotenius und andere über den Cartesium, Abraham de Graaf, Kinckhuysen, Barrow, Hr. Marquis de l'Hospital (so des Hrn. G. H. R. L. erfindung circa Mathesin infiniti wohl ausgeführet). Herr Sturm in Mathesi enucleata gibt guthe Exempel pro Tironibus. Es ist leichter als die gemeine Rechenkunst, und doch von ungläublichen Nuzen. Durch 4, 5 oder 6 propositiones ist man meister von Euclide, durch 3 propositiones kan man alle problemeta construiren so durch zirkel und lineal zu wege bracht, und aus 2 oder 3 theorematibus universalibus Archimedem, Apollonium und vielmehr deriviren.

Nun kan man die particularia mit mehr Nuzen angreiffen, durch Triangula similia alles messen (add. Pitisci Trigonometr.), Optica aus 3 principiis, so zu einem zu reduciren, Mechanick auch aus einem. In übrigen recommendirt der Herr Autor: des Chales Mundum Mathematicum, Geheele Mathesis herstelt in zyn natuurlyke gedaante door Abr. de Graf, Arithmetica Taquets, Geometria Taquets so im großen opere und verdiene a part wieder aufgelegt zu werden. In Astronomia Taquet, Epitome Kepleri, Sethi Wardi Astronomia. In der Geographi Bleau Atlas, Dapper, Mallet, Geogr. universalis Varenii. In optica Zahn, Kepler, Cavalerius, Faber, Cartesius, Hugenius. In der Fortification Felde, Pagan, Vauban, Werthmüller, Rümpler. In den Perspectiv Des-Argues durch Bosse. In der Architectur Blondel, Vignola in 4° durch Hrn. Sturm übersezet, Goldmann und andere. Je mehr nun diese wißenschafften mit demonstrationen versehen, je mehr geben sie liecht, daher man es in der Astronomi so weit bracht, daß unter 12 observationen der unterschied kaum wenig secunden, und daß man das verum Systema Mundi nun erlanget. Man kan auch in einem augenblick sehen was guthes in einem buch, und alles concentriren.

Nun folget die Physica, von deren nuzen zu sehen utilitas philosophiae experimentalis Boylii. Hieraus folgt Ethica, Medicina und Mechanica. Die politici verachten die Physicam, da doch der reichthum eines Landes und des Herrn ohne beschwehrung der unterthanen daran hänget. Wer das büchsenpulver in secreto gehabt hatt, der hätte dadurch Herr der welt werden

können. Der Magnet hat die Neue welt entdecket. Wer hätte gemeinet, daß geringe Experimenta, darauff die druckerey gegründet, so große Dinge in der welt verrichten würden, dadurch man iezo kan ander wißenschafft leicht lernen, sein liecht gemein machen, seine unschuld retten, eine guthe Lehre einführen; wer hätte sollen meinen, daß man durch schleiffung des glases das innere der Natur erkennen, auff unglaubliche weite sehen, ein feuer aus der sonne zu wegebringen könne, so alles Chymische übertrifft etc. Nüzliche praxes vor die jugend zeiget Hr. Sturmii Collegium Experimentale. Anatomie ist sehr deutlich bey Verheyen, Bidloo etc. add. Biblioth. Anatom. Mangeti. In der Chemi ist des Emery Cursus Chymicus sehr methodisch, der auch iezo in teutsch. In der Probirkunst Agricola, Ercker, Olaus Borrichius. Was die Mechanik betrifft, ist nun die ganze Physica zu einer unsichtbaren Mechanica worden. Von vermehrung des Menschlichen Vermögens besiehe Jungnickel Clavem Machinarum, und die so oben citirt. Von allerhand arbeiten und Mehlwercken Böckler in Theatro Mechanico und andere. Man muß der jugend weisen Machinas abzuzeichnen, ihre würckung aus den figuren ohne erklärung zu verstehen, und der Machinarum absehen zu betrachten, so da ist die Menschen der wiederhohlung einer arbeit zu überheben, sich bei allerhand Künstlern und werckläuten umb zu sehen. Dazu dienet Weigelii abbildung der Hauptstände, und wäre zu wündschen, daß große Herrn rechte Naturalien Kammern aufrichteten. Vor die anfänger dienet des Rohault Physica, hernach Philosophia vetus et nova des Hrn. du Hamel, Philosophia Eclectica des berühmten Hrn. Sturm. Wenn auch die autores die rechten ursachen offt nicht treffen solten, so geben sie doch ein liecht, weil sie etwas verständtliches sagen. Solte man die sachen in Schuhlen lehren, würde Schola recht Ludus werden. In der Physick findet man offt rationes mancher jurium; Bewegung der affecten durch eine wahre beredsamkeit, den rechten nuzen der sprachen, umb ander nationen experimenta zu erlernen, also daß auch solche realia dienen der jugend zugleich zu der Lateinischen und andern sprachen lust zu machen, umb dasjenige so sie gern wißen wolten, darinn zu finden, da sie sonst solche wohl nicht nach der gemeinen weise der schuhlen erlernet haben würden.

XLI.

Tschirnhaus an Leibniz.

Ich habe vermeinet, ich würde Sie einmahl selbst zu sehen gelegenheit haben, welches mir aber bieshero, was auch tentiret, sich nicht vor mir so favorabel ereügen wollen. Man köndte bey einer conference mehr außrichten

als mitt vielen Briefen; die Meßen alwohin alle zeit komme, wehren eine gutte gelegenheit, scheinet aber daß es Dero Affairen nicht zulaßen, wie Sie den ietzige troublen nicht wenig werden occupat gehalten haben. Ich bin übrigens fast stets in Dreßen, alwo zwey Laboratoria habe; die glaßhütte ist gewiß in den andern Jahre daß gearbeitet wird, in dergleichen stande, als nicht leicht irgends in Teutschland eine glaßhütte ist. Erhalte ich noch 2 Jahre, so wird weder Venedig noch Paris unß dergleichen was produciren. Nuhmero bin nahe, daß mein intent ad Optices perfectionem erreichen kan, welches wohl schon bey vielen jahren in effect setzen können, wen einziges adjusté (?) gehabt und nicht alles durch mich selber thun müßen. Das letzte so praestiret ist ein glaß so in distance 50 schue brennet; der focus oder das bild der Sonne ist einer 4tel der ellen groß; wan es aber durch ein collectiv glaß zusammen gezogen wird, so ist der focus eines Reichsthalers groß, welches alsdan eine unglaubliche force zu brennen hatt. In übrigen ist es ein schönes und sonderbahres perspectiv glaß. In Frankreich haben sie nuhmero auch ein groß Brennglaß von mir erhalten, welches gesund und frisch ankommen, wie vor 14 tagen von meinen Sohn nachricht aus Frankreich erhalten. Ich habe der Academie dergleichen inventa communiciret, die alda sehr appreciiret worden, wovon die Histoire und Memoire in künfftigen jahre nachricht geben wird.

Beygelegten Brieff von Hrn. Lippern*) hette schon in meiner durchreise zu Hanover übergeben; weil Sie aber nicht anweßende wahren, so habe es unterlaßen, ersuche aber, so ferner es sich thun läßet, ihm damitt zu gratificiren, weilen er es nicht sowohl umb interesse, als daß er gelegenheit hatt, es an andere viele wohl bekand zu machen, und sich hierdurch zu recommandiren thut. Womitt Sie Göttlicher Gnade etc.**)

XLII.

Tschirnhaus an Leibniz.

Wie ich gleichfals offt gewüntschet ein angenehm entretien zu haben, so hatt mir es doch bieshero stets gefehlet; dahero höchst erfrewet worden als Dero angenehmes gestern erhalten, welches mir nicht wenige speranz hierzu machet. Ich werde sonst meistens zu Dresden mich aniezo auffhalten, solte aber gleich

*) Buchhändler in Lüneburg. Er stand mit Leibniz in Briefwechsel.

**) Ohne Ort und Datum, jedenfalls aber um das Ende der Jahres 1701 geschrieben.

auff meine Gütter etwan die Pfinstferien gehen, so werde doch gleich dahin revertiren. Anietzo werde noch alhier die Meße abwarten, doch so gleich nach Dresden mich wenden, so in 4 à 5 tagen erfolgen möchte. Man hatte alhier vor eine Academie des Sciences auffzurichten, ich solte auff Königlichen Befehl ein Project davon entwerfen, worzu auch einen anfang gemacht, weilen es aber hernach nicht starck urgiret wurde, so bin auch piano hierinne gangen. Die Dioptricam in solche perfection zu setzen, wie ich in idea habe, hatt mir große mühe gemacht, aber nuhmero alle difficultates superiret, nur daß die Zeiten es in execution propter sanctum denarium etwas noch hindern. Habe sehr beklaget, daß selbigen bey newlichen anwesenheit in Dresden nicht gesprochen. Von Hrn. Newtons Buch de Coloribus habe nachricht, aber selbst noch nichts gesehen, so aber sehr excellent zu sein gerühmet wird. Ich beklage sehr daß so zeitige absterben des Marquis de L'hopital. Ich habe gleich auß Holland erhalten ein buch, deßen tit. Fluxionum Methodus inversa a Georgio Cheynaeo in 4to, zu London. A Dieu etc.

Leipzig d. 23 Ap. An. 1704.
in höchster eile.

XLIII.

Leibniz an Tschirnhaus.

Dresde 26 Decembr. 1704.

Comme vous m'avés accablè d'honnestetés, j'eusse bien souhaité d'avoir à mon tour l'honneur de vous trouver chez vous, mais particulierement celuy de conferer avec vous aussitost que vostre commodité le pourra permettre. Car le Roy m'ayant demandé mes sentimens sur une Societé des Sciences, j'avois eu l'honneur de luy dire que vous aviés déja travaillé, Monsieur, et qu'ainsi il seroit à propos que nous concertassions l'affaire ensemble; Sa Majesté l'a fort approuvé et m'en a chargé expres. Or je suppose que c'est conformement à vostre propre dessein, comme vous vous en estes ouvert envers moy. Car je compte absolument la sincerité de vos paroles, Monsieur, et je m'imagine que vous estes bien aise de venir à la conclusion. Ayés donc la bonté de faire en sorte qu'on puisse convenir de quelque chose avant le retour du Roy, à fin que je fasse connoistre mon zele et mon activité dans la premiere affaire dont il m'a chargé il y a déja 4 jours. Et vous savés qu'il faut battre le fer pendant qu'il est chaud, et que mon temps est court icy, ce qui peut servir de cuneis (?). Je suis perfaitement etc.

XLIV.
Leibniz an Tschirnhaus.

Ecrivant maintenant à la Reine de Prusse par la poste qui part avant midy, et luy parlant de vos belles pierres, capables de garnir un cabinet, il m'est venu dans l'esprit, de vous demander, Monsieur, si vous me pourriés peut estre marquer quelques particularités pour savoir si on en a à vendre, et à quel prix, pour en informer sa Mté.

Il faut que je vous dise en même temps, Monsieur, que des personnes de grande consideration m'ont demandé encor maintenant mon avis sur une Academie des Sciences icy. J'avois repondu déja autres fois à une semblable demande, que la chose me paroissoit tres faisable et tres utile dans ce pays cy, et même j'en avois donné mes avis. Mais à present j'ay repondu qu'ayant appris de vous, Monsieur, que vous aviés mis la chose en tres bon train, on n'avoit qu'à suivre et executer vos bons projets, et que bien loin de vouloir troubler vos cercles, je me ferois un plaisir d'y contribuer.

Dresde.

XLV.
Tschirnhaus an Leibniz.

Ich habe bereits zwey Briefe von selbigen erhalten, wollen nicht übel vermercken, das bies dato nicht geantwortet, theils weilen in vielen occupationen wie Sie wießen, und in sonderheit die zeit, wan meine stunden habe, gutten studiis solche consacrirt, besonders im winter, theils so habe in bewußter Affaire was den gutten Freund concerniret, wohl alles gethan, daß nicht zweyfele, es werde alles wohl secretiret werden, aber sonst eine solche repugnance gefunden, wie bey diesen genere hominum besonders in Sachsen gebräuchlich, daß ich sehr zweyfele, ob zu gutter reuissirung einzige Hoffnung übrig sey. Doch gutta cavat lapidem etc. Ich wihl sehen, nach wohlgebrauchter fernerer prudence, ob nicht ein eingang zu der festung, und alsdan gleich post hiervon geben. Was die Etablirung bewußten Werckes zu des Publici besten concernirt, so stehet es annoch in besten Terminis, und habe bereits schon alles abgethan, was das wichtigste hierin zu sein schiene. Besonders habe ich den tempo

der anwesenheit des Serenissimi sehr emploiiret, und weilen sehr offte gutte gelegenheit hierzu in geheim hierüber als auch den Hrn. Stadhalter zu conferiren, ohne daß der Tertius solches verhindern kan, so habe meinen gröſten ernst sein laßen, alles auffs bestmöglichste zu perfectioniren, wovon suo tempore plura. Ich habe reflexion gemacht, gleichfals den Hrn. Bernoulli, welcher zu Gröningen, anhero zu ziehen, möchte Dero meinung hierüber wohl vernehmen, indem ich plenariam potentiam zu choisiren habe wehn ich wihl, und expressen hohen befehl und anordnung, daß mir keiner auffgedrungen solle werden. Beklage übrigens sehr die hohen Fata Ihro Majestät der Königin in Preußen; hoffe nicht daß die dahero entstandene Alteration Dero Frau Mutter einen gleichen zufall causiren möge, besonders daß Dero wertiste Persohn hierüber alzu sehr afficiret möge werden, wie es gehet, wen man besondere Fautores verliehret. Sonsten habe einen extraordinarium progressum in re Geometrica gethan, wovon in kurtzen ein mehreres, auch sonst sehr favorable aspectus in studiis gehabt. In den Actis habe des Hrn. Newtons gedancken ersehen circa curvas, so den meinigen gantz conform, außer was den numerum curvarum betrifft. Sonsten ist mir auch diese proprietas circa diametros bekand geweßen (den ich auß meines Hrn. Discurse gantz was anders praesumirte) und giebet Hr. Wallisius die Radicum cubicae aequationis constructionem hierdurch, ich aber derselbigen expressionem. Wormitt nächst Göttlicher empfehlung etc.

Dresden d. 6 Febr. An. 1705.

LXVI.

Tschirnhaus an Leibniz.

Die biesherigen sonderbahren Aspecten in Caelo politico sind so beschaffen geweßen, daß ich mitt iemanden Brieffe zu wechseln hohes bedencken getragen. Weßwegen Sie güttigst pardoniren, daß auff zwey Brieffe*) allererst an ietzo und mitt wenigen antworte. Ich habe mich fast stets in Dresden befunden, und alda in strepitu Mundi meine circulos in gröster Tranquillität continuiret. Wan ich das Unum Necessarium ungehindert treiben kan, so fechten mich wenig andere sachen an, welche derjenige Providenz willigst allein überlaße, die solche auff die beste art dirigiret. Der schaden welchen hierbey in rebus fortunae geliedten, gehet auch noch an. Ihro Königl. Majestät

*) Die Leibnizischen Briefe fehlen.

kahmen von Leipzig unverhofft alhier an vor den Weihnachtsferien und sind 5 à 6 tagen alhier gewesen, dabey viele auffwartung; viele Gnade verspühret und auch wircklich genoßen. Ersehe daß dieses richtig erhalten wird, so wihl ein mehreres . . . . auch meine observation übersenden des sehr schönen und raren Phaenomeni, der totalen hinwegnehmung des Sonnenlichtes bey sonst heiteren Himmel nicht weit von Mittage; es hatt mich sonderbahr delectiret. Weiß nicht ob es iemand quoad Phaenomena et Physicalia so accurat observiret. Und weilen es viel verlanget wurde, so hatte es in willens deutsch und lateinisch drucken zu lassen. So ferne Sie aber mich dieser mühe überheben wollen und sichere Adresse an Sie habe, so wihl es gerne mit dem Publico zu communiciren Ihnen überlaßen. Meinen andern theil der Medicinae corporis habe auch absolviret und wihl ihn diesen winter außpoliren, daß er den druck kan übergeben werden. Wormitt zu diesen newen Jahre und vielen folgenden alles dasjenige hertzgründlich apprecire, was Sie selbst zu gröster vergnügung des Gemüthes sich außzusetzen belieben. Nechst Göttlicher Ergebung etc.

Desden d. 27 Dec. An. 1706.

Ich verreise übermorgen nach hause; hoffe innerhalb 14 tagen wieder anhero gewieß zu kommen.

Nachtrag.

Unter den Leibnizischen Manuscripten ist der Anfang eines Schreibens an Tschirnhaus vorhanden, als dieser sich in Rom befand. Das Bruchstück ist insofern interessant, als Leibniz darin über seine und Tschirnhausens algebraische Arbeiten während des Pariser Aufenthalts berichtet.

Leibniz an Tschirnhaus.

Quanquam me Tibi nunc respondere vetueris discessurus scilicet Roma, et metuens ne literae in alias veniant manus: respondeo tamen, literis ea conditione Romam missis, ut te digresso ad me redeant. Non possum non probare rationes quae TE consilio meo uti prohibuerunt: fatendum est enim, aulam utcunque egregiam libertati ac quieti philosophantis contrariam esse. Satis est me Tibi probare conatum esse voluntatem meam, neque unquam omissurum occasionem qua testatum

facere possim, quantum tibi tribuam. Iter tibi faustum et felix precor, et quam primum a te nuntium expecto.

Ad Mathematica venio: multa disseris ut ostendas quadraturarum methodum superiori Epistola missam tibi uni propriam esse. Putabam TE curare veritatem, non autorem veritatis; sed inde intelligo (ignosce jocanti) verum esse quod ait Tacitus, etiam sapientibus gloriae cupiditas novissima exuitur. Neque vero opus habebas illa Apologia, nam etsi alii scivissent, non minus tute tibi inventor fuisti. Nam a me quidem Te habuisse, et postea tibi ascribere voluisse, absit ut vel cogitem. Ego si bene genium tuum novi, illud notavi saepe, te et ingenio mire pollere, et ea quae in manibus habes profunde inspicere; sed ita plerumque praesentibus meditationibus esse deditum tantique eas facere, ut alia ab iis abeuntia ab alio allata parvi facias aut certe non attente consideres. Unde nonnulla olim a me tibi proposita neglexisti, quod alias methodos haberes quibus plus tribueres, donec postea experientia et inquirendi progressu edoctus, sponte tua incidisti in mea. Ita cum initio Parisios veniens aequationum radices ex enumeratione formularum irrationalium ducere velles, spernebas methodum meam, qua quantitatem ignotam secabam in partes, et cujus ope specimina illa radicum altiorum binomiarum Cardanicis similium dederam primus tibique in scheda aliqua descriptum ostenderam, Tu postea propriis meditationibus ad eandem methodum devenisti. Cumque postea Parisiis in methodo hac (radicis incognitae in partes sectae, ut x aequ. $a + b + c$) occupaveris et comparationes institueres, non satis placebat tibi observatio mea, qua ostendebam semper in comparando ad has aequationes comparatitias deveniri posse ab aequ. ...., abc aequ. ...., a^4 aequ. ... et ipsis
ac $\qquad\qquad\qquad\qquad$ b^4
bc $\qquad\qquad\qquad\qquad$ c^4
resolutis haberi posse a, b, c. Tu enim potius utebaris non rectangulis, sed potestatibus, aut nunc potestatibus nunc rectangulis ut a^2 aequ. ....,
b^2
c^2
abc aequ. ...., quoniam id tibi in quadrato-quadratico gradu successerat. Ego vero generalia intuebar, et ostendebam, si posset hoc modo per rectangula exitus reperiri, mira inde compendia proditura. Nam non opus fore calculo ad inveniendas ipsas a, b, c, si possunt omnia ad eundem attolli gradum, ut a^4 aequ. p^4 et a^4b^4 aequ. q^8 et $a^4b^4c^4$
b^4 $\qquad\qquad$ a^4c^4
c^4 $\qquad\qquad$ b^4c^4
aequ. r^{12}, quia ex communi Algebra notum et jam Vietae ac Cartesio observatum est, hinc fieri $a^{12} - p^4a^8 + q^8a^4 - r^{12}$ aequ. o. Et hoc est quod ego appellabam *praeformationes*, qua ita fingimus aequationes

comparandas, ut comparationis calculo non sit opus. Praeterea hinc ducebam necessario pro gradu quarto ascendendum ad aequ. 12 graduum, pro gradu 5 ad aequ. 20 graduum, et ita porro. Quod tu etiam non admittebas, et depressiones gradus sufficere putabas. Imo hinc etiam ducebam corollarium illud mirificum, quod quemadmodum omnes aequationes quarti gradus reduci possunt ad tertium, ita omnes aequationes octavi, novi et decimi gradus reduci posse ad septimum. Item, quod omnes radices unius alicujus gradus simul additae dant formulam irrationalem similem uni radici gradus proxime altioris. His a me tunc saepe monitis animum non adhibebas, sed tuas methodos persequebaris: nunc vero gaudeo te ad meliora rediisse, quanquam facile credam te eorum quae tunc colloquebamur non amplius meminisse, nec dubitem, quia tua sponte in ista denique incideris. Ne tamen putes ista a me fingi, habeo adhuc schedas complures Parisiis scriptas quae ista continent, et nonnullas ex illis, in quibus reperitur tua manus. Certe quae scripsisti et eleganter deduxisti pulchrisque tabulis illustrasti in Epistola tua novissima, ea statim intellexi et pauca reperi a me non observata, quod plurimis uti dixi schedis anno biennio et ultro abhinc scriptis ostendere possum. Doctrinam de Formis (ut $\begin{matrix}a^2\\b^2\\c^2\end{matrix}$, $\begin{matrix}aba\\b\end{matrix}$, et aliis omnibus in quibus literae se eodem modo habent) tractavi longe generalius et Tabulas jam anno abhinc per puerum aliquem quem mecum habebam condi curavi, ubi mirifica patent compendia et progressiones generales, ita ut cum forma una in aliam ducenda est, statim ope tabulae productum reperiri possit. Cum ego dudum notassem, posita incognita x aequ. $a + b + c$ etc. semper haberi posse $\begin{matrix}a^4\\b^4\\c^4\end{matrix}$ aequ. f^4, $\begin{matrix}ab\\ac\\bc\end{matrix}$ aequ. g^2, abc aequ. h^3, et id unum restare, ut loco aequationis $ab + ac + bc$ aequ. g^2 nanciscamur aequationem $\begin{matrix}a^4b^4\\a^4c^4\\b^4c^4\end{matrix}$ aequ. cuidam cognitae. Hoc inquam cum notarem, jam triumphabam et putabam habere me prorsus confectam radicum extractionem, quemadmodum te nunc putasse video, neque enim dubitabam, quin facile illa aequatio ope ceterarum ad hanc posset attolli. Sed postea rem opinione difficiliorem reperi, imo tandem demonstravi ea via quam tu quoque ingressus es, exitum esse impossibilem. Quod tute quoque deprehendisses, si vel unum exemplum (supra cubicum gradum, in quo solo res hoc modo procedit) calculare suscepisses. Sed tibi (quemadmodum olim et mihi) nimis blandiebatur ista pulchritudo et generalitas. Ais aequationes has $x^4 + y^4 + z^4$ aequ. a,

$xy + xz + yz$ aequ. b, xyz aequ. c (positis x, y, z incognitis, a, b, c cognitis) posse reduci ad has: $x^4 + y^4 + z^4$ aequ. a, $x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4$ aequ. . . ., $x^4y^4z^4$ aequ. c^4. Id vero ego impossibile esse ajo, ut illa $x^4y^4 + x^4z^4 + y^4z^4$ aequ. . . . cognitae ex dictis tribus assumtis inveniatur, nisi id fiat per aequationem aeque difficilem ac illa quae quaeritur. Mutatione quadam opus est, et oblique consequendum quod recta non licet, sed calculo multo prolixiore, qui ut contrahatur necesse est eam, de qua me scribere alias memini, formarum Tabulam absolvi. Quae alios maximos habet usus, continet enim Algebrae totius arcana, Combinatoriae vero applicationem egregiam. Nam ego Combinatoriae subordinatam puto Algebram, quia combinatoriam non habeo pro arte inquirendi numeros possibiles variationum, sed pro arte formarum seu pro scientia generali de Simili et Dissimili, cujus regulas Algebra ad magnitudinem in universum, Geometria ad figuras applicat. Atque eo sensu minime admitti potest, quod ais Combinatoriam esse Algebrae filiam, quod mei potissimum causa adjecisse videris, quem scis aliter sentire. Nescio quo infortunio factum sit, ut paucas mearum opinionum tibi persuadere potuerim, tametsi ni fallor plerisque eventus faverit. Ut mittam quae dixi de radicibus, velim te meminisse difficultatum de infinito, ubi putabas ex illis quae a Spinosa ea de re didiceras omnes solvi posse, et tamen non raro expertus es, facilem esse in paralogismos lapsum, si quis infinito et indivisibilibus utatur, nisi tum demum admittat, quando demonstrationes Apagogicae dari possunt. Hoc multis illustribus exemplis subinde tibi ostendere memini, vix tamen profeci. Locutus tibi sum aliquando de quibusdam meis calculis peculiaribus circa tangentes et quadraturas: respondisti tibi nova signa inutilia videri, nec nisi ad obscurandum facere, ut nunc quoque scribis; si exempla videre voluisses, antequam rejecisses, aliter sentires. Omnia enim illa theoremata Gregorii, Barrovii, Fermatii, Heuratii, Wallisii non nisi corollaria sunt facillima generalissimi illius calculi mei, per quem et saepissime ad methodum tangentium inversam aditus patet, et tangentes irrationalium aequationum exhiberi possunt sine reductione. Unde fit ut circa quadraturas nonnulla fuse atque eleganter a TE deducta et per se pulchra, a me tamen non nisi ut corollaria calculi generalis considerentur. Haec ideo scribo, mi amice, quia video ac doleo TE saepe plurimum laboris et temporis perdidisse, non alia de causa quam quod observationes quasdam meas candide propositas non satis audire voluisti. Certe quae nunc invenisti sane pulcherrima (si absolvantur) de radicibus aequationum, ea jam tum ex iis quae Parisiis proponebam, nullo negotio ducere potuisses et dudum rem totam ab eo tempore absolvisses. Ego libenter utor aliorum laboribus, neque enim satis nobis

temporis est ad praestanda omnia per nosmet ipsos. Optarem tibi perspecta esse omnia illa quae immenso labore egi in his studiis, non dubitem a TE his qualibuscunque auxiliis sublevato praestari posse, quae in immensum transcenderent mea. Inventio Radicum eo reducta est ut tantum res calculi sit, quam in rem Tabulas pulcherrimas condi curabo: Alias praescribam Tabulas, quarum ope facile ex pluribus aequationibus fieri possit una; item Tabulas omnium quadraturarum pure analyticarum possibilium. Tria maxime desidero in abstracta Mathematica: solutionem problematum Diophanteorum; Methodum Tangentium inversam, qualem patitur natura problematis, et inventionem exponentium incognitorum. Methodum omnes quadraturas inveniendi per Logarithmos, omnium post homines natos repertarum ad praxin facillimam et generalissimam mittam Tibi, ubi certo sciam ubi sis. Linea Logarithmica semel descripta prope omnia problemata solvi possunt. Jam olim tibi (locutus sum) de methodo mea qua Geometrice describi potest Logarithmica aliaeque lineae transcendentes, ut quadratrix et aliae quae Cartesio Mechanicae videntur, quia eas per regulas quasdam motu continuo ab uno pendente describi posse nesciebat. Haec descriptio linearum transcendentium Geometrica inter potissima mea inventa habeo. Vere enim Geometriae pomoeria in immensum amplificat. Ut enim Cartesius ostendit curvas altiorum graduum in Geometriam recipiendas, quia uno tractu per solarum regularum motum ab uno pendentem describi possunt, et ita si instrumenta probe sint elaborata, exacte describi possunt, ita ego ostendam curvas transcendentes, id est quae nullius sunt certi gradus, sed de gradu in gradum procedunt sive inderminatam habent in exponente, posse describi simili plane motus ratione, solis regulis mobilibus sese certa ratione ducentibus. Quare nihil est causae, cur non in Geometriam nunc recipi debeant, quoniam et natura earum aequatione exprimitur et descriptio axacta in plano habetur, praesertim cum sint incredibilis usus et mirificas habeant proprietates.

Briefwechsel

zwischen

Leibniz

und

Christiaan Huygens.

1673(?)—1695.

Christiaan Huygens (geb. den 14. April 1629 zu 's Gravenhage, gest. daselbst den 8. Juli 1695) studirte unter dem Cartesianer Fr. van Schooten auf der Universität zu Leyden die mathematischen Wissenschaften, und gab frühzeitig Proben eines ausgezeichneten Talentes. 22 Jahre alt veröffentlichte er 1651 als seine erste Schrift die Abhandlung über die Quadratur der Hyperbel, der Ellipse und des Kreises, in welcher er die von Gregorius a S. Vincentio begangenen Irrthümer berichtigte, worauf 3 Jahre später die Schrift: De circuli magnitudine inventa nova folgte. Hieran schloß sich 1656 die Abhandlung De ratiociniis in ludo aleae, welche die erste wissenschaftliche Darstellung der Wahrscheinlichkeitsrechnung enthält. Neben diesen Studien auf dem Gebiet der reinen Mathematik errang Huygens gleichzeitig unvergänglichen Ruhm durch Entdeckungen im Weltenraum; er fand 1655 den ersten Mond des Saturn und in

---

In der Schrift: Christiaan Huygens in zijn leven en werken geschetst, door P. Harting, Groningen 1868, wird das Testament von Huygens veröffentlicht; er schreibt darin seinen Namen Christ. Huygens. In seinen Briefen an Leibniz unterzeichnet er sich stets Hugens de Zulichem, indem er nach dem Gebrauch der Zeit seinen Familiennamen, wie auch den Beinamen französisirte. In Betreff des Beinamens „van Zuylichem“ findet sich in der oben angeführten Schrift S. 53 die folgende Angabe: Bij den dood des vaders, die trouwens eerst in 1687 voor viel, verdeelden zijne drie nog in leven zijnde zoons deze heerliikheden onder elkander. Constantijn werd heer van Zuylichem, Christiaan van Zeelhem, Lodewijk van Monnikenland. Het toevoegsel „van Zuylichem“ was echter door het gebruik schier tot familienaam geworden, iets dat soms aanleiding tot verwarring heeft gegeven. Hiermit stimmt die Bemerkung von Huygens in dem P. S. zu seinem Briefe an Leibniz vom 1. Sept. 1691: Je ne scay pas pourquoy ces Mrs. de Leipsich m'ont donné cette fois le titre Dynasta in Zulichem au lieu de Zeelhem, qu'ils ont mis cy devant et qui estoit comme il faut.

demselben Jahre die wahre Gestalt dieses Planeten. Im Jahre 1657 veröffentlichte Huygens die wichtige Entdeckung, wie die Gewichtsuhren vermittelst des Pendels zu verbessern wären. Durch diese vielseitigen wissenschaftlichen Leistungen gewann Huygens den Ruhm, die erste Autorität in dem Gebiet der exacten Wissenschaften auf dem Continent zu sein; er erhielt zur Verherrlichung der von Ludwig XIV gegründeten Académie des sciences durch den Minister Colbert die Einladung, seinen Wohnsitz in Paris zu nehmen. Hier veröffentlichte er sein berühmtes Werk: Horologium oscillatorium sive de Motu pendulorum ad Horologia aptato demonstrationes Geometricae, das dem hervorragendsten Werke des Jahrhunderts Newton's Philosophiae naturalis principia mathematica zur Seite tritt.

Leibniz traf im März 1672 in Paris ein. Ein politischer Auftrag und andere Geschäfte nahmen ihn anfangs in Anspruch; er versäumte indeß nicht, die Bekanntschaft der berühmtesten und hervorragendsten Männer in Wissenschaft und Kunst, an welchen die Hauptstadt Frankreichs damals so reich war, zu machen. Seine Vorliebe für die Mathematik führte ihn auch zu Huygens. Leibniz hatte sich bisher vorzugsweise mit Arithmetik, mit den Eigenschaften der Zahlen, mit der Summirung von Zahlreihen u. s. w. beschäftigt. Sie bildeten auch den Inhalt ihrer ersten wissenschaftlichen Gespräche. Die beiderseitigen vorliegenden ersten schriftlichen Mittheilungen sind nicht genau datirt, stammen aber höchst wahrscheinlich aus der Zeit nach Leibnizens Rückkehr aus London im März 1673. Im Anschluß an seine arithmetischen Studien wandte sich Leibniz zur Algebra. Er hatte sich bis dahin aus den elementaren Lehrbüchern von Lantz und Clavius unterrichtet, welche das algebraische Rechnen bis zur Wurzelausziehung des zweiten und dritten Grades enthalten.*) Zur Fort-

*) Johann Lantz (oder Lanz, gest. 1638 in München oder in Mainz) war Professor der Mathematik und Astronomie an der Universität Ingolstadt. Die von Leibniz benutzte Schrift hat zum Titel: Institutionum Arithmeticarum Libri Quatuor, in quibus

setzung dieser Studien, namentlich in Betreff der Auflösung der cubischen Gleichungen, wählte Leibniz das für seine Zeit berühmte Werk von Bombelli: L'algebra parte maggiore dell' Aritmetica divisa in tre libri, Bologna 1572, zum Führer. Bombelli hatte dargethan, daß wenn die cubische Gleichung drei positive rationale Wurzeln hat, diese durch die Cardanische Formel gefunden werden könnten; sind jedoch Wurzeln negativ, so sah er sich genöthigt, zu ihrer Bestimmung einen andern Weg einzuschlagen. Leibniz gelang es zu zeigen, daß die Cardanische Formel zur Auflösung der cubischen Gleichungen allgemein gültig sei.

Trotz dieses Erfolges überzeugte sich Leibniz, als er zur Behandlung der Gleichungen des fünften Grades überging, daß es unmöglich sei, eine allgemeine Formel für die Auflösung der Gleichungen zu gewinnen. Er wandte sich zu geometrischen Problemen. Leibniz hatte Mercator's Logarithmotechnia, in welcher der Flächeninhalt zwischen der Hyperbel und der Asymptote durch eine unendliche Reihe ausgedrückt wird, von seinem Aufenthalt in London mit sich genommen; durch diese Entdeckung Mercator's, die damals allgemeines Aufsehen machte, wurde seine Aufmerksamkeit vielleicht auf das Problem der

---

Regulis et Exemplis practicis brevissime et clarissime explicantur quatuor numerorum genera: I. Rationales absoluti, II. Rationales cossici, III. Irrationales absoluti, IV. Irrationales cossici. Cum Appendice Fractionum Astronomicarum ab Joanne Lantz, e Societate Jesu conscripti in gratiam studiosae juventutis. Coloniae Agrippinae M. DC. XXI. 8. In dem Vorwort an die Leser erwähnt der Verfasser, daß er von den Alten die Schriften Diophant's, ferner von „Cardano, Stiphelio (Stifel), Francisco Vieta, Joanne Faulhabero et aliis" benutzt und die Lehren so dargestellt habe, daß sie ohne Lehrer gelernt werden könnten. Die Schrift unterscheidet sich dadurch von vielen andern des 16. und 17. Jahrhunderts, daß darin Arithmetik und die Elemente der Algebra nach einer dem Verfasser eigenthümlichen Weise dargestellt werden. Der Inhalt erstreckt sich bis zur Ausziehung der Quadrat- und Cubikwurzel. Von demselben Umfang ist die Schrift des Clavius; der Titel derselben ist: Christophori Clavii Bam ergensis e Societate Jesu Epitome arithmeticae Practicae, nunc quinto ab ipso auctore anno 1606 recognita et multis in locis locupletata. Coloniae Agrippinae Anno M. DC. VII. 8. Beide, Lantz wie Clavius, sind Jesuiten; es ist deshalb höchst wahrscheinlich, daß Leibniz die beiden Schriften während seines Aufenthalts in Mainz (er selbst sagt als „puer") gelesen hat.

Quadraturen gelenkt. Er versuchte für den einfachsten der Kegelschnitte, für den Kreis, Aehnliches zu leisten, und es gelang ihm das Verhältniß des Flächeninhalts des Kreises zu dem umschriebenen Quadrat durch die nach ihm benannte Reihe auszudrücken. Leibnizens Mittheilung an Huygens über diese Entdeckung fehlt; es ist nur die beglückwünschende Antwort des letzteren an Leibniz vorhanden.

Es kann auffallen, daß in der Correspondenz zwischen Leibniz und Huygens keine Mittheilung von Seiten Leibnizens über die Entdeckung des Algorithmus der höheren Analysis, die gegen Ende des Jahres 1675 fällt, vorhanden ist. Da Leibniz jedenfalls Kenntniß hatte, daß Huygens kein Anhänger der neueren Methoden war, die in dem wenig zuverlässigen Verfahren Cavalieri's ihren Ursprung hatten, vielmehr deshalb der widerspruchslosen Methode der Geometer des Alterthums treu blieb, und da er den von ihm gefundenen Algorithmus der höheren Analysis für weitere Entdeckungen geheim halten wollte — aus diesen Gründen unterließ er jede nähere Mittheilung.

Leibniz verließ im October 1676 Paris, um nach Deutschland zurückzukehren. Erst im September 1679 knüpfte er die Correspondenz mit Huygens wieder an. Er erwähnt unter andern, daß er in den Quadraturen, in der umgekehrten Tangentenmethode (methodus tangentium inversa) d. i. in der Integralrechnung bedeutende Fortschritte gemacht habe, und er fordert Huygens auf ihm ein Problem aus der umgekehrten Tangentenmethode vorzulegen, um daran die Anwendbarkeit seines Verfahrens zu prüfen. Besonders aber wünscht Leibniz ein Urtheil von Huygens in Betreff seiner neuen Analysis situs (auch Geometria characteristica von ihm genannt), wovon er ihm eine Probe übersendet. Huygens, der in den Anschauungen der Geometer des Alterthums lebte, konnte jedoch sich nicht von der Wichtigkeit dieser neuen Disciplin überzeugen; er fordert Leibniz auf, an Beispielen die Vorzüge derselben zu zeigen, ebenso auch in Betreff

der andern Methoden, die dieser meint gefunden zu haben. Darauf übersendet ihm Leibniz ein Specimen utilitatis Methodi novae Tangentium sive de maximis et minimis.

Es folgt wiederum eine längere Unterbrechung der Correspondenz zwischen Leibniz und Huygens. Anhaltende Kränklichkeit vermochte letzteren im September 1681 Paris zu verlassen, um in seinem Vaterlande seine Gesundheit wieder herzustellen. Vielleicht unterließ auch Leibniz die Fortführung der Correspondenz, da der Plan, durch Vermittelung von Huygens Mitglied der Pariser Akademie zu werden, nicht in Erfüllung ging. Veranlassung zur Wiederanknüpfung der Correspondenz gab das Problem der isochronischen Curve. In dem Streite mit den Cartesianern über das Maaß der lebendigen Kräfte hatte Leibniz, um, wie er sagte, diesen Streit für die Geometrie nützlich zu machen, seinen Gegnern im Jahre 1687 die Aufgabe gestellt: diejenige Curve zu finden, welche ein schwerer Körper beschreiben muß, der sich in gleichen Zeiten gleichviel der Horizontalebene nähert (Trouver une ligne de descente, dans laquelle le corps pesant descende uniformément et approche également de l'horison en temps égaux, oder wie Leibniz anderswo dieses Problem ausdrückt: Invenire lineam isochronam, in qua grave descendat uniformiter sive aequalibus temporibus aequaliter accedat ad horizontem, atque adeo sine acceleratione et aequali semper velocitate deorsum feratur). Huygens hatte seit dem Beginn seiner mathematischen Studien der Untersuchung der Eigenschaften von Curven besondere Sorgfalt zugewandt; das Leibnizische Problem erregte sein Interesse, er fand die Lösung und machte im Octoberheft der Nouvelles de la republique des lettres des Jahres 1687 die Eigenschaften und die Construction der verlangten Curve bekannt. Indessen hatte Leibniz seine große Reise durch Deutschland und Italien (Herbst 1687 bis Juni 1690) angetreten, und er erhielt jenes Heft erst zu Anfang des Jahres 1688 während seines Aufenthalts in der Stadt Pilsen

in Böhmen. Da Huygens die Lösung des Problems in kürzester Fassung gegeben und sie deshalb nur den Eingeweihten verständlich war*), entwarf Leibniz eine umständlichere Bearbeitung, die in demselben Journal eine Stelle finden sollte. Zugleich nahm Leibniz die Gelegenheit wahr, Huygens seine Freude auszudrücken, daß er sich mit der Lösung des Problems befaßt habe und daß die von ihm gegebene Lösung mit der seinigen übereinstimme. Damit war die Correspondenz zwischen beiden wieder angeknüpft, die nun bis zum Tode von Huygens ununterbrochen fortdauerte. Erst im Februar 1690 antwortete Huygens, zugleich mit Uebersendung einer Druckschrift, welche das berühmte Werk über das Licht und eine Abhandlung über die Ursache der Schwere enthielt.**) Er wünscht Leibniz' Urtheil darüber, namentlich in Bezug auf das letztere, da er die von Leibniz in den Act. Erudit. Lips. im Jahre 1689 veröffentlichte Abhandlung: Tentamen de motuum coelestium causis, gelesen und gefunden hatte, daß Leibniz über die Bewegung der Himmelskörper mit Newton übereinstimmte, daß er jedoch die Cartesianischen Wirbel (tourbillons de Mr. des Cartes) für seine Theorie herangezogen habe, was Huygens für überflüssig hält, wenn die Anschauungen Newton's zu Grunde gelegt werden. In seiner Erwiderung unterläßt Leibniz auf Huygens' Wünsche zu antworten; dagegen erwähnt er den von ihm gefundenen neuen Algorithmus der höheren Analysis, den er in den Act. Erudit. Lips. veröffentlicht habe, besonders hebt er die Methodus tangentium inversa (Integralrechnung) hervor, durch welche er die von Descartes vergeblich gesuchte Lösung des umgekehrten Tangentenproblems bewirken könne. Huygens, der bereits ein Verfahren, den Werth der Tangente aus der Gleichung der Curve her-

*) Uylenbroek hat aus Huygens' Manuscripten die ausführliche Lösung desselben bekannt gemacht (Christ. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes math. ed. Uylenbroek. Hagae Comit. MDCCCXXXIII. fasc. II. p. 22 sq.)

**) Traité de la lumiére. — Discours sur la cause de la pesanteur.

zuleiten, aufgestellt hatte*), glaubte darin ein dem Leibnizischen gleichwerthiges zu besitzen; er hatte deshalb anfangs den Veröffentlichungen Leibnizens in den Act. Erudit. Lips., die er dunkel fand, nicht die nöthige Aufmerksamkeit zugewandt. Erst dadurch, daß Leibniz behauptete, die Methodus tangentium inversa zu besitzen, wurde er veranlaßt, durch ein eingehendes Studium von den Vorzügen des Leibnizischen Algorithmus sich zu überzeugen.

Durch Jacob Bernoulli war die Lösung des Problems der Kettenlinie, das seit Galilei die Mathematiker beschäftigte, angeregt worden**); Huygens hatte die Lösung des Problems bereits in seiner Jugend, 15 Jahre alt, versucht***), und er machte nun Leibniz den Vorschlag, um den Werth seines neuen Algorithmus zu prüfen, die Lösung des in Rede stehenden Problems damit auszuführen. Zugleich sendet er ihm seine erste Lösung in Chiffern ausgedrückt, um alsdann beide Lösungen, die seinige und die Leibnizische, vergleichen zu können. Leibniz hatte durch ein Inserat in den Act. Erudit. Lips. an. 1690 p. 360 die Mathematiker zur Lösung der Aufgabe eingeladen, und als Endtermin für die Einsendung der Auflösungen das Ende des genannten Jahres bestimmt, alsdann sollten die eingegangenen bekannt gemacht werden. Außer den Lösungen von Huygens und Leibniz war bis Ende des Termins nur noch die von Johann Bernoulli eingegangen; sie war mit Hülfe des Leibnizischen Algorithmus ausgeführt. Die drei Auflösungen stimmten in Betreff der Resultate überein. Da Huygens von der von Leibniz eingeführten neuen Ana-

---

*) Die betreffende Abhandlung von Huygens findet sich in: Divers Ouvrages de mathémat. et de physique par M. M. de l'Académie roy. des sciences. 1693. Tom. I p. 327 sqq.

**) J. B. Analysis Problematis antehac propositi de inventione lineae descensus a corpore gravi percurrendae uniformiter, sic ut temporibus aequalibus altitudines emetiatur: et alterius cujusdam Problematis Propositio (Act. Erudit. Lips. mens. Maji 1690).

***) Uylenbroek hat dies aus Huygens Manuscripten bekannt gemacht (l. c. fasc. II p. 38 sq.). Daselbst ist auch die Interpretation der Chiffern gegeben.

lysis keinen Gebrauch machte, so war hierdurch der Beweis geliefert, daß die letztere zu denselben Resultaten führte, als die altbewährten Methoden, die von Huygens angewandt wurden. In seiner Lösung hatte er die Construction der Curve abhängig gemacht von der Quadratur der Curve, die durch die Gleichung $xxyy = a^4 - aayy$ bestimmt wird. Johann Bernoulli hatte mit Hülfe des Leibnizischen Algorithmus der höheren Analysis die Lösung des Problems auf die Quadratur der Hyperbel zurückgeführt. Leibniz hatte die Construction der Kettenlinie mittelst der Logarithmen und der logarithmischen Linie bewerkstelligt, tant parce qu'ainsi, bemerkt er dazu, tout vient d'une maniere tres simple et tres naturelle (tollement que la courbe catenaire semble estre faite pour donner les logarithmes) que parce qu'ainsi je puis trouver par la Geometrie ordinaire une infinité de points veritables, ne supposant qu'une seule proportion constante une fois pour toutes, qu'on ne sçauroit donner jusqu'icy geometriquement que par l'etendue d'une courbe, ou quelque chose de semblable, au lieu qu'autrement on est obligé à chaque point de la courbe qu'on demande de recourir aux voyes extraordinaires.*)

Leibniz hatte in seiner Behandlung des Problems der Kettenlinie noch die Bestimmung des Schwerpunktes der von der Curve begrenzten Ebene hinzugefügt, welche in den Lösungen von Huygens und Johann Bernoulli fehlte. Es war somit aufs augenscheinlichste dargethan, daß die von Leibniz aufgestellte Analysis ein ausgezeichnetes Mittel bot, dergleichen Probleme vollständig zu lösen. Huygens,

---

*) In der Abhandlung: Solutio illustris problematis a Galilaeo primum propositi de figura chordae aut catenae e duobus extremis pendentis (Giornale de' Letterati dell' an 1692 pag. 128—132. Modena) äußert sich Leibniz über die Construction der Kettenlinie deutlicher wie folgt: Leibnitii constructio maxime Geometrica est nec alia melioris generis dari potest, nam certa quadam proportione semel in universum assumpta, de caetero inveniuntur innumera seu quot lubet puncta lineae quaesitae vera per Geometriam ordinariam sine suppositione quadraturarum, quod in Algebram transcendentibus summum est.

der in der Anerkennung der Vorzüge der neuen Analysis bisher sich zurückhaltend gezeigt hatte, bekannte nun offen und voll die Vortrefflichkeit derselben. Je consideray en suite pourquoy plusieurs de vos decouvertes m'estoient échappées, et je jugeay que ce devoit estre un effet de votre nouvelle façon de calculer, qui vous offre, à qu'il semble, des veritez, que vous n'avez pas mesme cherchées, car je me souviens que dans une de vos lettres precedentes vous m'aviez dit, en parlant de ce que vous aviez trouvé touchant la Catenaria, que le calcul vous offroit cela comme de soy mesme, ce qui certainement est fort beau. — Leibniz sorgte dafür, daß in den wissenschaftlichen Journalen Deutschlands, Frankreichs und Italiens die Mathematiker mit der Lösung des berühmten Problems der Kettenlinie bekannt gemacht wurden und zugleich Kenntniß erhielten, daß dies mit Hülfe der neuen Analysis aufs glänzendste möglich geworden sei. Seit dem Jahre 1691 datirt die allgemeine Annahme der höheren Analysis, wie sie Leibniz bekannt gemacht hatte.

Neben den rein mathematischen Erörterungen in der Correspondenz zwischen Leibniz und Huygens in den Jahren 1690 und 1691 nehmen die Verhandlungen über die Bewegung der Himmelskörper einen breiten Raum ein. Leibniz hatte seit dem Beginn seiner wissenschaftlichen Studien eine besondere Aufmerksamkeit der Begründung der Bewegungsgesetze zugewandt. Er hatte in der kleinen Schrift: Hypothesis physica nova, qua Phaenomenorum Naturae plerumque causae ab unico quodam universali motu, in globo nostro supposito, neque Tychonicis neque Copernicanis aspernendo, repetuntur, behauptet, daß die Phänomene der Körperwelt aus einem Princip, aus der durch die Einwirkung des Sonnenlichts auf den den Weltenraum erfüllenden und alle Körper durchdringenden Aether hervorgebrachten kreisförmigen Bewegung des letzteren erklärt werden könnten, namentlich die Centralbewegung der Himmelskörper. Die in dieser Erstlingsschrift niedergelegten hypothetischen Annahmen hat

Leibniz in den folgenden Jahren zum Theil modificirt, zum Theil mathematisch begründet in Abhandlungen, die in den Act. Erudit. Lips. erschienen sind. Von diesen Abhandlungen veranlaßte die im Jahre 1689 unter dem Titel erschienene: Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente, eine längere Discussion zwischen Huygens und Leibniz. Letzterer hatte behauptet, daß die Widerstände des Mittels in dem zusammengesetzten Verhältniß der Elemente der Zeit und der Quadrate der Geschwindigkeiten ständen; Huygens dagegen meinte, daß die Widerstände in dem Verhältniß der Quadrate der Geschwindigkeiten ständen; er fand auch die von Leibniz gegebene Begründung dunkel und unverständlich (tout vostre raisonnement dans cette matiere m'estant obscur et inintelligible). In einer „Additio" zu der in Rede stehenden Abhandlung, welche in den Act. Erudit. Lips. des Jahres 1691 erschien, hat Leibniz die verschiedenen Herleitungen der oben erwähnten Sätze kurz dargethan und gezeigt, daß die beiden Behauptungen für gleiche Zeiten übereinstimmen. —

In seinen Briefen hatte Leibniz von seinen Entdeckungen ganz besonders hervorgehoben die Methodus tangentium inversa, aus dem Ausdruck für die Tangente die Gleichung und die Construction der Curve herzuleiten, das Problem, dessen Lösung Descartes nicht hatte bewirken können. Er hatte Huygens aufgefordert, ihm darauf bezügliche Probleme vorzulegen, um sein Verfahren daran zu prüfen. Erst nach längerer Zeit, in seinem Schreiben vom 24. August 1690, kommt Huygens auf die Methodus tangentium inversa zurück — höchst wahrscheinlich veranlaßt durch die Mittheilungen Fatio's de Duillier*), der sich damals in London befand und mit Huygens in

*) Nicolas Fatio de Duillier (geb. 1664 zu Basel, wenige Jahre später bei und in Genf lebend, gest. in England 1753) hatte sich nach kurzem Aufenthalt in Paris nach Holland begeben, wo er Huygens' Freundschaft gewann, so daß er ihm Einsicht in seine Papiere gestattete. 1687 ging Fatio nach England. Er meldete Huygens von London aus, daß er eine Methode besäße, den Werth der Tangente einer Curve zu bestimmen,

Briefwechsel stand — und bezeichnet dieselbe von großer Wichtigkeit. Er legt ihm, um sie zu prüfen, eine Aufgabe vor, aus der Subtangente $= \frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$ die Gleichung und die Construction der Curve zu finden. Huygens fügt hinzu: Si vostre methode sert icy et aux autres choses que vous dites, vous pouvez estre tres seur quel en sera mon jugement, et vous m'obligerez fort aussi bien que tous les geometres en l'expliquant clairement et dans un traité expres. Als Leibniz meldet, daß die Curve durch die transcendente Gleichung $\frac{x^3y}{h} = b^{\frac{2xy}{a}}$ ausgedrückt wird, in welcher h eine beliebige Größe, a durch die Einheit und b durch eine Größe bezeichnet wird, deren Logarithmus die Einheit ist, erwidert Huygens,

---

die mit der seinigen (Huygens') übereinstimme, und daß er sich mit der Lösung des umgekehrten Problems, aus der Tangente die Gleichung der Curve zu finden, beschäftige. Er setzt hinzu: J'ai trouvé en quelque sorte le moien de le resondre toutes les fois qu'il est possible, et de reconnoitre quand la courbe proposée n'est pas geometrique. In den zwei Beispielen, an welchen Fatio sein Verfahren erläutert, bedient er sich an Stelle der Differentiale Leibnizens besonderer Buchstaben, so daß er dx durch z und dy durch u ausdrückt. Eine allgemeine Auflösung des umgekehrten Tangentenproblems hat Fatio niemals gegeben; in einem Briefe an den Marquis de l'Hospital, datirt A la Haye le 23 Juillet 1693, hat Huygens die Ideen Fatio's geordnet.

Fatio de Duillier war kein unbedeutender Mathematiker; er hatte sich das Vertrauen von Huygens und später von Newton erworben, die ihm Einsicht in ihre Manuscripte gestatteten; er war in das Verständniß der Differentialrechnung eingedrungen, was bei wenigen damals lebenden Mathematikern der Fall war; er wurde in die Königliche Societät in London als Mitglied aufgenommen. Aber in seinen Briefen, die er von London an Huygens richtete und die Uylenbroek veröffentlicht hat (l. c. fasc. II p. 98sqq.) zeigt sich eine unbegrenzte Eitelkeit und Ueberhebung; er schreibt, daß niemand besser die Principia Newton's verstände als er; es sei nicht unmöglich, daß er eine neue verbesserte, mit Zusätzen versehene Ausgabe des Newton'schen Werkes veranstalten werde; er besitze eine Methode, die dasselbe leiste als die Differentialrechnung; er selbst sei nahe daran gewesen, die Differentialrechnung zu entdecken. Fatio stellte sich den größten Mathematikern gleich. Zugleich enthalten seine Briefe aus den Jahren 1691 und 1692 bereits die ersten Spuren des unseligen Streites, der über den ersten Entdecker der Differentialrechnung geführt worden ist. Fatio schreibt nach gewonnener Einsicht in die Papiere Newton's, daß derselbe „sans difficulté le premier auteur du calculus differentialis" sei. Der Streit kam zum Ausbruch als Fatio im Jahre 1699 die Schrift veröffentlichte: Lineae brevissimi descensus investigatio geometrica duplex. Cui addita est investigatio geometrica solidi rotundi, in quod minima fiat resistentia. Lond. 1699, in welcher die erwähnte Behauptung in Betreff Newton's wiederholt und Leibniz nur als der zweite

daß er keine transcendente, vielmehr die algebraische Gleichung $x^3 + xyy = aay$ für die Curve gefunden habe, und bemerkt in Betreff der transcendenten Curve, daß ihre Natur so dunkel erscheine, daß er sie nicht in die Geometrie einführen möchte, zumal da Leibniz irgend welche Nützlichkeit davon nicht erwähne. Nachdem Leibniz gezeigt, daß Huygens in dem unrichtigen Gebrauch der Vorzeichen einen Fehler gemacht — die von ihm gefundene Curve entspricht der Subtangente $= \frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$ — und daß, je nachdem die Subtangente entweder $= \frac{y^2}{2x} - 2x$ oder $= 2x - \frac{y^2}{2x}$ gesetzt werde, zwei verschiedene Gleichungen und zwei verschiedene Curven sich ergeben, erklärt sich Huygens für die Anwendbarkeit der Leibnizischen Methode. Auch zieht er sein Urtheil über die Exponential- und logarithmischen Gleichungen zurück. Jedoch Leibniz war begierig, Fatio's Verfahren kennen zu lernen, welches derselbe in Beispielen an Huygens mitgetheilt hatte, und er ist bereit, falls Fatio sein Verfahren zur Bestimmung der beiden Curven, die Huygens vorgeschlagen hatte, ihm mittheilen wollte, demselben das seinige in Betreff der Beseitigung der Schwierigkeiten zu übersenden, die Fatio zu überwinden nicht vermocht hatte. Aus den Mittheilungen von Huygens geht hervor, daß Fatio das umgekehrte Tangentenproblem nicht lösen konnte, wenn in dem Ausdruck für die Subtangente zusammengesetzte Wurzelausdrücke vorhanden sind; er macht indeß den Vorschlag, daß ein Austausch der beiderseitigen Verfahrungsweisen stattfinden sollte. Nach wiederholten Mahnungen von Huygens, der hinzufügt: Je vous prie d'estre clair en ce que vous nous donnerez, et de ne pas supposer que nous entendions vostre calculus differentialis — übersendet Leibniz seine Lösung des Problems, aus dem Ausdruck für die Tangente die Gleichung der

Erfinder der Differentialrechnung bezeichnet wird. — Fatio de Duillier endigte im Wahnwitz; er machte bekannt, daß er in der St. Paulskirche in London einen Todten erwecken würde; er wurde mit der Strafe der Ausstellung am Pranger bestraft.

Curve herzuleiten, in der Abhandlung: Methodus, qua innumerarum linearum constructio ex data proprietate tangentium, seu aequatio inter abscissam et ordinatam ex dato valore subtangentialis, exhibetur. Diese Abhandlung ist von besonderem Interesse, insofern Leibniz, nach dem Wunsche von Huygens, der möglichsten Klarheit und Deutlichkeit in der Darstellung über die Elemente der höheren Analysis sich befleißigt und ihre Anwendung auf die Lösung der Probleme zeigt. Die Differentiale der Veränderlichen vermeidet er als unendlich kleine Größen zu bezeichnen; er nennt sie elementa momentanea, differentiae indefinite parvae, differentiae inassignabiles quarum tamen ad alteras omnino assignabilis est ratio, differentiae minimae. In Betreff der Darstellung der höheren Analysis nach der Auffassung von Leibniz wird auf diese Abhandlung zurückzugehen sein. — Leibniz gewann die Ueberzeugung, daß das Verfahren Fatio's nicht auf transcendente, nur auf gewöhnliche Curven sich erstrecke (La Methode de Mr. Fatio pour les tangentes renversées, autant que j'en puis juger, ne peut servir que pour les courbes ordinaires, au lieu que la mienne donne et les ordinaires et les transcendantes). Da nun auch von Huygens weder die Leibnizische Abhandlung noch der Inhalt derselben an Fatio mitgetheilt war, so verzichtete Leibniz auf den gegenseitigen Austausch der Methoden.

In diesen Verhandlungen mit Huygens und Fatio de Duillier zeigte Leibniz seine Ueberlegenheit als Mathematiker.

Die oben erwähnte Abhandlung von Huygens: Discours sur la cause de la pesanteur, gab Leibniz Veranlassung, in seinen Briefen des Jahres 1692 denselben Gegenstand zur Sprache zu bringen. Er hielt es für höchst wahrscheinlich, daß die Schwere aus derselben Ursache entstehe, welche die Erde rund gemacht habe und die fallenden Tropfen rund gestaltet. Das ist die Kreisbewegung des umgebenden Mediums (ambient). Darin liegt wahrscheinlich auch der Grund der

Anziehung der Planeten zur Sonne. Wenn man die Anziehung der schweren Körper als vom Mittelpunkt ausgehende Strahlen auffaßt, so kann man darthun, warum die Anziehungen der Planeten in den umgekehrten Quadraten ihrer Entfernungen von der Sonne stehen, was durch die Erscheinungen bestätigt wird. Dieses Gesetz in Betreff der Schwerkraft in Verbindung mit der harmonischen Kreisbewegung ergiebt die aus den Beobachtungen abgeleiteten Ellipsen Keppler's. Zuletzt bemerkt Leibniz noch, daß er mit Huygens' Annahme eines leeren Raumes und der Unzerbrechlichkeit der Atome nicht einverstanden sei; er sieht nicht die Nothwendigkeit, daß man zu solchen außerordentlichen Dingen seine Zuflucht nehmen müsse. Huygens unterwirft in seiner Antwort die Leibnizischen Hypothesen einer scharfen Kritik. Wie das umgebende Medium (materia ambiens) die Rundung der Wassertropfen und die Schwerkraft des Pendels oder die Anziehung der Planeten zur Sonne hervorbringen kann, ist ihm unbegreiflich, ebenso auch daß die Schwerkraft durch die von dem Mittelpunkt ausgehenden Strahlen entstehen kann. In Betreff seiner Annahme von der Unzerbrechlichkeit der Atome antwortet Huygens, daß das Wesen der Körper nicht bloß in der Ausdehnung bestehe, wie des Cartes angenommen hat, vielmehr sei es nöthig, damit die Körper ihre Gestalt behalten und der Bewegung gegen einander Widerstand leisten, ihnen Undurchdringlichkeit und einen Widerstand gegen Zerbrechung und Durchdringung zu geben. Diese Einwürfe von Huygens sucht Leibniz durch das ausführliche Schreiben von $\frac{16}{26}$ September 1692 zu entkräften. Er meint, daß die scheinbar verschiedenen Ansichten in Betreff der Rundung der Tropfen, der Schwere der irdischen Körper, der Anziehung der Planeten zur Sonne vereinigt werden könnten, und zwar mittelst der Bewegung, durch die die Materie auf die verschiedenartigste Weise ergriffen werde; sie kann die Körper sowohl formen, als auch ihnen einen Platz anweisen.

Namentlich vertheidigt Leibniz die Hypothese, daß eine „matiere deferente“ d. i. eine Materie, welche die Bewegung fortpflanzt, zur Erklärung der Bewegung der Himmelskörper vorhanden sei. Im Folgenden bekämpft Leibniz die Atome, die Huygens annahm und welchen er eine ursprüngliche unbegrenzte Festigkeit als Eigenschaft zuertheilte. In seiner Antwort weist Huygens die Ausführungen Leibnizens zum Theil zurück, zum Theil erklärt er sie für unverständlich; auch meint er, daß eine Correspondenz wie die ihrige für die Erörterung von dergleichen Fragen, wenigstens für ihn, ungeeignet wäre. Mit der Mittheilung, daß er seit einigen Monaten seinen Briefwechsel mit dem Marquis de l'Hospital wieder angeknüpft habe, ruft er Leibniz zu: Passons maintenant à la Geometrie, où il n'y a rien à contester. Leibniz jedoch antwortet in einem ausführlichen Schreiben besonders in Betreff der Atome. Er weist die Einwürfe von Huygens schließlich zurück mit den Worten: Mais je reponds, qu'il n'y a point de dernier petit corps, et je conçois qu'une particelle de la matiere, quelque petite qu'elle soit, est comme un monde entier plein d'une infinité de creatures encor plus petites, et cela à proportion d'un autre corps, fut il aussi grand que le globe de la terre. — Diese Briefe zwischen Leibniz und Huygens aus den Jahren 1692 und 1693 enthalten einen beachtenswerthen Beitrag zur Lösung der Frage über die Existenz der Atome.

In dem oben erwähnten Schreiben berichtet Huygens, daß er und der Marquis de l'Hospital sich gegenseitig Probleme, aus dem Ausdruck für die Subtangente die Gleichung und die Construction der Curve zu finden, zur Lösung vorgelegt hätten; während de l'Hospital die Lösungen mit Hülfe der neuen Analysis zu Stande brächte, vermöchte er nicht die von ihm vorgelegten Aufgaben zu lösen; er bittet Leibniz um Auskunft. Dies wurde Veranlassung, daß fortan die Integralrechnung wesentlich den Inhalt der weitern Correspondenz zwischen Leibniz und Huygens bildete. Leibniz erwidert, daß er

überzeugt wäre, daß es allgemein einen Weg gäbe, aus dem Ausdruck für die Subtangente die Gleichung der Curve zu finden, wenn dieselbe eine gewöhnliche d. h. eine geometrische wäre; er bediene sich indeß zu dergleichen Lösungen vor der Hand besonderer Kunstgriffe (adresses particulieres); mit Erfolg bediene er sich der Entwickelung in unendliche Reihen. In Folge dessen übersendet ihm Huygens drei Ausdrücke für die Subtangente, für welche de l'Hospital die Curve nicht hätte finden können: $\frac{aay + xyy}{ax - xy - ay}$, $\frac{x^3y}{3x^3 + 3aay - 2xy}$, $\frac{2ayy}{2aa - yy - xx}$, und bittet, seine Aufmerksamkeit darauf zu richten. Um seine Meisterschaft als Mathematiker zu zeigen und zugleich die Vorzüge seiner neuen Analysis darzuthun, ermittelt Leibniz für das letzte Beispiel die Curve. Er bemerkt, daß dies Beispiel das einfachste unter den dreien und die entsprechende Curve der Kreis ist; indeß zeige eine tiefer eingehende Untersuchung, daß bei Verallgemeinerung des Ausdrucks eine unendliche Anzahl transcendenter Curven sich ergiebt. In seiner Antwort spricht Huygens rückhaltlos seine Anerkennung über die elegante Lösung der Aufgabe durch Leibniz aus; er setzt hinzu: Ce sont des coups de maitre que vous vous estes reservé, Monsieur, quoyque par modestie vous disiez, à l'egard de l'usage que moy et d'autres faisons de vostre nouveau calcul, que jam voti damnatus es. Vous pourriez faire un excellent Traité des usages divers de ce calcul, et je vous y exhorte comme à un ouvrage tres beau et utile, et qui doit plustost venir de vous que de tout autre. Diese Aufforderung von Huygens kam dem Vorhaben Leibnizens, ein Werk über die neue Analysis zu verfassen, entgegen; es sollten darin nicht nur die Fundamente und die Anwendungen der neuen Rechnung enthalten sein, er wollte auch in einem Anhang die Entdeckungen aufnehmen, die andere mittelst der neuen Analysis gemacht hatten. Auch gedachte Leibniz darin die Behandlung und Anwendung der von ihm eingeführten transcendenten

Exponentialgleichungen darzuthun, wie er es an einem beigebrachten Beispiel erläutert. Er hält den Ausdruck durch Exponentialgrößen für den vollkommensten und bei weiten besten, als durch Differentiale und unendliche Reihen, und er wünscht die andern Transcendenten auf Exponentialgrößen zurückzuführen. In seiner Antwort empfiehlt Huygens, Leibniz möchte wohl darauf sehen „le Traité de nouveau calcul rendre autant clair qu'il est possible et qu'il puisse se rapporter principalement à ce qui pourroit avoir usage dans la geometrie, où je doute si ces equations exponentiellement transcendantes pourront avoir lieu“. Mit den Exponentialgrößen konnte sich Huygens, wie schon erwähnt, nicht befreunden; er begreift nicht, daß sie von irgend welchem Nutzen sein könnten; ebenso war es auch mit den zweiten Differentialen. Leibniz geht deshalb in seinem letzten größeren Schreiben ausführlich darauf ein. Er bemerkt, daß man nur zu oft genöthigt ist, zweite Differentiale zu Hülfe zu nehmen. Wie die Differentialgleichungen, die erste Differentiale enthalten, zur Lösung des umgekehrten Tangentenproblems d. h. aus dem Ausdruck für die Tangente die Curve zu finden, dienen, so werden aus der Beschaffenheit des Krümmungsmaßes oder der osculirenden Linie mit Hülfe der zweiten Differentialen die Curven bestimmt; auch wird man auf zweite Differentiale geführt, wenn in den Gleichungen Summen d. h. Integrale zugleich mit den Differentialen enthalten sind; um die Gleichungen von den Integralen zu befreien, geht man zu den zweiten Differentialen. Leibniz erläutert das Vorstehende durch zwei Beispiele, durch die Sinuslinie und durch die Kettenlinie. Er bemerkt in Betreff der Exponentialgleichungen, daß insofern ein Problem auf Exponentialgrößen zurückgeführt ist, die Lösung vollständig erreicht ist; sie ist lediglich durch die Veränderlichen ausgedrückt, welche die Curve geometrisch bestimmen. Mit großer Wahrscheinlichkeit läßt sich annehmen, daß diese Beispiele Bruchstücke sind, die Leibniz für die geplante Schrift über die neue Rechnung zu verwerthen gedachte.

Aus dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Huygens ergiebt sich, daß Huygens ungeachtet seines eminenten, ausgezeichneten Talentes für die Erkenntniß von neuen mathematischen Wahrheiten, für Ideen, die sich auf neuen, ihm ungewohnten Bahnen bewegten, wenig zugänglich und abweisend war. Beweise dafür sind die Analysis situs, die Leibniz ihm zur Beurtheilung übersandte, so wie auch die neue Rechnung für die höhere Analysis, die Leibniz auffand. Erst nachdem die Richtigkeit der durch die neue Rechnung gefundenen Resultate nicht mehr von der Hand zu weisen war, fand sie den Beifall von Huygens, der jedoch in das volle Verständniß der neuen Methode nicht einzudringen vermochte. Indeß ist mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit anzunehmen, daß sein durch die angestrengtesten Studien in jüngeren Jahren geschwächter Geist und auch sein angegriffener Körper ihn hinderten, mit anhaltenden Arbeiten sich zu befassen.

Leibniz hat stets hohe Verehrung für Huygens bezeugt. Als Johann Bernoulli das Gerücht von seinem Tode ihm mittheilte, antwortete er (Hanoverae 24 Junii 1695): Si obiisset Hugenius, maximam jacturam passi fuissemus. Frustra precaremur, ne obierit; sed si vivit, ut spero, precabimur Deum ut diu vivat, ipsumque rogabimus ut praeclaras cogitationes edere maturet. Und als er die gewisse Nachricht von seinem Tode erhalten hatte, schrieb er an denselben (Hanoverae 29 Jul. 1695): Imcomparabilem Hugenium obiisse haud dubie intellexisti. Quanta haec sit jactura, dici satis non potest ob summum viri judicium, cum maxima profundissimaque rerum notitia conjunctum. Utinam, quemadmodum spero, reperiantur in ejus schedis, ex quibus pars eorum, quae meditatus est, erui et publico commodo produci in lucem possit. Dolendum est, quod vis morbi, quae mentem obfuscaverat, non permisit ut ipse, quod optimum visum fuisset, ea de re non statuerit atque ordinarit. Nisi forte (ut

fieri solet) paulo ante mortem ad se rediit ultimamque voluntatem suam aperuit, quod si factum est, non diu latebit. — Im folgenden Jahre 1696 wurde von Leibniz das Andenken an Huygens durch folgendes „Epicediolum“ gefeiert:

Quantumcunque decus dederit doctrina Batavis,
  Hactenus Hugenio non habuere parem.
Sint Patri et Fratri, Guilielmi ingentia fata
  Resque hominum curae, sidera noster habet.
Ejus ad adventum supremo cedit ab orbe,
  Et Jove contentum se Galilaeus ait.
Mox sua Saturnus tradit pater aurea regna,
  Munereque Hugenii se videt esse novum.
Dum radiis, prius ignotis, micat annullus ingens
  Inque ministerium stella novella venit,
Se gratum autori cupiens praestare vicissim
  Cuncta sub orbe suo tempora clausa dedit.
Nam Cronon et Graji Saturnum nomine dicunt
  Omnia quod curva tempora falce metit.
Machina jam longi moderatrix prodiit aevi,
  Quae jubet astrictos legibus ire deos.
Et nunc aligeras nova sub juga mittimus horas,
  Certus et in mediis navita fertur aquis.
Sol quoque miratus spatia intercedere discit
  A medio ad medium non satis aequa diem.
Cernite mortales, quo vestra potentia surgat!
  Possumus aetheriis jam dare jura polis.

Die Briefe von Huygens an Leibniz sind hier nach den Originalen, die in der Königlichen Bibliothek zu Hannover aufbewahrt werden, mitgetheilt. In Betreff der Briefe Leibnizens wurde die Sammlung Uylenbroek's: Christiani Hugenii aliorumque seculi

XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae et philosophicae. Ex manuscriptis in bibliotheca Lugduno-Batavae servatis edidit P. I. Uylenbroek. Hagae Comitum 1833, benutzt, in welcher die Leibnizischen Originale veröffentlicht sind.

I.

Leibniz an Huygens.

Je vous envoye le livre de Bombelli, dont je vous ay parlé. Vous y verrez page 292 comment il se sert des racines imaginaires (il appelle par exemple $\sqrt{-121}$ ou $11\sqrt{-1}$ piu di meno 11; et $-\sqrt{-121}$ ou $-11\sqrt{-1}$ mene di meno 11) et comment il trouve par là la racine de l'équation $1^3 \sqcap 15^1$ plus 4, c'est à dire $y^3 \sqcap 15y + 4$. Il dit d'en avoir une demonstration en lignes, qu'il met aussi page 298, mais il y prouve seulement qu'une telle équation est possible, et que sa racine est quelque chose de reel, qui se peut donner en lignes. Mais il ne s'ensuit pas que l'operation par son piu di meno est bonne. Car quoyqu'il dise à la fin de la page 294 que ces racines sont venues de l'équation, ce n'est pas pourtant sans supposition. Il paroist aussi par la page 293 qu'il ne pouvoit pas resoudre par cette methode l'équation $y^3 \sqcap 12y + 9$, dont la racine rationelle est fausse ou negative, sçavoir -3. Il trouve neantmoins en essayant par une autre methode (tirée aussi de Cardan) que l'equation se peut diviser par $y + 3$, ne scachant pas que par cette même raison -3 en est la racine fausse: et il trouve par ce moyen la vraye $1\frac{1}{2} + \sqrt{5\frac{1}{4}}$, laquelle estant composée d'un nombre et d'une racine quarrée, ne pouvoit pas estre tirée des formules de Cardan, parceque les racines qu'on a par ces formules, sont tousjours ou irrationelles cubiques ou nombres. D'où vient qu'il a cru que les formules de Cardan ne servent pas en cette rencontre, et ne sont pas generales.

Ainsi je croy d'avoir demonstré le premier (1) que les formules de Cardan sont absolument bonnes et generales, soit extrahibles, soit non extrahibles, soit vrayes soit fausses ou negatives. (2) Que nous avons par ce moyen la resolution generale de toutes les equations cubiques. (3) J'ay trouvé le premier qu'on peut former des racines com-

35*

posées non extrahibles de tous les degrez pairs, qui contiennent des imaginaires et dont neantmoins la realité peut estre rendue palpable sans extraction, pour faire juger que la realité de telles formules n'est pas bornée par l'extrahibilité: dont l'exemple de la formule $\sqrt{1+\sqrt{-3}} + \sqrt{1-\sqrt{-3}}$, qui vaut $\sqrt{6}$, est une preuve tres considerable. (4) Je demonstre, ce que personne a demonstré encor, que toute l'equation cubique, qui peut estre deprimée, contient une racine rationelle, pourveu que l'equation même soit proposée en termes rationaux. D'où il s'ensuit que celle qui ne peut estre divisée par l'inconnue + ou — un diviseur rationel du dernier terme, est solide. Proposition tres importante, puisqu'elle nous donne un moyen asseuré de scavoir si un probleme est solide en effect, ou s'il l'est seulement en apparence. Mr. Descartes ne parle pas si positivement, car il dit, qu'il faut examiner toutes les quantités qui peuvent diviser le dernier, qu'il suppose estre un entier et rationel: et il semble qu'il n'ose pas dire toutes les nombres, ou toutes les quantités rationelles. De sorte qu'il nous laisse en doute, s'il ne faut pas aussi examiner les diviseurs irrationels: soit qu'il n'avoit point de demonstration assez convaincante pour les diviseurs rationels à l'exclusion des irrationels, soit qu'il n'ait negligé de parler plus exactement. De là vient aussi qu'on peut demonstrer en cinquieme lieu (5) par la seule analyse, sans aide de Geometrie, que toute l'equation cubique est possible, pourveu qu'elle soit conceue en termes possibles. De plus (6) l'obstacle qui a embarassé principalement la resolution des equations par racines irrationelles estant levé, ceux qui chercheront des formules pour les plus hauts degrez, ne seront plus rebutez par la rencontre des irrationelles, au lieu que sans cela ils chercheront envain des expressions differentes de celles qu'ils ont deja trouvées. D'où vient que des personnes fort habiles en ces matieres ont cru avant cela qu'on ne scauroit trouver une expression generale pour tout un degrez: persuasion, qui les obligeroit à examiner inutilement toutes les formules, et toutes les combinaisons possibles des irrationelles, pour chercher des expressions particulieres pour certains cas qui semblent n'estre pas compris dans la generale. (7) Lorsqu'on aura trouvé les racines irrationelles des equations, tous les problemes qui peuvent estre reduits à une equation reviendront seulement à deux problemes de Geometrie, sçavoir à la section de l'angle et à celle de la raison. J'entends par la section de la raison, ou si vous voulez, des logarithmes, qui répondent en quelque façon aux arcs, l'extraction des racines. (8) Vous connoistrez mieux tout ceci par l'écrit que je vous ay fait voir, et vous jugerez par les autres, que vous avez

veu de même, de ce que j'appelle section des puissances, et de cette table de theoremes, qui peut estre continuée à l'infini, et qui a de grands usages, tant pour resoudre quelques equations affectées que pour donner des abregez considerables dans le calcul, lorsqu'il s'agit de purger une equation des quantités irrationelles, et de calculer par les puissances des grandeurs composées. Et comme ces theoremes donnent aussi la resolution de quelques formules des equations affectées de tous les degrez à l'infini, vous trouverez en (9) lieu, que c'est la premiere fois qu'on donne la resolution de quelques equations indeprimables plus que solides, par les irrationelles de leur propres degrez, puisqu'on n'en a pas encor trouvé aucun exemple dans le 5e degré seulement, bien loin d'avoir donné une table, qui passe pour tous les degrez à l'infini, comme j'ay fait.

Enfin, il n'y a personne qui puisse mieux juger que vous de la qualité de deux inventions, que je n'ay pas encor expliquées, qui sont (10) l'une de la methode de tirer en nombres veritables ou approchans, les racines des binomes, où il entre des imaginaires: et l'autre du compas des equations, qui donne sans aucun calcul, tout à la fois, toutes les racines d'une equation proposée de quelque degré et de quelque formule d'un degré donné qu'elles puissent estre, soit geometriquement en lignes soit arithmetiquement en nombres approchans, dont on peut incontinent tirer les veritables s'il y en a, sans aucun calcul. Il semble qu'apres cet instrument il n'y a quasi plus rien à desirer pour l'usage que l'Algebre peut ou pourra avoir dans la méchanique et dans la practique. Il est croyable que c'estoit le bût de la Geometrie des anciens (au moins de celle d'Apollonius) et la fin des lieux qu'ils avoient introduits, parce qu'ils avoient reconnnus que peu de lignes determinent en un instant ce que de grands calculs en nombres ne scauroient faire qu'apres un long travail, capable de rebuter le plus ferme. Ils n'avoient pas poussé la chose fort loin; Mr. Descartes a suivi leurs traces et a donné une methode de digerer par ordre les courbes et de les accommoder aux problemes. Mais il ne s'y est pas pris de la maniere la plus simple et la plus naturelle pour ce qui est de les accommoder aux equations; d'où vient que pour ces sursolides par exemple, il aura déja besoin quasi d'autant d'instrumens differens qu'on luy proposera de problemes. J'ay eu le bonheur de rencontrer le chemin que la nature semble avoir fait axpres. Les constructions s'y font sans calculs et sans autre preparation que celles de changer les ouvertures des parties d'un même instrument, lequel, à raison de sa grandeur, sert à toutes les equations imaginables.

Vous m'exhortez, Monsieur, de publier ces pensées et quelques

autres, que vous avez veues de moy, du temps passé. Si vous témoignez d'estre encor de cette même opinion, j'y travailleray tout de bon, et le sentiment que vous en avez me tiendra lieu d'approbation generale, dont je me flatte apres la vostre.

Au reste je suis etc.*)

Beilage.

Die Angaben, die Leibniz in dem vorstehenden Briefe über die ersten Fortschritte in seinen algebraischen Studien zusammengestellt hat und die er Huygens zur Prüfung vorlegt, finden ihre Bestätigung und Ausführung in der folgenden Abhandlung, die deshalb hier einzuschalten ist. Leibniz sucht offenbar als letztes Ziel dieser Studien einen Ausdruck für die Auflösung einer Gleichung jeden Grades zu gewinnen. Die Formeln für die Werthe der Unbekannten in den Gleichungen des zweiten, dritten und vierten Grades werden durch Wurzelausziehung gewonnen; es kam darauf an, diesen Weg auch für Gleichungen höherer Grade zu versuchen. Zuvor aber war nothwendig, die Cardanische Formel für die Auflösung der cubischen Gleichungen durch die Beseitigung der vorkommenden imaginären Ausdrücke als allgemein gültig nachzuweisen, was bisher nicht geschehen war. Leibniz fand, daß diese Beseitigung der imaginären Ausdrücke und ihre Zurückführung auf reelle Größen ohne Wurzelausziehung möglich sei. Die Darstellung der imaginären Ausdrücke durch reelle Werthe betrachtet Leibniz als eine neue, sechste Rechnungsoperation, die sich den bisherigen fünf Grundoperationen Addition, Subtraction u. s. w. anreiht. Huygens selbst bemerkt als überraschend, daß $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$, woran Niemand bisher gedacht hätte; es liege darin etwas Unbegreifliches. Deshalb nun, daß dergleichen Formeln auf reelle Ausdrücke zurückgeführt werden können, hält Leibniz für möglich, daß die Wurzeln der Gleichungen aller Grade gefunden werden können. Man sieht hieraus, daß Leibniz in Betreff der Behandlung der Gleichungen gerüstet war, als Tschirnhaus nach Paris kam und meinte, die allgemeine Auflösung der Gleichungen gefunden zu haben.

De Resolutionibus Aequationum Cubicarum Triradicalium, de Radicibus realibus quae interventu imaginariarum exprimuntur, deque sexta quadam operatione arithmetica.

Tametsi pro insigni admodum invento haberi non possit, ostendere hominibus, quae longe quaerunt, jam tum in eorum potestate esse, utile est tamen, tum ut sciant uti suis possessionibus, tum ut frustraneo

*) Ort und Datum fehlen.

labore absistant. Idque in Aequationum Cubicarum Triradicalium resolutione faciam, ubi primum earum naturam paucis explicuero.

Sciendum est scilicet aequationem omnem aut possibiles habere radices omnes, aut impossibiles omnes, aut quasdam possibiles, alias impossibiles. Impossibiles autem radices cum Analytice exprimuntur, imaginarias appellamus. Omnis aequatio simplex sive primi gradus (loquor autem non nisi de aequationibus rationalibus, in quibus scilicet enuntiandis nulla irrationalis adhibitur) ut $x - d \sqcap 0$ vel $x + d \sqcap 0$ est realis. Aequatio quadratica duas habet radices, easque aut reales ambas, aut imaginarias ambas. Ut si sit aequatio $x^2 - bx + c^2 \sqcap 0$, erunt radices duae $x \sqcap + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ et $x \sqcap \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$, ubi quantitas $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ erit realis, si $\frac{b}{2}$ major quam c, at imaginaria, si minor, eoque casu aequatio proposita erit impossibilis. Unde patet vera origo aequationum impossibilium, et radicum imaginariarum, quod scilicet ex quantitate negativa radix quadratica extrahi non potest, neque analytice neque geometrice, ut si sit $b \sqcap 2$ et $c \sqcap 2$ erit $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2} \sqcap \sqrt{-3}$. Quod si jam aequatio simplex ducatur in quadraticam, oritur aequatio cubica, quae habet vel tres radices reales si quadratica est possibilis, vel duas imaginarias unamque tantum realem, si quadratica sit impossibilis. Aequatio quadrato-quadratica possibilis aut duas habet radices reales, aut quatuor, quia ex duabus quadraticis facta intelligi potest. Potest autem semper reduci ad cubicam, quod primus jam superiore seculo invenit Ludovicus Ferrariensis, Cardani et Tartaleae aequalis, et observavi, cum quatuor habet radices reales, tunc reduci ad cubicam triradicalem; cum duas, tunc ad cubicam unius radicis revocari.

Sit jam aequatio cubica: $y^3 * \mp qy - r \sqcap 0$ (omnes enim ad hanc formam revocari possunt), ex regula Scipionis Ferrei a Tartalea et Cardano publicata radix ejus una eaque semper realis erit: $y \sqcap \sqrt[(3)]{\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}} + \sqrt[(3)]{\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}}$, ex qua data reliquas duas radices quadratica aequatione investigare facile est, quae possibilis est, si reliquae duae radices sunt reales; impossibilis vero, si sint imaginariae. Dixi autem hanc unam minimum semper realem esse. Ubi vero sese objicit difficultas ingens. Nimirum evenit aliquando ut quantitas $\sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}$ sit impossibilis, tunc scilicet cum signum ambiguum

+ valet — et $\frac{q^3}{27}$ est major quam $\frac{r^2}{4}$, tunc enim quantitas $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}$ est negativa adeoque quantitas $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$ imaginaria. Quomodo ergo fieri potest, ut quantitas realis, qualis est radix aequationis propositae, exprimatur interventu imaginariae? Hoc ipsum enim mirum est, talem quantitatum imaginariarum interventum in illis aequationibus cubicis tantum (ut calculus ostendit) observari, quae nullam habent radicem imaginariam, sed omnes reales sive possibiles, idque per trisectionem anguli ab Alberto Girardo aliisque ostensum est. Videatur imprimis Schotenius in appendice Com. ad Geom. Cartes. Haec difficultas omnibus hactenus Algebrae scriptoribus crucem fixit, nec quisquam eorum est, qui non professus sit regulas Cardani in hoc casu exceptionem pati. Primus omnium Raphael Bombelli, cujus Algebram perelegantem Italico sermone jam superiore seculo Bononiae editam vidi, invenit, eas servire posse ad eruendas radices veras rationales sive numeris exprimibiles, quando tales habet aequatio; sed quando radices illae rationales sunt falsae sive negativae, tunc nesciebat ille etiam ex irrationalibus erui posse, adeoque aliam methodum praescripsit e Cardano sumptam, quae tamen reapse ad aequationis divisionem per y + vel — aliquo ultimi termini divisore (ut stylo Cartesii utar) reducitur, etsi alia longe phrasi utatur Cardanus. A me vero deprehensum est, eadem methodo, nonnihil tamen pro re nata immutata, etiam ex irrationalibus Cardanicis erui rationales falsas seu negativas. Quanquam autem haec observavit Bombellus, nondum tamen illud asseruit, nedum demonstravit ipsas radices Cardanicas irrationales interventu imaginariarum expressas esse quantitas reales ac aequationi resolvendae sufficientes. Quod vero a me liquido evincetur, ut appareat, alias imposterum radices aequationum Cubicarum triradicalium frustra quaeri, et habere nos quicquid in eo genere optari cum ratione potest.

Hoc cum a me aliquot abhinc mensibus inventum esset, nolui tamen explicare, donec alia quaedam memoratu digna in Algebraico negotio deprehenderem, ne inventum parum speciosum sine socio derideretur. Nunc vero cum originem talium regularum intime inspexerim et viam ad altiores aequationes repererim, deprehensa sectione potestatum generali, memorabilium admodum theorematum tabulam non mediocriter utilem complexa, et formulas quarundam aequationum dederim per omnes gradus in infinitum euntes, quaeque per irrationales sui gradus resolvuntur; hoc, inquam, cum praestiterim quicquid illud est circa Aequationum Triradicalium resolutiones, sive inventum a me sive si mavis observatum, protrudere post tot alia non contemnenda specimina non amplius erubesco.

Utile autem erit commemorare, qua via ad rem penitus eruendam excitatus sit animus. Incideram aliquando in duas aequationes ejusmodi: $x^2 + y^2 \sqcap b$ et $xy \sqcap c$, unde sequebatur $x^2 \sqcap \frac{c^2}{y^2}$, adeoque $\frac{c^2}{y^2} + y^2 \sqcap b$ et $y^4 - by^2 + c^2 \sqcap 0$, sive $y^2 \sqcap + \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ et $y \sqcap \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$. Ergo pro $x^2 + y^2 \sqcap b$, substituto valore ipsius y^2, scribebam $x^2 - \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2} \sqcap 0$ sive $x \sqcap \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$. Erat autem c major quam b, adeoque $\sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}$ erat quantitas imaginaria. At vero constabat mihi aliunde, saltem summam incognitarum $x + y$ esse quantitatem realem et aequari cuidam lineae d, quod me valde perplexum reddidit, cum enim ex calculo praecedenti deduxissem $d \sqcap x + y \sqcap \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$, non capiebam, quomodo ejusmodi quantitas posset esse realis, in quam exprimendam imaginariae sive impossibiles ingrederentur. Relegere ergo calculi vestigia coepi, errorem suspicatus, sed frustra: eadem enim perpetuo prodiere. Tandem venit in mentem, operationem instituere, quam hic subjiciam $d \sqcap \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$ sive $d \sqcap A + B$, ergo quadrando utrobique

$$\overset{+A^2}{\overbrace{d^2 \sqcap \frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}} \overset{+B^2}{\overbrace{+ \frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}} \overset{+2AB}{+ 2c}$$

nam rectanglum AB sive $\sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$ in $\sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}}$ facit c, ut calculus ostendet; erit ergo $d^2 \sqcap b + 2c$ adeoque $d \sqcap \sqrt{b + 2c}$. Aequando ergo inter se duos valores ipsius d, fiet

$$\sqrt{b + 2c} \sqcap \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}} + \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - c^2}};$$

unde si in numeris faciamus $b \sqcap 2$ et c etiam $\sqcap 2$, fiet $\sqrt{6} \sqcap \sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}}$. Qua observatione nullam facile in tota analytica singularem magis et paradoxam a me memini notatam, nam me primum arbitror radices irrationales, in speciem imaginarias, ad reales etiam sine extructione reduxisse. Et notabile est, sextum nos habituros

Operationis sive Arithmeticae sive Analyticae genus: nam praeter additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, radicum extractionem habebitur Reformatio seu Reductio expressionum imaginariarum ad reales. Nimirum additio et subtractio composita reducunt ad simplicia seu partes ad totum, vel contra; multiplicatio causas ad effectum; divisio et extractio contra: divisio fractos ad integros, extractio surdos ad rationales, denique Reformatio imaginarios ad reales.

Ad exemplum enim hujus theorematis, sive aequationis inter realem et in speciem imaginariam, alia exempla concinnari possunt infinita, etiam pro altioribus radicum irrationalium gradibus, modo earum exponentes sint progressionis geometricae duplae, ut $\sqrt{(4)}$, $\sqrt{(8)}$, $\sqrt{(16)}$ etc. imo et nonnunquam pro aliis ut $\sqrt{(6)}$, ut multis exemplis ostendere possum. Sed generaliter ejusmodi composita radicum ex binomiis et residuis non nisi tunc cum radicum exponentes sunt progressionis geometricae duplae, reduci posse analytice. In caeteris vero, ut

$$y \sqcap \sqrt{(3)\,\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}},$$

reductio ejusmodi non admittitur per naturam rerum, quoniam scilicet radices irrationales cubicae non statim tolluntur cubando, ut quadraticae quadrando. Sit enim $y^3 \sqcap A^3 + B^3 + 3ABy$; est autem $3AB \sqcap q$, ut calculus ostendet, et $A^3 + B^3 \sqcap r$. Unde fit aequatio non pura (ut in quadratica supra habueramus $d^2 \sqcap b + 2c$), sed affecta $y^3 \sqcap + 3qy + r$, quod impedit, quominus istae quantitates alia adhuc ratione et sine imaginariis exprimi possint, ut in quadraticis successerat. Sed tametsi Reductio quantitatum in speciem imaginariarum ad reales non semper enuntiatione quadam expressa palpabilis reddi possit, non eo tamen minus hae in speciem imaginariae reapse sunt reales habendae. Itaque de hac operatione sexta Reformationum dicendum est, quod de operatione quinta extractionum, esse scilicet quantitates reales, quae tamen non nisi imaginariarum interventu exprimantur, quemadmodum sunt radices, quas surdas vocamus, quae non nisi per suas potestates enuntiantur. Quanquam autem exemplum radicum quadraticarum in speciem imaginariarum validam satis suspicionem moveat altiores quoque reales esse, quoniam tamen minime convenit, in hujusmodi quaestionibus, ubi accurata veritatis indagatio in humanae mentis potestate est, nos conjecturis duci, ideo demonstrandum putavi, expressiones illas semper esse rectas et admittendas, etiam tum cum interveniunt imaginariae, ut in cubicis triradicalibus usu venit. Quod antequam faciam, ostendam paucis, contrarium sensisse doctissimos viros et habuisse graves sane dubitandi rationes. De Cardano et Tartalea qui regulas illas publicavere primi,

non est cur moneam. Bombellus, quem dixi observasse primum, quod ex his radicibus erui possint saltem radices rationales verae seu affirmativae, si quae sunt, credidit tamen in caeteris casibus, cum scilicet radices rationales sunt negativae aut etiam cum non sunt rationales, exceptionem pati regulas. Exempli causa proposita aequatione $y^3 - 12y - 9 \sqcap 0$, quae triradicalis est, haec, inquit, aequatio resolvi non potest per regulas propositas; ideoque utitur alia methodo, eamque dividit per $y + 3$, unde fit aequatio quadratica, quam resolvit. Sed non noverat ille, ipsam quantitatem -3 esse radicem licet falsam, aut certe non putabat irrationales eam continere. Idem putat, aequationes ejusmodi in quibus scilicet terminus penultimus est negativus et quadratum semissis termini ultimi est minus cubo trientis penultimi, tunc cum ultimus terminus est affirmativus, non posse resolvi. Unde proposita aequatione $y^3 - 6y + 8 \sqcap 0$ ait, quaesta agguagliatione risolutamente non si può agguagliare, e la proposta tratta dell' impossibile, in quo sine dubio deceptus est; scimus enim hodie, omnem aequationem cubicam esse possibilem et habere vel unam radicem realem vel tres. In quo eum errasse tanto magis miror, quod jam tum scivit, Trisectionem Anguli ad aequationem cubicam, quae per regulas Cardani tractari non posse credebatur, reduci. Sed error inde ortus, quod nondum satis eo tempore notum erat, aequationes provenire ex radicibus in se ductis, quod a Cartesio, si non inventum, saltem in clara luce positum est. Unde non miror, alicubi Bombellum asserere, non videri sibi unam quaestionem plures una veras responsiones sive radices habere posse. Albertus Girardus, qui primus quod sciam usum Trisectionis Anguli in hoc negotio accurate explicuit, Cardani regulas satis aperte exclusit. Quem secutus est Cartesius. Nam Vieta radices irrationales rarius attigit, et cum methodum tradidit sane pulcherrimam extrahendi radices aequationum in numeris rationalibus, non est usus extractione ex radicibus irrationalibus.

Quod superest ergo summi viri Renati Cartesii ac doctissimorum ejus discipulorum Huddenii et Schotenii mentem explicare suffecerit. Cartesius libro tertio Geometriae radices Cardani diserte non nisi illis aequationibus applicandas censet, in quibus imaginariae quantitates evitantur, et tunc cum imaginariae interveniunt, novum notae algebraicae genus introducere conatur, ut scilicet quantitas incognita non per extractionem radicis sive sectionem rationis, sed per sectionem anguli explicetur, in quo mihi non satisfacit. Nam aliae sunt notae Analyticae, aliae Geometricae; illae serviunt ad quantitatem incognitam enuntiandam relatione ad quasdam operationes arithmeticas, quales sunt additiones, subtractiones, multiplicationes, divisiones, radicum extractiones et (quae

a me adduntur) imaginariarum reformationes, hae vero enuntiant quantitatem incognitam relatione ad quasdam operationes geometricas ductusque linearum. Et aequationem resolvisse aliud est quam construxisse: resolutio rei naturam detegit, incognitas simplicissime enuntiat, earumque omnes recessus patefacit; constructio quaesitam quantitatem exhibet instrumento; tametsi ultro largiar Geometriam ad ostendendam realitatem quantitatum in speciem imaginariarum, imo et surdarum adhiberi debere, ne scilicet pro figmentis inanibus humanae mentis habeantur. Quare Cartesii ratiocinationi non assentior, cum nobis est persuasum (ut scilicet jacturam soletur, quam ex defectu regularum Cardani nos pati credidit), aeque clare, imo clarius ac distinctius nos concipere incognitam per relationem ad subtensas arcuum, quarum triplum est datum, quam per relationem ad latera cuborum quorum contentum est datum. Faterer si de Geometrica constructione ageretur, sed analytici est incognitas exprimere per notas, quae ad calculum sint aptae; manifestum est autem, notam Cartesianam, qua incognitae cubicae per relationes ad arcus exprimerentur, ad calculum servire non posse aut certe inter calculandum semper mansuram invariatam, cum contra radices cubicae irrationales nonnunquam extrahi, semper tolli possint et in se invicem aut in alias duci, aliasque atque alias formas induere, quibus earum natura et problematis constitutio detegatur. Neque enim Cartesius ex nota sua ad anguli trisectionem nos referente duceret unquam radices rationales aequationis, neque illud demonstraret sane memorabile, omnem aequationem cubicam deprimibilem habere radicem rationalem; uti ex irrationalibus Cardanicis, etiam tum cum imaginariae interveniunt, egregie patet, quod infra denuo attingere operae pretium erit.

Denique concludit Cartesius, naturam radicum cubicarum non pati, ut terminis exprimantur simplicioribus, nec ut per constructionem aliquam, quae una et generalior et simplicior sit, determinentur. Quae Schotenius iisdem verbis repetit in praefatione Commentariorum in librum tertium et rursus pag. 297 Com. ad lib. I, usque adeo ea illi placuere. De constructione non repugno; at quod ad expressionem attinet, ajo, Cardanicam et simplicissimam et generalissimam esse, omnesque omnino casus complecti, secus quam Cartesio videbatur. Schotenii mens ex his aliisque multis locis satis patet; at de ingeniosissimo Huddenio miror, quo neminem unquam profundius in analyseos purae et a geometria abstractae mysteria penetrasse scio. Is Epistola ad Schotenium prima pag. 504 regulae, inquit, quarum ope quarundam cubicarum aequationum radices investigantur, quas Cardanus autori Scipioni Ferreo ascribit etc. Et regula 21 exemplo quarto cum agnovisset ex irrationalibus Cardanicis erui posse radices rationales, subjicit: ex-

cepto tantum uno casu, quando termino penultimo existente negativo cubus trientis ab ipso major est quadrato semissis ab ultimo.

Utile vero erit etiam rationem adjicere, quae doctissimis viris persuasit, regulas Cardani esse limitatas. Primum Cardanicae radices in casu toties dicto speciem habent impossibilium sive imaginariarum, sed regeri poterat, non ideo imaginarias sive impossibiles habendas, imo necessario esse reales, quoniam ex aequatione data (quae utique possibilis est) consequantur; ex vero autem non sequi nisi verum. Ad hanc objectionem parata illis replicatio fuit, radices Cardanicas ex aequatione cubica data non sequi necessario, sed niti quadam suppositione; ea autem suppositione tunc, cum ad impossibile ducit, esse abstinendum. Hujus responsionis vis ac momentum eleganter apparet ex calculo, quem instituit doctissimus Huddenius. Esto aequatio data $x^3 \pm qx - r \sqcap 0$. Ponatur incognita $x \sqcap y + z$; haec suppositio utique semper permissa est; ergo erit $x^3 \sqcap y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$, adeoque ex aequatione data $x^3 \sqcap \mp qx + r$ aequando duas ipsius x^3 valores, fiet $y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 \sqcap \mp qx + r$. Cum vero plures habeamus quantitates indeterminatas quam aequationes, nam indeterminatae sunt tres x, y, z, aequationes tantum duae $x \sqcap y + z$ (sive $x^3 \sqcap y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3$) et $x^3 \sqcap \mp qx + r$, ideo (regulariter) licebit novam pro arbitrio fingere aequationem. Fingamus ergo $y^3 + z^3 \sqcap r$, et restabit in aequatione superiore $3y^2z + 3yz^2 \sqcap \mp qx$, cujus uno latere diviso per x, altero per $y + z$, ipsi x aequivalentem, fiet $3yz \sqcap \mp q$. Unde ut verba in compendium contraham (cetera enim clara sunt) fiet denique

$$x \sqcap \sqrt{(3)\,\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}} + \sqrt{(3)\,\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} \mp \frac{q^3}{27}}}.$$

Quodsi ergo $\mp$ valeat $-$ (id est si $\pm$ sit $+$) et sit $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{r^2}{4}$, venimus ad aliquod impossibile, adeoque suppositio a nobis pro arbitrio facta, qua fecimus $y^3 + z^3 \sqcap r$, eo casu admittenda non est, quare et valor hic ipsius x ex aequatione data necessario non ducitur. Haec ratiocinatio recta est et solida, quatenus concludit ex aequatione directe deduci nec necessario calculo formulam Cardanicam sic quidem deduci, ac certe nisi aliunde deprehendissem radices Cardanicas generatim esse admittendas, ex hoc certe calculo solo asserere non auderem, ob intervenientem ut dixi suppositionem.

Opus est ergo, ut sine ulla ejusmodi suppositione demonstrem, radicibus Cardanicis omnem generaliter aequationem cubicam recte resolvi. Incipiam a clarioribus exemplis earum, quae radicem habent rationalem, ut facilius intelligatur postea demonstratio generalis de irrationalibus.

Sit quantitas aliqua 2b, poterit eadem et sic enuntiari: $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$. Quanquam enim $\sqrt{-ac}$ sit quantitas imaginaria, summa tamen ideo non minus est realis, quoniam imaginariae destruuntur. Dividatur haec formula in duas partes, binomium $b+\sqrt{-ac}$, et residuum $b-\sqrt{-ac}$ et utriusque separatim investigetur cubus, erit ipsius $b+\sqrt{-ac}$ cubus hic $\begin{matrix}+b^3-ac\sqrt{-ac}\\ -3bac+3b^2\ldots\end{matrix}$ et ipsius $b-\sqrt{-ac}$ cubus erit $\begin{matrix}b^3+ac\sqrt{-ac}\\ -3bac-3b^2\ldots\end{matrix}$ adeoque erit

$$\sqrt{(3)\begin{matrix}+b^3 & -ac\sqrt{-ac}\\ -3bac+3b^2 & \ldots\end{matrix}}+\sqrt{(3)\begin{matrix}+b^3 & +ac\sqrt{-ac}\\ -3bac-3c^2 & \ldots\end{matrix}}$$

$$\text{vel}\ \left.\sqrt{(3)\begin{matrix}+b^3 & +\sqrt{-a^3b^3}\\ -3bac+ & 6a^2c^2b^2\\ - & 9b^4ac\end{matrix}}+\sqrt{(3)\begin{matrix}+b^3 & -\sqrt{-a^3b^3}\\ -3bac+ & 6c^2c^2b^2\\ - & 9b^4ac\end{matrix}}\right\}\sqcap 2b$$

sive $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$. Quodsi ergo ex tali binomio ejusmodi semper extrahi posset radix cubica, quemadmodum ex hoc quidem potest, utique junctis inter se binomio et residuo semper tolli posset imaginaria. Sed quoniam data ejusmodi expressione:

$$\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt{(3)\,\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}},$$

qualem exhibent cubicae aequationes, non semper extrahi potest, id est, quia non semper quantitas data $\frac{r}{2}$ in duas b^3-3bac nec quantitas data $\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}$ in tres $-a^3c^3+6a^2c^2b^2-9b^4ac$ dispesci a nobis sine alia aequatione, aeque ac data difficili, potest; ideo fit ut ex quantitatibus realibus non semper possimus imaginarias eliminare.

Exempla autem in numeris rationalibus proponere utile erit. Sit aequatio, qua et Albertus Girardus utitur: $x^3 * -13x-12\sqcap 0$, cujus radix vera est 4. Ex formulis autem Scipionis Ferrei sive Cardani erit

$$x\sqcap\sqrt{(3)\,6+\sqrt{\frac{-1225}{27}}}+\sqrt{(3)+6-\sqrt{\frac{-1225}{27}}}.$$

Quam expressionem rectam esse et realem, et admittendam sic demonstrabo. Ponatur $x\sqcap 2+\sqrt{-\frac{1}{3}}+2-\sqrt{-\frac{1}{3}}$, erit utique $x\sqcap 4$, uti aequatio postulati. Videamus nunc an inde derivari possit formula Cardanica. Nimirum cubando et superiorem formulam $b+\sqrt{-ac}+b-\sqrt{-ac}$ huc applicando, faciendoque $b\sqcap 2$ et $ac\sqcap\frac{1}{3}$ habebimus pro cubo ipsius $2+\sqrt{-\frac{1}{3}}$ formulam hanc:

$$\begin{array}{l} +8 \\ -3,\, 2,\, \frac{1}{3} \sqcap -2 \end{array} + \sqrt{\left\{\begin{array}{l} -\frac{1}{27} \\ +6,\, \frac{1}{9},\, 4 \;\sqcap \frac{72}{27} \\ -9,\, 16,\, \frac{1}{3} \sqcap -\frac{1296}{27} \end{array}\right.}$$

sive summando $6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}$. Eodem modo cubus a $2 - \sqrt{-\frac{1}{3}}$ erit $6 - \sqrt{\frac{-1225}{27}}$, ac proinde $\sqrt{(3)\, 6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ erit $2 + \sqrt{-\frac{1}{3}}$ et $\sqrt{(3)\, 6 - \sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ erit $2 - \sqrt{-\frac{1}{3}}$, ac jugendo binomium residuo erit x sive $\sqrt{(3)\, 6 + \sqrt{\frac{-1225}{27}}} + \sqrt{(3)\, 6 - \sqrt{\frac{-1225}{27}}}$ idem quod $2 + \sqrt{-\frac{1}{3}} + 2 - \sqrt{-\frac{1}{3}}$, id est, erit 4, ut ostendere propositum erat.

Unum adhuc exemplum adducere operae pretium erit, cum radix rationalis in irrationalibus Cardanicis latens est falsa sive negativa, quoniam variatur nonnihil calculus, et video Raphaelem Bombellum, egregium certe artis analyticae magistrum, hic haesisse: nam ut supra dixi, radices rationales veras extrahere potuit, falsas non potuit.

Exemplum esto $x^3 * -48x - 72 \sqcap 0$, cujus radix falsa est $x \sqcap -6$. Erit ex regula $x \sqcap \sqrt{(3)\, 36 + \sqrt{-2800}} + \sqrt{(3)\, 6 - \sqrt{-2800}}$; otendendum est ergo harum duarum irrationalium summam nihil aliud facere, quam -6. Quem in finem ponemus $x \sqcap \underbrace{-3 + \sqrt{-7}}_{\odot}\; \underbrace{-3 - \sqrt{-7}}_{\rightmoon}$ sive $x \sqcap \odot + \rightmoon$ vel $x \sqcap \sqrt{(3)\, \odot^3} + \sqrt{(3)\, \rightmoon^3}$. Resumpta ergo formula superiore, qua erit $\odot \sqcap b + \sqrt{-ac}$ et $\rightmoon \sqcap b - \sqrt{-ac}$, ac nunc pro b substituendo -3 et pro ac summendo 7, erit

$$\begin{array}{l} \odot^3 \sqcap -27 \\ \quad +3,\, 3,\, 7 \sqcap 63 \end{array} + \sqrt{\left\{\begin{array}{l} -343 \\ +6,\, 49,\, 9 \sqcap 2646 \\ -9,\, 81,\, 7 \sqcap -5103 \end{array}\right.}$$

sive summa inita $\odot^3 \sqcap 36 + \sqrt{-2800}$; eodem modo ostendetur esse $\rightmoon^3 \sqcap 36 - \sqrt{-2800}$. Cum ergo sit $x \sqcap -6 \sqcap \sqrt{(3)\, \odot^3} + \sqrt{(3)\, \rightmoon^3}$, erit $x \sqcap \sqrt{(3)\, 36 + \sqrt{-2800}} + \sqrt{(3)\, 36 - \sqrt{-2800}}$, ut regula Cardani perscripserat, quod ostendendum proponebatur.

Tametsi autem radices cubicae semper ex binomiis et residuis ejusmodi analytice extrahi non possint, patet tamen semper in illis inesse, et operatione Geometrica inveniri, quemadmodum aliae radices

surdae: ac proinde imaginarias semper destrui ac summam duarum hujusmodi radicum cubicarum semper esse realem, tametsi destruendi modus non sit semper enuntiabilis. Ne qua tamen ansa dubitandi relinquatur, duplici demonstratione generali rem conficiemus, quae rationales irrationalesve non moretur. Prior demonstratio huc redit: Formula Cardanica satisfacit aequationi cubicae triradicali; omnis formula quae satisfacit aequationi cuidam, est ejus radix; ergo formula Cardanica est aequationis cubicae triradicalis radix. Omnis porro radix aequationis cubicae triradicalis est quantitas realis (ex hypothesi ideo enim triradicalem vocamus, quod tres habet radices reales, qualem illam esse, quae regulas Cardani respuere credebatur, dudum ostensum est; videatur inprimis Schotenius in appendice de aequationum cubicarum resolutione; neque vero plures quam tres habere potest radix cubica ulla). Ergo formula Cardanica (etiam tum cum ex cubica triradicali ducitur) est quantitas realis. Superest ergo tantum, ut ostendamus formulam Cardanicam etiam aequationi cubicae triradicali satisfacere, quod apparet, si in aequatione ejusmodi ut $x^3 * -qx - r \sqcap 0$ substituendo valorem ipsius x, nempe

$$\begin{array}{lllll}
 & A^3 & +3A^2B & +3AB^2 & +B^3 \\
x^3 \sqcap & \frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}} & {}^{*)}+q\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} & {}^{*)}+q\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} & +\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}} \\
-qx \sqcap & & -q\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} & -q\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}} & \\
-r \sqcap & -\frac{r}{2} & & & -\frac{r}{2} \\
\hline
 & \sqcap 0 & \sqcap 0 & &
\end{array}$$

Semper ergo formula Cardanica satisfacit, nec refert major minorve sit $\frac{q^3}{27}$ quam $\frac{r^2}{4}$.

Altera demonstratio haec est: Sit aequatio data $x^3 * -qx - r \sqcap 0$; ajo radicem seu valorem ipsius x esse

$$\sqrt[3]{\frac{r}{2}+\sqrt{+\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}}+\sqrt[3]{\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}-\frac{q^3}{27}}},$$

quanquam sit $\frac{q^3}{27}$ major quam $\frac{r^2}{4}$. Probo, quia tunc semper erit $A \sqcap \frac{x}{2}+\sqrt{-ac}$, $B \sqcap \frac{x}{2}-\sqrt{-ac}$, sumta pro ac quantitate quamcunque calculus obtulerit, ac proinde summa utrius radicis cubicae seu $A+B$ erit x,

*) Nam $AB \sqcap \frac{q}{3}$ ut facile calculo ostendi potest.

ut proponebatur. Assumtum sic ostendo: Ponatur A vel B major minorve esse quam assignata quantitas, et excessus vel defectus sit $\pm d$; erit ergo $A \sqcap \frac{x}{2} \pm d + \sqrt{-ac}$, et $B \sqcap \frac{x}{2} \pm d - \sqrt{-ac}$, nam calculus ejusmodi binomiorum ostendit, quantitates reales in binomio pariter ac residuo esse easdem, nec differentiam nisi in signis quantitatis imaginariae intervenientis esse debere. Compendii autem causa ponamus $\frac{x}{2} \pm d \sqcap b$, fiet $A \sqcap - b + \sqrt{-ac}$ et $B \sqcap b - \sqrt{-ac}$

$$\text{et } A^3 \sqcap \frac{+b^3 \quad -ac\sqrt{-ac}}{-3bac + 3b^2 \ldots\ldots} \text{ et } B^3 \sqcap \frac{+b^3 \quad +ac\sqrt{-ac}}{-3bac - 3b^2 \ldots\ldots}$$

$$\sqcap \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}} \qquad \sqcap \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$$

Habemus ergo $b^3 - 3bac \sqcap \frac{r}{2}$. Aliunde autem scimus, radicem ipsius $\frac{q^3}{27}$ differentiae quadratorum partium binomii vel residui dati $\frac{r}{2}$ et $\pm\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$ aequari ipsi $b^2 + ac$ differentiae quadratorum partium binomii vel residui quaesiti $b \pm \sqrt{-ac}$ seu radicis binomii vel residui dati $\frac{r}{2} \pm \sqrt{-ac}$. Quod theorema demonstratum extat apud Schotenium in appendice Commentariorum, tametsi originem inventionis, quae ad altiores quoque gradus porrigitur, non attigerit, quam alias forte explicare poterimus. Habemus ergo aequationes duas $b^3 - 3bac \sqcap \frac{r}{2}$, et alteram $\frac{q}{3} \sqcap b^2 + ac$, ex quarum posteriore erit $ac \sqcap \frac{q}{3} - b^2$, quem valorem inserendo in priore habebimus $b^3 + 3b^3 - qb \sqcap \frac{r}{2}$ vel $8b^3 - 2qb - r \sqcap 0$. Quae aequatio cum per omnia coincidat datae, excepto quod pro x habetur 2b, et pro x^3 habetur $8b^3$, ideo necesse est 2b esse x, adeoque b esse $\frac{x}{2}$. Posueramus autem supra $b \sqcap \frac{x}{2} \pm d$, erit ergo $\pm d \sqcap 0$. d autem significabat excessum aliquem aut defectum; is ergo erit nullus, adeoque exacte A sive $\sqrt{(3)\,\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}$ erit $\sqcap \frac{x}{2} + \sqrt{-ac}$ et B sive $\sqrt{(3)\,\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}$ erit $\sqcap \frac{x}{2} - \sqrt{-ac}$. Ergo denique

$$\sqrt{(3)\,\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} + \sqrt{(3)\,\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} \text{ erit } \frac{x}{2} + \sqrt{-ac} + \frac{x}{2} - \sqrt{-ac},$$

id est x, quod ostendendum sumseramus.

Cum ergo satis opinor evicerimus, repetitas toties radicum irrationalium formulas esse reales sine ullo aequationis cubicae discrimine, superest, ut de earum usu nonnulla dicamus. Ac primum haec est sententia mea, generatim in eo consistere perfectionem Algebrae, ut radices irrationales aequationum cujuscunque gradus inveniantur. Nam resolutio aequationis est, invenire valorem incognitae quantitatis, sive aequationem ex affecta et elata reddere puram et simplicem, quod generaliter in quolibet gradu fieri non potest nisi per irrationales illius gradus, accedentibus subinde et irrationalibus graduum inferiorum. Inventa formula generali radicum irrationalium alicujus gradus, habetur quidquid in eo gradu optari potest, limites ac determinationes, possibilitates atque impossibilitates, numerus radicum, expressio earum simplicissima, ac depressiones atque extractiones, quibus problema ad simplicissimos terminos reduci possit. Denique si de constructionibus quaeratur, habebitur revocatio omnium problematum ab aequationibus pendentium ad duo tantum, sectionem scilicet rationis aut anguli.

Eadem et priorum Algebristarum sententia fuit. Sed video, summum virum Renatum Cartesium aliam institisse viam atque ab ipso pariter ac doctissimis ejus commentatoribus radicum irrationalium usum atque inventionem plerumque elevari. Sed ita sumus homines, ut nostra tantum admiremur. Cartesius enim cum resolutionem aequationum per irrationales sive veram atque analyticam radicum inventionem promovere posse desperaret, rem ad geometricam constructionem traduxit per varia curvarum genera, praeclaram certe et summo ejus ingenio dignam, sed qua ut supra quoque dixi non mens illustratur, sed manus dirigitur. Si quis enim lineam quaesitam mihi exhibeat materialem instrumento aliquo, ut circuli aut parabolae sectionibus determinatam, praxin absolvit, animo non satisfacit, qui tum demum conquiescit, cum quaesitae quantitatis valorem simplicissima ad datas relatione expressum habet, qua intima ejus natura detegitur et omnes problematis recessus patefiunt. Videbat scilicet Cartesius, semper esse in potestate curvas invenire construentes (tametsi ut alibi dixi instrumentum aliquod simplex ac generale mentem non sustulerit) sed non esse hactenus in potestate invenire valores; certis enim ad valores irrationales inveniendos artibus est opus ac suppositionibus mira quadam ratione excogitatis, in quas non incidat animus, nisi aut immenso labore omnia pertentet aut singulari quodam artificio regatur, quod non ab Algebra, sed a superiore quadam scientia proficiscitur. Fateor cubicarum atque quadrato-quadraticarum radices facilius fuisse repertas, illas a Scipione Ferreo, has a Ludovico Ferrariensi, quoniam ob calculorum simplicitatem paucasque admodum combinationes variis modis ad idem perveniri solet. Ego certe decem

minimum modis inter se diversis ad Scipionis Ferrei, tribus aut quatuor rationibus in Ludovici Ferrariensis regulas perveni, idque aliquando cum alia quaererem. At qui regulas quinti sextique gradus universales invenerit, eum certe laudabo, totum enim fere ingenio atque industriae, vix quicquam fortunae debebit. Hoc ergo agere debent, quicunque Algebram a se promotam gloriantur.

Cartesii methodus analytica hoc tantum ac ne vix quidem praestat, ut sciamus an aequatio aliqua rationalis dividi possit per aliam rationalem. Et ad id ipsum investigandum opus est calculis immensis, nam ut Huddenius ostendit, ut sciamus exempli causa, an aequatio aliqua sexti gradus per aequationem cubicam secundi termini rationalis dividi possit, opus est aequatione gradus decimi quinti, cujus divisores sed simplices tantum ac rationales quaerendi sunt. Fateor, Huddenium summo ingenio ac miris artibus immensoque labore tabulam inde eruisse, cujus ope omnia pertentando sciri possit, an aequatio aliqua rationalis quinti sextique gradus sit divisibilis; sed quis tanti putabit ullam aequationem, ut per tot examina incredibili labore ducat, et quid futurum putamus in altioribus, ubi tabula ipsa ad hunc constructa modum immensae magnitudinis futura esset, praeterquam quod ita aequationes illae, in quibus irrationales supersunt, non possunt examinari. Neque enim sine exaltatione aequationum semper tolli possunt irrationales: exaltationes autem illae plerumque ducunt ad gradus, de quibus regulas nondum habemus. At formula irrationalium radicum suo gradui generaliter accommodatarum, ingentis tabulae instar una habet, nec aequationes illas moratur, in quibus sunt irrationales, et hoc nobis praestat, ut depressiones omnes certa securaque ratione sine tot tentaminibus inveniantur per extractiones radicum quando fieri possunt. Divisorum enim inquisitio res est varia et multis tentaminibus obnoxia, praesertim cum de divisoribus irrationalibus agitur; at radicum inventio certa est semper ac determinata, sive literales sive numerales sint aequationes.

Sed usum radicum irrationalium uno atque altero tantum exemplo illustrare utile erit. Cartesius asserit, si aequatio cubica proposita rationalis dividi nequeat per incognitam plus minusve aliquo divisore rationali termini ultimi (nam irrationales infiniti sunt nec tentari possunt), tunc pro certo haberi debere, problema esse solidum, adeoque omnem aequationem cubicam rationalem deprimibilem habere radicem rationalem. Quae assertio merebatur demonstrationem; quidni enim possit aequatio esse deprimibilis, et habere radices planas quidem, sed irrationales, nempe quadraticas? At hujus Theorematis veritas ex irrationalium Cardanicarum contemplatione manifesta est, ac nescio, an Cartesius aliunde emerit. Nimirum sit aequatio $x^3 * - qx - r \sqcap 0$, cujus radix

$$x \sqcap \sqrt{(3)\ \frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}} + \sqrt{(3)\ \frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}}.$$

Patet, si radicem habeat, partem unam A habituram et alteram B; item si radix ab A sit binomium ut $b + \sqrt{\mp ac}$, tunc radicem ex B fore residuum respondens $b - \sqrt{\mp ac}$. His adjicio, si radix cubica erui possit ex binomio A vel residuo B, tunc eam semper habere partem unam b rationalem, nec posse componi ex duabus irrationalibus, quod ita probo. Omne binomium vel residuum, cujusque partium quadratorum differentia habet radicem cubicam rationalem, ejus binomii radix est ex parte rationalis; patet ex dictis a Schotenio in appendice Commentariorum, ubi de methodo extrahendi ex residuis et binomiis, et potest si opus accuratius demonstrari. Jam binomium vel residuum Cardanicum semper tale est; ejus enim partes sunt $\frac{r}{2}$ et $\sqrt{\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}}$, quadrata partium sunt $\frac{r^2}{4}$ et $\frac{r^2}{4} - \frac{q^3}{27}$, quorum differentia $\frac{r^2}{4}, -\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}$, id est $\frac{q^3}{27}$, cujus radix cubica est rationalis, nempe $\frac{q}{3}$. Cum ergo b sit rationalis quantitas et x quandocunque, ex A et B radix cubica extrahi potest. Sit $b + \sqrt{\mp ac} + b - \sqrt{\mp ac}$ sive $x \sqcap 2b$, patet x fore semper rationalem, quandocunque aequatio cubica deprimi potest.

Deberet jam explicari Methodus extrahendi radices cubicas ex his binomiis vel residuis etiam tum cum imaginariae ingrediuntur. Raphael Bombellus id praestat tentando, intra certos tamen limites, quoniam scilicet methodus illa ingeniosissima, quae a Schotenio sub finem Commentariorum adjecta est, nondum haberetur. Quoniam autem requirit methodus haec, ut binomii ejusmodi vel residui valor in numeris inveniatur vero propinquus, ut postea exacte experiri possit; ideo fit ut imaginariis intervenientibus directe adhiberi nequeat; quis enim exempli causa in numeris rationalibus vero propinquis exhibeat valorem quantitatis hujusmodi $\sqrt{(3)\ 1 + \sqrt{-1}}$? Cui malo remedium inveni ac methodum detexi, per quam sine tentamentis, ex talibus binomiis etiam non obstante imaginaria radices extrahi possint, non cubicae tantum sed et surdesolidae, et aliae altiores quaecunque.

Nititur illa inventio cuidam singulari, quod aliquando explicabo. Nunc regulas quasdam adjiciam ex irrationalibus contemplatione ductas, quanquam in illis nulla fiet irrationalium mentio, per quas radix rationalis ex ipsis tentando facile extrahitur.*)

*) Die Abhandlung bricht hier ab.

II.

Huygens an Leibniz.

Ce 30 Sept.

J'ay retenu plus longtemps que je ne devois, Monsieur, les escrits que vous m'avez prestez, mais je crois que vous recevrez mes excuses quand je vous diray qu'ayant esté fort longtemps hors d'exercice pour ce qui regarde ces sortes d'Equations Algebraiques, il m'a falu du temps pour les estudier de nouveau à fin de pouvoir juger de vos nouvelles inventions. Vous vous estes mis à chercher une chose qui doit estre bien difficile à trouver, puisqu'elle ne l'a pas esté encore, qui est de donner des formules de racines pour les Equations du 5e degré et au delà. Et quoyque vous n'en serez pas encore venu à bout, c'est quelque chose d'avoir trouvé de ces racines dans beaucoup de cas, et d'avoir decouvert des Theoremes, qui semblent devoir faciliter le chemin aux regles generales.

Pour ce qui est de l'usage des racines de Cardan dans les cas mesme où elles sont meslées de quantitez imaginaires, il est certain qu'elles servent tousjours dans les problemes d'Arithmetique, et vous avez plus fait que Bombelli en faisant voir que lors mesme que l'on ne peut pas tirer la racine des binomes, leur racines ne laissent pas de signifier des quantitez reelles. Mais à fin que l'on s'en puisse servir utilement, il faut que vous nous donniez la methode que vous dites avoir trouvée pour tirer les racines de ces sortes de binomes tant au cas qu'elles sont extrahibles, qu'à ceux où l'on ne les peut avoir que par approximation. Je vois que Bombelli en a extraict dans ces premiers cas, mais il y a apparence que ce n'a esté qu'en tastonnant, comme dans les autres extractions des racines cubes des binomes reguliers: quoyque il pretende d'avoir aussi quelque regle assurée pag. 151, de la quelle je seray bien aise d'entendre vostre avis.

Vous assurez une chose que je voudrois bien voir demontrée, sçavoir qu'il n'est pas possible de trouver des formules de racines sans quantitez imaginaires dans les cas, où la regle de Cardan produit de cette sorte de quantitez. La preuve de ces negatives est difficile. Pour ce qui est de celle de cette autre proposition importante que toute equation cubique qui peut estre deprimée contient une racine rationelle, il sera bon que vous fassiez voir comment elle suit de la realité des racines de Cardan dans tous les cas, car j'avoue que je ne le conçois pas encore clairement.

La remarque que vous faites touchant des racines inextrahibles, et avec des quantitez imaginaires, qui pourtant adjoutées ensemble composent une quantité reelle, est surprenante et tout à fait nouvelle. L'on n'auroit jamais cru que $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}$ fist $\sqrt{6}$, et il y a quelque chose de caché là dedans qui nous est incomprehensible.

L'instrument que vous promettez pour resoudre toute sorte d'Equations me paroit quelque chose de fort beau, et je vous defierois d'en venir à bout, si je n'avois veu desia ce que vous sçavez faire par la machine d'Arithmetique. Je suis etc.

III.

Huygens an Leibniz.

Ce 6. Novembre.*)

Je vois renvoie, Monsieur, Vostre escrit touchant la Quadrature Arithmetique, que je trouve fort belle et fort heureuse. Et ce n'est pas peu à mon avis d'avoir decouvert dans un Probleme qui a exercé tant d'esprits une voye nouvelle qui semble donner quelque esperance de parvenir à sa veritable solution. Car le Cercle, suivant vostre invention, estant à son quarré circonscrit comme la suite infinie de fractions $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. à l'unité, il ne paroistra pas impossible de donner la somme de cette progression ni par consequent la quadrature du cercle, apres que vous aurez fait voir que vous avez determiné les sommes de plusieurs autres progressions qui semblent de mesme nature. Mais quand mesme l'impossibilité seroit insurmontable dans celle dont il s'agit, vous ne laisserez pas d'avoir trouvé une proprieté du cercle tres remarquable, ce qui sera celebre à jamais parmi les geometres. Pour ce qui est de la ligne courbe Anonyme qui sert à Vostre demonstration, j'avois envie de la baptizer, en luy donnant quelque nom composé des noms de deux lignes dont je trouvois qu'elle estoit produite, qui sont le cercle et la Cissoïde des anciens. Mais ayant vu du depuis que cette mesme ligne a esté premierement mise

*) Im Original fehlt das Jahr, ebenso wie im vorhergehenden Briefe. Uylenbroek datirt diesen Brief vom 7. November 1674.

en avant par J. Gregorius, je crois qu'il luy faut laisser le droit de la nommer comme il voudra. Il s'en est servi pour demonstrer le rapport qu'il y a entre la mesure de la Cissoïde et celle du cercle, qui est de mon invention; ainsi qu'il paroit par le traité de M. Wallis de Cissoide, et par ce que le mesme autheur en a dit dans son traité du Mouvement, où la demonstration que j'ay donnée de ce Theoreme est inserée. Laquelle estant supposée, vous pourriez par là abbreger de beaucoup vostre demonstration de la Quadrature Arithmetique. Mais vous ferez en cela comme vous le jugerez à propos. Je vous donne le bon jour et suis tout à vous etc.

IV.

Leibniz an Huygens.

A Hannover ce 8 de Sept. 1679.

Un de mes amis, nommé M. Hansen, qui a eu l'honneur de vous parler, me mande, que vous continués d'avoir de bons sentimens pour moy, de quoy je vous suis fort obligé, et j'en ay voulu prendre l'occasion de vous témoigner combien j'honnore vostre merite extraordinaire, que tout le monde reconnoist avec moy, et qui vous met au premier rang.

J'ay appris de Mr. de Mariotte, que vous nous donnerés bientost la Dioptrique si longtemps souhaittée. J'ay grande envie de la voir un jour, et je voudrois scavoir par avance, si vous estes content des raisons de la refraction, que Mr. Descartes propose. J'avoue, que je ne le suis pas entierement, non plus que de l'explication de Mr. Fermat, qui est dans le 3e tome des lettres de Descartes.

J'ay laissé à Paris mon manuscrit de la quadrature arithmetique, à fin de l'y faire imprimer un jour. Mais j'ay fort avancé depuis ces sortes de recherches, et je croy qu'on pourroit venir à bout de la pluspart des choses, qui paroissoient jusqu'icy au dessus du calcul: par exemple, les quadratures, et methodus tangentium inversa, et les racines irrationelles des equations, et l'arithmetique de Diophante. Car j'ay des methodes generales, qui donnent la pluspart de ces choses d'une manière aussi determinée, que celle dont l'Algebre ordinaire se sert pour arriver à une equation. Et je ne crains pas de dire, qu'il y a moyen d'avancer l'Algebre au delà de ce que Viete et Mr. des-Cartes

nous ont laissé, autant que Viete et des-Cartes ont passé les anciens. Mais comme ces methodes generales menent ordinairement à des grands calculs, lorsque les conditions du probleme ne fournissent pas quelque adresse singuliere, j'ay projetté un moyen pour les abreger. Ce sont certaines Tables qu'on pourroit faire calculer en lettres et qui seroient aussi importantes en Algebre, que les Tables des Sinus et des logarithmes le sont dans le calcul ordinaire. De plus elles ne seroient pas difficiles à faire, car on y trouveroit bientost des progressions. Si ces tables estoieut faites, les operations d'Algebre s'y trouveroient pour la pluspart, et si on les joignoit aux methodes que j'ay, il resteroit peu à faire en cette matiere.

Si vous avés quelque beau probleme qui dépende a methodo tangentium inversa, je serois bien aise de voir, si j'en pourrois venir à bout. J'ay demonstré l'impossibilité du Triangle rectangle en nombres dont l'aire soit un quarré, autrement que Mr. Frenicle; et pour les racines irrationelles des equations, j'ay une voye demonstrative pour y arriver; mais la chose est plus difficile que l'on ne pense. J'en avois communiqué mes essais que vous avés veu à Paris, et les pensées que j'avois alors, à une personne tres ingenieuse*), qui y a fort travaillé depuis, et croyoit d'en estre venue à bout, mais je ne trouvay pas mon compte dans les lettres qu'elle m'en écrivit: ainsi j'en remets l'execution aux tables.

Il y a encor une espece de calcul qui m'arreste, mais aussi personne ne s'en est servi. Il seroit pourtant utile à certaines choses. En voicy un exemple. Soit $x^z + z^x$ égal à b, et $x^x + z^z$ égal à c. Or b et c estant données, on demande x et z. Prenons un exemple plus aisé. $x^x - x$ est égal à 24, on demande la valeur de x et l'on trouvera que c'est 3, car $3^3 - 3$ est $27 - 3$, c'est à dire 24. Voila donc une equation qui est nullius certi gradus cogniti, et dont le degré même est demandé. On pourroit bien décrire des lignes, dont l'intersection pourroit donner la solution de ces problemes, mais je demande une solution qui me donne la valeur de l'inconnue. Je vous supplie, Monsieur, d'y songer un peu, car vous voyés que ce sont des veritables problemes determinés, et il faut bien qu'il y ait une methode dans la nature pour les resoudre. Mais apres tous les progres que j'ay faits en ces matieres, je ne suis pas encor content de l'Algebre, en ce qu'elle ne donne ny les plus courtes voyes, ny les plus belles constructions de Geometrie. C'est pour quoy lorsqu'il s'agit de cela, je croy qu'il nous faut encor une autre analyse proprement geometrique lineaire, qui

*) In dem Entwurfe dieses Briefes nennt Leibniz den Namen, es ist Tschirnhaus.

nous exprime directement situm, comme l'Algebre exprime magnitudinem. Et je croy d'en avoir le moyen, et qu'on pourroit representer des figures et mesme des machines et mouvemens en caracteres, comme l'Algebre represente les nombres ou grandeurs; et je vous envoye un essay qui me paroist considerable*). Il n'y a personne qui en puisse mieux juger que vous, Monsieur, et vostre sentiment me tiendra lieu de celuy de beaucoup d'autres.

Je vous envoye aussi un peu de ce feu corporel, qu'on peut à bon droit appeller lumiere perpetuelle (car estant gardée comme il faut, elle dure plusieurs années sans se consumer). C'est une petite piece, mais belle, car on n'en fait pas tousjours de semblables, et ordinairement la matiere vient en petits grains seulement. Elle est enveloppée dans une vessie et celle-cy est mise dans la cire, à fin que rien n'exhale, et que la piece ne prenne pas feu par le mouvement et la friction comme cela arrive aisément. Un tel morceau peut suffire à quantité d'experiences, car la moindre particelle est capable de rendre les choses rayonnantes; et quand on la manie avec les mains, elles en restent luisantes plusieurs heures, et cependant il n'y a rien de visible dessus qui paroisse au jour. On peut écrire avec cela en lettres luisantes, et quelques heures apres, quand elles paroistront mortes, estant frottées derechef, elles se font voir de nouveau. Je tiens qu'il y a un veritable feu enfermé là dedans, mais pas assez ramassé pour se faire toucher: quand on souffle contre, la lumiere disparoist et revient incontinent aprés, ce qui est remarquable. Cependant j'ay veu que le seul vent a allumé un morceau de papier qui m'avoit servi à nettoyer les doigts, en vuidant le recipient, lorsque j'avois fait ce feu. On allume aisément la poudre à canon au soleil et par le mouvement, un peu de ce phosphore estant mêlé parmy. Il seroit bon de l'essayer dans le vuide. Au reste je me rapporte aux experiences, que j'avois mandées à Mr. le Duc de Cheuvreuse. Pour mieux conserver ce morceau il faut verser un peu d'eau dessus et au reste le tenir dans un petit verre bouché; sans cela il s'exhale à l'air. Dans l'eau il jettera des éclairs par intervalles, particulierement lorsqu'on la remue, ou lorsqu'on l'échauffe un peu en le touchant avec la main; mais estant sec et à l'air, il luit continuellement. Vous n'avés pas sujet de le ménager trop; car je vous en puis faire avoir d'autres, puisque j'en puis faire. Je vous supplie, Monsieur, d'en monstrer l'effect chez Mr. Colbert et Mr. le Duc de Cheuvreuse et à l'Academie. Si vous trouvés qu'on l'agrée, je suis prest à communiquer la composition à l'Academie, quoyqu'elle m'ait cousté beaucoup de peine.

---

*) Siehe die Beilage.

Je vous supplie, Monsieur, de me mander quelque chose de ce qui se passe de curieux chez vous. Mr. Brosseau, resident de mon Prince, demeurant à la rue des Rosiers derrière le petit S. Antoine, fera tenir la lettre. Vous aurés entendu parler de l'entreprise de Mr. Becher en Hollande, de tirer l'or du sable. Il y a des personnes qui en ont bonne opinion. Vous scavés que Mr. Hudde est un des commissaires. Mr. Becher dit qu'il traite aussi avec les François. Je serois bien aise de sçavoir si vous en avez ouy parler à Paris. Pour moy je doute du succes, car je croy de sçavoir à peu près en quoy consiste son experience. Il y a un vestige d'or: mais je ne sçay s'il y a de quoy gagner, car il pretend qu'il y aura plus en grand qu'en petit à proportion, ce qui est paradoxe. Je suis avec zèle etc.

Beilage.

J'ay trouvé quelques élémens d'une nouvelle caracteristique, tout à fait différente de l'Algebre, et qui aura des grands avantages pour representer à l'esprit axactement et au naturel, quoyque sans figures, tout ce qui depend de l'imagination. L'algebre n'est autre chose que la caracteristique des nombres indeterminés ou des grandeurs. Mais elle n'exprime pas directement la situation, les angles et le mouvement, d'où vient qu'il est souvent difficile de reduire dans un calcul ce qui est dans la figure, et qu'il est encor plus difficile de trouver des demonstrations et des constructions géometriques assez commodes, lors même que le calcul d'Algebre est tout fait. Mais cette nouvelle caracteristique suivant des figures de vue, ne peut manquer de donner en même temps la solution et la construction et la demonstration géometrique, le tout d'une maniere naturelle et par une analyse. C'est à dire par des voyes determinées. L'algebre est obligée de supposer les elemens de geometrie, au lieu que cette caracteristique pousse l'analyse jusqu'au bout. Si elle estoit achevée de la maniere que je la conçois, on pourroit faire en caracteres, qui ne seront que des lettres de l'Alphabet, la description d'une machine quelque composée qu'elle pourroit estre, ce qui donneroit moyen à l'esprit de la connoistre distinctement et facilement avec toutes les pieces et même avec leur usage et mouvement sans se servir de figures ny de modelles et sans gener l'imagination, et on ne laisseroit pas d'en avoir la figure présente dans l'esprit autantque l'on se voudroit faire l'interpretation des caracteres. On pourroit faire aussi par ce moyen des descriptions exactes des choses naturelles, comme par ex. des plantes et de la structure des animaux, et ceux qui n'ont pas la commodité de faire des figures, pourveu qu'ils ayent la chose

présente devant eux ou dans l'esprit, se pourront expliquer parfaitement et transmettre leur pensées ou experiences à la posterité, ce qui ne se sçauroit faire aujourd'huy, car les paroles de nos langues ne sont pas assés arrestées ny assés propres pour se bien expliquer sans figures. Mais c'est la moindre utilité de cette caracteristique, car s'il ne s'agit que de la description, il vaudra mieux, quand on en peut et veut faire la dépense, d'avoir les figures et mesme les modelles, ou plustost les originaux des choses. Mais l'utilité principale consiste dans les consequences et raisonnemens, qui se peuvent faire par les operations des caracteres, qui ne se sçauroient exprimer par des figures (et encor moins par des modelles) sans les trop multiplier, ou sans les brouiller par un trop grand nombre de points et de lignes, d'autant qu'on seroit obligé de faire une infinité de tentatives inutiles: au lieu que cette methode meneroit seurement et sans peine. Je croy qu'on pourroit manier par ce moyen la mécanique presque comme la geometrie, et qu'on pourroit mesme venir jusqu'à examiner les qualités des materiaux, parce que cela dépend ordinairement de certaines figures de leur parties sensibles. Enfin je n'espere pas qu'on puisse aller assez loin en physique, avant que d'avoir trouvé un tel abregé pour soulager l'imagination. Car nous voyons par exemple quelle suite de raisonnemens géométriques necessaire pour expliquer seulement l'arc en ciel, qui est un des plus simples effects de la nature, par où nous pouvons juger combien de consequences seroient nécessaires pour penetrer dans l'interieur des mixtes, dont la composition est si subtile que le microscope, qui en decouvre bien plus que la centmillieme partie, ne l'explique pas encor assés pour nous aider beaucoup. Cependant il y a quelque esperance d'y arriver en partie, quand cette analyse veritablement géométrique sera établie.

Mais comme je ne remarque pas que quelque autre ait jamais eu la même pensée, ce qui me fait craindre qu'elle ne se perde, si je n'ay pas le temps de l'achever; j'adjouteray ici un essay, qui me paroist considerable, et qui souffira au moins à rendre mon dessein plus croyable et plus aisé à concevoir, afin que, si quelque hazard en empeche la perfection à present, cecy serve de monument à la posterité, et donne lieu à quelque autre d'en venir à bout.

Or, il est constant qu'il n'y a rien de plus important dans la géométrie que la consideration des lieux: c'est pourquoy j'en exprimeray un des plus simples par cette maniere des caracteres. Les lettres de l'alphabet signifieront ordinairement les points des figures. Les premiéres lettres, comme A, B, exprimeront les points donnés; les dernieres, comme X, Y, les points demandés. Et au lieu qu'on se sert des égalités

ou equations dans l'algebre, je me sers icy des congruités que j'exprime par le caractere ȣ. Par ex. dans la premiere figure ABC ȣ DEF veut

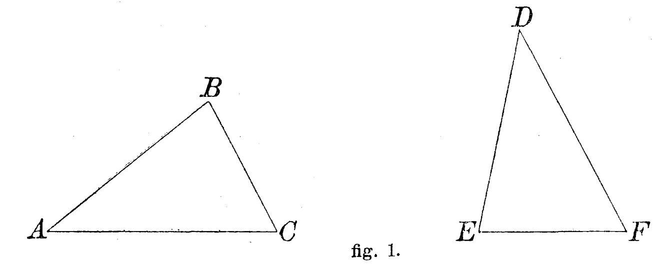


fig. 1.

dire qu'il y a de la congruité entre les deux triangles ABC et DEF suivant l'ordre des points, qu'ils peuvent occuper exactement la mesme place, et qu'on peut appliquer ou mettre l'un sur l'autre sans rien changer dans ces deux figures que la place. Ainsi en appliquant D sur A et E sur B et F sur C, les deux triangles (estant posés egaux et semblables) seront manifestement coincidents. Mais sans parler des triangles, on en peut dire autant en quelque façon des points, sçavoir ABC ȣ DEF dans la seconde figure, c'est à dire on pourra mettre en

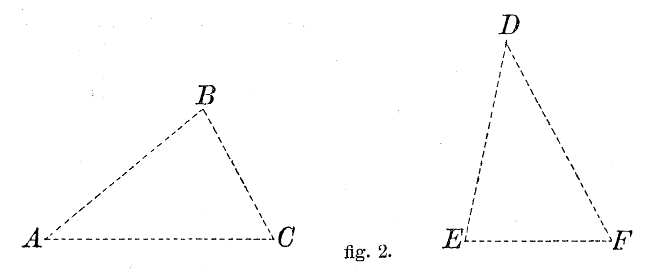


fig. 2.

mesme temps A sur D, et B sur E. et C sur F, sans que la situation des trois points ABC entre eux, ny des trois points DEF entre eux, soit changée, supposant les trois premiers joints par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes n'importe) et les trois autres de meme. Apres cette explication des caracteres, voicy les lieux:

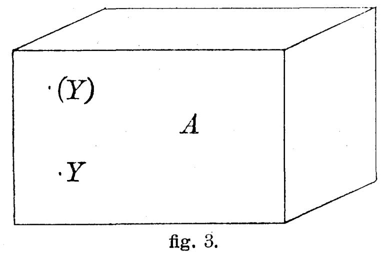


fig. 3.

Soit A ȣ Y, c'est à dire soit un point donné A. On demande lieu de tous les points Y ou (Y) etc. qui ont de la congruité avec le point A. Je dis que le lieu de tous les Y sera l'espace infini de tous cotés. Car tous les points du monde ont de la congruité entre eux, c'est à dire l'un se peut tousjours mettre à la place de l'autre. Or tous les points

du monde sont dans un même espace. On peut aussi exprimer ce lieu ainsi Y ȣ (Y). Tout cela est trop manifeste, mais il falloit commencer par le commencement.

Soit AY ȣ A(Y). Le lieu de tous les Y sera la surface de la sphere, dont le centre est A, et le rayon AY, tousjours le même en grandeur, ou égal à la donnée AB ou CB. C'est pourquoy on peut aussi exprimer le mesme lieu ainsy: AB ȣ AY ou CB ȣ AY.

fig. 4.

Soit AX ȣ BX; le lieu de tous les X sera le plan. Deux points A et B estant donnés, on demande un troisieme X, qui ait la mesme situation à l'égard du point A, qu'il a à l'égard du point B, [c'est à dire que AX soit égale ou (parceque toutes les droites egales sont congruentes) congruente à BX, ou que le point B se puisse appliquer au point A, gardant la mesme situation qu'il avoit à l'égard du point X] je dis que tous les points X, (X) d'un certain plan seul, continué à l'infini, satisferont à la question. Car comme AX ȣ BX, de mesme A(X) ȣ B(X). Mais il n'y en aura point qui satisfasse hors de ce plan. C'est pourquoy ce plan continué à l'infini sera le lieu commun de tous les points du monde, qui sont situés à l'égard de A, comme à l'égard de B. [Il s'ensuit que ce plan passera par le milieu de la droite AB, qui luy est perpendiculaire.]

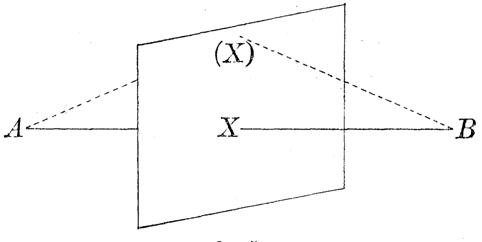


fig. 5.

Soit ABC ȣ ABY; le lieu de tous les Y sera la circulaire. C'est à dire, il y a trois points donnés A, B, C, on demande un quatrieme Y, qui a la meme situation que C à l'égard de A, B. Je dis qu'il y a une infinité de points qui peuvent satisfaire, et le lieu de tous ces points est la circulaire. Cette description ou definition de la ligne circulaire ne présuppose pas le plan (comme celle d'Euclide) ny même la droite. Cependant il est manifeste que son centre est D, au milieu entre A et B. On pourroit aussi dire ainsi: ABY ȣ AB(Y), car alors le lieu seroit un cercle,

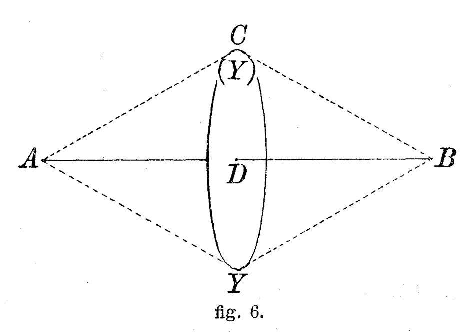


fig. 6.

mais qui ne seroit pas donné. C'est pourquoy il faut adjouter un point donné. L'on se peut imaginer que les points A, B demeurant fixes, et que le point C attaché à eux par quelques lignes inflexibles (droites ou courbes) et par consequent gardant la meme situation à leur égard, soit tourné à l'entour de A, B, pour decrire la circulaire CY(Y). On peut juger par là que la situation d'un point à l'égard d'un autre peut estre conçue sans exprimer la ligne droite, pourveu on les conçoive joints par quelque ligne que ce soit. Et si la ligne est posée inflexible, la situation des deux points entre eux sera immutable. Et deux points peuvent estre conçus avoir la mesme situation entre eux que deux autres points, si les uns peuvent estre joints par une ligne qui puisse estre congrue avec la ligne qui joint les autres. Je dis cecy, à fin qu'on voye que ce que j'ay dit jusqu'icy ne depend pas encor de la ligne droite (dont je vay donner la definition), et qu'il y a difference entre A, C, situation de A et C entre eux, et la droite AC.

Soit AY ♉ BY ♉ CY; le lieu de tous les Y sera la droite. C'est à dire, trois points estant donnés, on demande un point Y, qui a la meme situation à l'égard de A, qu'il a à l'égard de B, et qu'il a à l'égard de C. Je dis que tous ces points tomberont dans la droite infinie Y(Y). Si tout estoit dans un même plan, deux points donnés suffiroient pour determiner ainsi la droite.

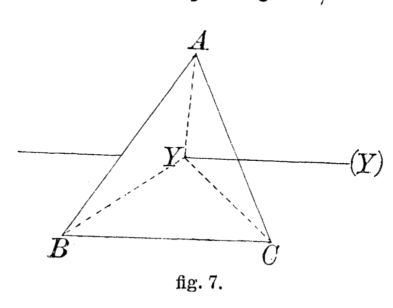


fig. 7.

Soit enfin AY ♉ BY ♉ CY ♉ DY; le lieu sera un seul point; car on demande un point Y, qui ait la mesme situation à l'égard de quatre points donnés A, B, C, D, c'est à dire que les droites AY, BY, CY, DY soient égales entre elles, et il n'y a qu'un seul qui puisse satisfaire.

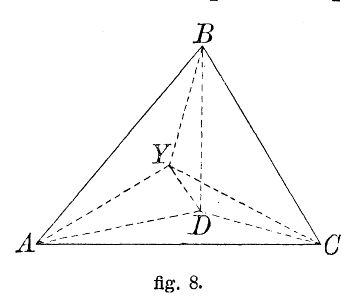


fig. 8.

Ces mesmes lieux se peuvent exprimer en plusieurs autres façons, mais celles-cy sont des plus simples et des plus fécondes et peuvent passer pour des definitions. Et pour faire voir que ces expressions servent au raisonnement, je monstreray par les caracteres, avant que de finir, ce qui est produit par l'intersection de ces lieux. Premiérement: l'intersection de deux surfaces spheriques est une ligne circulaire. Car l'expression d'une spherique est AC ♉ AY, et celle d'un plan est AY ♉ BY, et par consequent AC ♉ BC, parce que le point

C est un des points Y. Or BC estant ȣ AC, et AC ȣ AY, nous aurons BC ȣ AY, et AY estant ȣ BY, nous aurons BC ȣ BY. Joignons ces congruités, et nous aurons ABC ȣ ABY, c'est à dire AB ȣ AB, BC ȣ BY, AC ȣ AY. Or ABC ȣ ABY est à la circulaire, donc l'intersection d'un plan et d'une surface spherique donne la circulaire. Ce qu'il falloit demonstrer par cette sorte de calcul. — De la même façon il paroit que *l'intersection de deux plans est une droite*. Car soyent deux congruités, l'une AY ȣ BY pour un plan, l'autre AY ȣ CY pour l'autre plan, nous aurons AY ȣ BY ȣ CY, dont le lieu est la droite. Enfin *l'intersection de deux droites est un point*. Car soit AY ȣ BY ȣ CY et BY ȣ CY ȣ DY, nous aurons AY ȣ BY ȣ CY ȣ DY.

Je n'ay qu'une remarque à adjouter, c'est que je vois qu'il est possible d'étendre la caracteristique jusqu'aux choses, qui ne sont pas sujettes à l'imagination; mais cela est trop important et va loin pour que je me puisse expliquer là-dessus en peu de paroles.

V.

Leibniz an Huygens.

A Hannovre ce $\frac{10}{20}$ Octobre 1679.

J'espere que vous aurés receu la lettre que je vous ay écrite, il y a quelques semaines, avec une petite piece assés considerable du vray phosphore, ou de cette lumiere materielle et constante, dont j'avois écrit autresfois à Mr. de la Rocque, auteur du Journal. Maintenant Mr. Tschirnhaus que vous connoissés, ayant passé par icy et m'ayant raconté que vous ne vous portés pas trop bien, je vous ay voulu témoigner par celle-cy, que j'y prends beaucoup de part, et que je considere vostre santé comme une chose qui doit estre pretieuse au public. J'ose même vous conjurer de la ménager un peu plus que vous n'avés coustume de faire. Vous avés déja acquis tant de gloire que vous vous pouvés reposer un peu, et si vous donniés quelques unes de vos belles pensées et découvertes toutes pures, quoyque dénuées de ce bel appareil de demonstrations formelles, mais qui gênent trop, et qui font perdre trop de temps à une personne comme vous estes, je croy que la posterité ne vous seroit que trop obligée.

Je reviens à Mr. Tschirnhaus, avec qui j'ay parlé quelques jours durant des matieres dont je n'avois parlé à personne pendant que je suis icy. Il a fait quantité de belles tentatives pour arriver aux racines des equations, et comme nous avions disputé là dessus par lettres, car les siennes ne me satisfaisoient point, nous avons conferé sur ce sujet, et enfin il s'est trouvé que j'avois eu raison de ne me pas rendre: aussi s'y veut il prendre à present d'un autre biais, dont j'attends qu'il me mande le succès, car j'espere beaucoup de son genie. Pour moy je tiens cette matiere pour faite par ma methode, mais il faut un calcul que j'aurois entrepris, si je ne voyois moyen de l'abreger infiniment par quelques Tables, que j'ay conçues et qui à mon avis ne seront pas moins importantes en Algebre, que les Tables des Sinus dans la Geometrie practique.

Je vous ay aussi envoyé dans ma precedente un essay d'une nouvelle caracteristique en Geometrie, dont je serois bien aise d'avoir vostre sentiment. C'est une ouverture qui nous doit mener aussi loin dans son espece, que l'Algebre dans la sienne. Elle a des grands avantages sur l'Algebre, qui a besoin de grands detours pour parvenir à des demonstrations et constructions geometriques, au lieu que cette methode suit les figures de vue, qu'elle soulage l'imagination, et qu'on pourra faire par là une exacte déscription d'une machine ou autre chose imaginable, quelque composée qu'elle puisse estre, sans employer des figures ny des paroles, et cependant il sera aisé à celuy qui entendra ces caracteres de tracer la figure apres eux. Mais le plus important usage qu'on en pourra faire, c'est d'aider le raisonnement. Car on trouve ainsi par une espece de calcul tout ce que la Geometrie enseigne jusqu'aux elemens d'une maniere analytique et determinée. Car l'Algebre qui suppose les elemens ne pousse pas l'analyse à bout, comme fait cette nouvelle caracteristique, par laquelle je demonstre par exemple que l'intersection de deux surfaces spheriques est un cercle et choses semblables, sans employer l'imagination.

Pour ce qui est du phosphore, qui luit de soy-même, et qui jette des éclats, je vous en envoyeray la composition, si vous ne l'avés pas encor dans vostre Academie. Car je l'ay fait moy-même et j'en puis répondre. Je croy qu'il y a des gens qui demandent beaucoup pour le vous communiquer, mais je ne demande rien, pourveu que l'Academie Royale veuille tenir la chose secrete, et que cela puisse servir à faciliter ce que j'ay quelque raison d'esperer un jour. Car sans parler de quelques decouvertes mathematiques de mon cru (particulierement de ma quadrature dont j'ay achevé la demonstration dans les formes, avec quantité d'autres propositions considerables y comprises, et qui pourroit

estre adoptée de l'Academie) je suis peut-estre en estat de vous envoyer de temps en temps ce qui se passe de plus considerable dans les sciences en Allemagne, et que vous n'apprendrez autrement que trop tard ou point. Et une correspondence reglée me pourra peut-estre faire considerer en quelque façon comme appartenant à vostre Academie, quoyque je ne puisse pas estre present. J'ay quelques autres experiences considerables dont je pretends vous regaler un jour. Cependant je vous supplie, Monsieur, de concerter cette affaire avec Mr. l'Abbé Gallois, à qui j'en ay écrit autres fois. Vous m'avés déja témoigné tant de bonté, et vous avés tant fait pour moy, que j'ose encor esperer cette faveur. Je souhaiterois un mot de réponse que Mr. Brosseau resident d'Hannover, demeurant dans la rue des Rosiers, derriere le petit S. Antoine, me fera tenir. Je suis avec zele etc.

VI.

Huygens an Leibniz.

J'ay*) examiné attentivement ce que vous me mandez touchant vostre nouvelle Characteristique, mais pour vous l'avouer franchement, je ne concois pas par ce que vous m'en estalez, que vous y puissiez fonder de si grandes esperances. Car vos exemples des Lieux ne regardent que des veritez qui nous estoient desia fort connues, et la proposition de ce que l'intersection d'un plan et d'une surface spherique fait la circonference d'un cercle, s'y conclud assez obscurement. Enfin je ne vois point de quel biais vous pourriez appliquer vostre characteristique à toutes ces choses differentes qu'il semble que vous y vouliez reduire, comme les quadratures, l'invention des courbes par la proprieté des tangentes, les racines irrationelles des Equations, les problemes de Diophante, les plus courtes et plus belles constructions des problemes geometriques. Et ce qui me paroit encore le plus etrange, l'invention et l'explication des machines. Je vous le dis ingenuement, ce ne sont là à mon avis que de beaux souhaits, et il me faudroit

*) Von diesem Brief fehlt der Anfang, denn das Vorhandene hat weder die gewöhnliche Aufschrift noch ein Datum. Aus dem Inhalt ergiebt sich indeß, daß dieses ein Bruchstück des Schreibens vom 22. November sein muß, von dem Leibniz im folgenden Briefe spricht.

d'autres preuves pour croire qu'il y eust de la realité dans ce que vous avancez. Je n'ay pourtant garde de dire que vous vous abusiez, connaissant d'ailleurs la subtilité et profondeur de vostre esprit. Je vous prie seulement que la grandeur des choses que vous cherchez ne vous fasse point differer de nous donner celles que vous avez desia trouvées, comme est cette Quadrature Arithmetique, et ce que vous avez decouvert pour les racines des equations au dela du cube, si vous en estes content vous mesmes. Pour celle que vous proposez d'une espece nouvelle, sçavoir $x^x - x \infty 24$, elle est determinée en nombres entiers, mais autrement de nature elle ne paroit pas l'estre, car il y a des exposants qui sont des fractions, comme l'on peut entendre par les logarithmes, et ainsi vostre nombre pourroit aussi estre quelque fraction ou irrationel qui satisfist aussi bien que 3 à la dite equation. J'ay beaucoup travaillé tout esté dernier à mes refractions, sur tout en ce qui regarde le Cristal d'Islande, qui a des phenomenes si etranges que je n'ay encore sceu penetrer les raisons de tous. Mais ce que j'en ay trouvé confirme grandement ma theorie de la lumiere et des refractions ordinaires. Dans celles-cy j'ay donné entre autres choses la construction de ce probleme proposé par Mr. des Cartes. Estant donné la figure d'un costé d'un verre, trouver la figure de l'autre costé pour faire ensemble le parfait assemblage des rayons paralleles ou qui regardent un point donné, et mesme plus universellement, car il veut que la donnée soit spherique ou de section de cone. Je tascheray de faire imprimer ce traité de cet hyver, si ma santé me le permet. Je voudrois pouvoir suivre vostre conseil de donner quelques unes de mes meditations en abbregé et sans la formalité des demonstrations, mais j'ay de la peine à m'y resoudre, ne pretendant pas qu'on me croie sur ma bonne foy dans les choses de cette nature. Je n'ay rien de nouveau presentement qu'une invention de niveau qui est fort commode et qui se rectifie et verifie d'une seule station, de sorte qu'à chaque observation on peut s'assurer d'avoir bien operé, ce qui n'est pas ainsi dans tous ceux qu'on a trouvè jusqu'icy, du moins avec des lunettes d'approche, comme est le mien dont je parle. J'en ferray mettre la description dans le Journal et vous en feray part à la premiere occasion. Je vous prie cependant de croire que je suis veritablement et d'affection etc.

VII.

Leibniz an Huygens.

J'ay esté bien aise d'apprendre par celle que vous m'avés fait l'honneur d'écrire du 22 de Novembre, que le petit morceau du phosphore vous a esté rendu; mais bien plus, qu'il me semble d'y pouvoir remarquer que vostre indisposition est passée ou deminuée, ce que je souhaite de tout mon coeur. Il est vray que le phosphore cesse de luire enfin quand il n'a point d'air nouveau, cela me confirme dans mon opinion, dont je croy d'avoir parlé dans ma premiere, que c'est un veritable feu, assez fort pour estre veu, mais non pas assez pour se faire sentir à l'attouchement. Or le feu a besoin d'air nouveau. Il me paroist encor remarquable qu'il cesse de luire, quand on souffle contre, car lorsqu'on chasse l'air en soufflant, ce mouvement trop rapide de l'air empeche le phosphore d'en profiter.

Pour allumer la poudre à canon, il ne faut que prendre un morceau, comme la teste d'une épingle, ou beaucoup moindre, et ayant de la poudre menüe, concassée ou brisée un peu, y mêler le petit morceau et le broyer avec la poudre, en se servant par l'exemple du plat d'un cousteau, avec lequel on le pressera contre la poudre sur une table, et la poudre s'allumera bientost. On pourra écrire avec ce phosphore des lettres de feu sur du papier et on allumera ce papier en continuant de frotter. Ces deux experiences sont les plus commodes, car on les peut faire sans consumer le phosphore. De fait en enfermant ce morceau, que je vous envoye à present, j'ay tracé des lettres lumineuses sur le papier, tout comme on écrit avec de la craye ou du charbon, et je les ay pu lire tres clairement en cachant le papier au jour. Mais dans un lieu obscur elles paroissent et brillent merveilleusement avec quelque espece de mouvement.

Si le papier s'en allume, la poudre s'allumera à plus forte raison.*) Je m'étonne que le premier a mangé la vessie et donné quelque atteinte au papier, non obstant la cire, qui l'entourait. Maintenant j'ay couvert celuy-cy avec sa vessie de cire d'espagne. Je le vous envoye afin que vous ayés moins sujet de la ménager.

*) Il ne faut pas continuer de frotter avec le morceau pour allumer le papier, car le morceau tout entier s'en pourroit allumer et seroit inextinguible. Mais le papier estant imbû d'un trait repeté bien fort, on peut allumer le papier en frottant avec le doigt ou plustost contre luy-même ou contre quelqu'autre chose, qui en est imbue aussi.

Les essais que Mr. Becher a publiés ne prouvent pas la realité de sa proposition, à moins qu'il fasse voir qu'on peut reiterer la même operation jusqu'à 50 fois avec le même argent. Car autrement tout l'argent de l'Europe devroit passer par son fourneau, avant qu'il pourroit gagner la million promise par an.

Je puis demonstrer que ce que j'ay avancè suit de ma caracteristique lineaire ou geometrique dont je vous ay envoyé un essay. Car premierement je puis exprimer parfaitement par ce calcul toute la nature ou definition de la figure (ce que l'Algebre ne fait jamais, car disant que $x^2 + y^2$ aeq. a^2 est l'equation du cercle, il faut expliquer par la figure ce que c'est que ce x et y, c'est à dire que ce sont des lignes droites, dont l'une est perpendiculaire à l'autre et l'une commence par le centre, l'autre par la circonference de la figure). Et je le puis en toutes les figures, puisqu'elles se peuvent expliquer toutes par des spheriques, plans, circulaires et droites, dans lesquelles je l'ay fait. Car les points des autres courbes se peuvent trouver par des droites et cercles. Or toutes les machines ne sont que certaines figures, dont je les puis décrire par ces caracteres, et je puis expliquer le changement de situation qui s'y peut faire, c'est à dire leur mouvement. Secondement, lorsqu'on peut exprimer parfaitement la definition de quelque chose, on peut aussi trouver toutes ses proprietés. Cette caracteristique servira beaucoup à trouver de belles constructions, parceque le calcul et la construction s'y trouvent tout à la fois; mais je ne dis pas qu'on puisse encor trouver par là les plus belles absolument. J'avoue cependant que ces raissonemens ne touchent point et qu'on a meilleure grace de faire ces choses que de prouver qu'elles sont faisables.

Les racines irrationelles et la methode de Diophante n'ont rien de commun avec cette caracteristique de la situation, aussi n'est ce pas par là que j'y pretends. L'analyse qui sert pour les problemes semblables à ceux de Diophante, est une affaire faite, et je suis satisfait de la methode en general, quoyque je ne me sois pas encore amusé à chercher des abregés particuliers, lesquels, aussi bien que les racines irrationelles generales des equations superieures demandent quelques tables, que j'ay projettées, pour eviter un calcul qui seroit trop prolixe, même dans le cinquieme degré. Les mêmes tables serviront pour toute l'Algebre. Les quadratures et les figures, dont les proprietés des tangentes sont données, demandent une maniere de calcul tout particuliere, dont j'ay des essais curieux; et j'ay trouvé par là une regle pour les tangentes ex data figura, qui passe infiniment les methodes connues. Soit une equation quelconque exprimant la relation des ordonnées

y aux abscisses x, par exemple $\sqrt[2]{(x^2 + by^2)} + \sqrt[3]{(xy^2 + c^3)}$ + etc. aeq. $\sqrt[4]{(dx^4 + cx^2y^2)} + \sqrt[5]{(f^2y^2 + g^2y^3)}$ etc. ou quelqu'autre embarassée comme l'on voudra, je puis trouver les touchantes, sans oster les irrationelles ny fractions (s'il y en a qui enferment x ou y) de l'equation. Car on ne les sçauroit, sans enfler infiniment le calcul. Cet abregé estant si utile et presque necessaire dans les grands calculs, je le communiqueray quand il vous plaira. Je puis demonstrer que cette equation $x^x - x$ aequ. 24 est determinée, c'est à dire qu'elle a un nombre fini de racines.

Ma quadrature arithmetique est mise au net et demonstrée; je l'ay gardée pour l'Academie Royale, en cas qu'on puisse faire que l'auteur ait quelque relation avec elle, et qu'on juge alors ce traité digne d'estre mis parmy d'autres bien plus importants qu'ils donnent.

Son Altesse Serenissime mon maistre estant allée en Italie, j'auray un peu plus de loisir cette année, et je pretends d'achever ma machine arithmetique. Je souhaite fort de voir vostre Dioptrique, où il y aura des choses importantes sans doute. Je voudrois sçavoir ce que vous jugés du raisonnement de Mr. des Cartes pour la regle des refractions et de celuy de Mr. Fermat, qui conclut la même chose par une supposition opposée. La lettre de Mr. Fermat est la 51e dans le 3e tome de celles de Mr. des Cartes Je ne suis pas satisfait de l'une ny de l'autre. Item si vous croyés que l'irregularité des refractions, par exemple celle que M. Newton a remarquée, doit nuire considerablement aux lunettes.

Je seray bien aise de voir vostre niveau. J'ay dessein de faire en sorte qu'on employe des moulins à vent aux mines du Harz, qui appartiennent à mon maistre, pour en puiser l'eau souterraine, qui empeche les travailleurs, et qui s'en tire ordinairement par des moulins, que l'eau venant de quelques ruisseaux et grands reservoirs fait agir. Mais l'eau manque souvent dans un temps sec, la profondeur, dont il faut tirer l'eau sousterraine, est quelque fois jusqu'à 100 toises et plus. Je souhaite vostre avis là dessus, et je suis avec zele etc.

P. S. J'ay marqué dans un papier à part ce que je croy bon d'observer chez M. Colbert, puisque vous avés la bonté, Monsieur, de vous y interesser pour moy.*)

---

*) Das P. S., welches Uylenbroek (Christ. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum exercitationes math. Fascicul. II. p. 13 seq.) als zu diesem Briefe gehörig angiebt, ist nicht das richtige, wie sich aus dem Briefe Huygens' vom 11. Jan. 1680 (namentlich aus den Worten: sous nom inconnu) ergiebt, sondern vielmehr folgendes:

P. S. Pour mieux reuissir chez M. C. je croy qu'il seroit bon de dire qu'un Allemand curieux a envoyé ce phosphore, et qu'il en veut donner la composition,

VIII.

Leibniz an Huygens.

A Hannover ce $\frac{1}{10}$ Decembre 1679.

Vous aurés receu ma derniere avec un autre morceau du phosphore. Cependant ayant songé à la maniere la plus commode et la plus seure d'allumer la poudre à canon avec le phosphore, je me suis avisé de celle-cy. Prenés un petit baton qui ait quelque largeur au bout: frottés le bien avec le phosphore, et ayant mis de la poudre menüe, concassée sur une table, remués et broyés la avec ce bout du baston, en la pressant contre la table, et la poudre s'allumera bientost. Je viens de le faire. Ainsi vous épargnerés le phosphore, vous ne le mettrés pas en danger de s'allumer et vous allumerés seurement la poudre.

Pour ce que j'ay remarqué dans un billet separé mis dans la derniere lettre, vous en userés comme il vous plaira. J'ay cru qu'une solicitation nouvelle seroit plus agreable qu'une vieille, et qu'on pourroit mieux sonder l'intention de cette maniere, d'autant que les grands ne s'amusent gueres à demander les noms des personnes. Si on se peut passer de dire le nom, en parlant en termes generaux, il seroit bon de le faire: mais s'il y a de la difficulté là dessus, il faut plus-tost le dire ouvertement, en cas qu'on le demande. Ayez la bonté, Monsieur, de ne pas temoigner ce petit avis à quelqu'autre. La confiance que j'ay en vostre bienveillance fait que je me suis hazardé de toucher cecy.

Si vous apprenés quelque chose d'utile et servant aux manufac-

---

qu'il est versé en physique et mathematiques, qu'il offre sa correspondence pour communiquer de temps en temps des nouvelles decouvertes d'Allemagne et ayant beaucoup des connoissances pour apprendre qu'il peut même donner quelque chose de considerable du sien. Qu'il seroit peut estre à propos qu'il fût en quelque façon à l'Academie avec charge de correspondance, et des appointemens en qualité de membre.

Pour le nom il sera bon de ne pas dire sans necessité, ou même l'appeller Gottfredus Wilhelmi qui est aussi le veritable sans le nommer Leibniz. Car M. C. ayant eu souvent les oreilles battues de ce nom dans un temps qui n'y estoit pas propre, en sera rebuté s'il s'en souvient. Car les grands ayant une fois fait des difficultés sur une chose, ne se rendent pas aisement, et on reuissit mieux en la proposant comme toute nouvelle. Si M. le Duc de Cheuvreuse et M. l'Abbé Gallois y prennent, il seroit bon aussi de les en avertir, à fin qu'ils ne donnent pas d'abord connoistre à M. C. qu'on renouvelle une vieille solicitation.

tures, je vous supplie de m'en faire part; par exemple, je desire de sçavoir la composition du cuir impenetrable de Mr. Lancker, item de la manufacture de l'étain, dit Royal, dont on m'a écrit comme d'une belle chose. Je ne scay si je vous ay mandé qu'un ouvrier allemand a trouvé moyen de faire le fer rouge en le battant seulement d'une certaine maniere. Je tacheray d'en apprendre les particularités.

Je ne scay si vous avés appris que cette Moxa, qui a fait tant de bruit en Hollande, n'est pas une drogue qui vienne des Indes, mais qu'elle se fait de quelques plantes d'Europe. Je voudrois sçavoir aussi si vous avés leu avec attention le livre de feu Mr. Spinosa. Il me semble que ses demonstrations pretendues ne sont pas des plus exactes, par exemple lorsqu'il dit que Dieu seul est une substance et que les autres choses sont des modes de la nature divine. Il me semble qu'il n'explique pas ce que c'est que substance. Je suis avec zele etc.

IX.

Huygens an Leibniz.

A Paris ce 11 Jan. 1680.

Depuis ma derniere j'ay esté malade tout de bon l'espace d'un mois entier, qu'il a falu garder la chambre. Monsieur Galois pendant ce temps m'estant venu voir, je luy recommanday vos affaires, et je le trouvay de luy mesme fort disposé à vous procurer du bien, m'assurant qu'il n'obmettroit point d'occasion pour cela et qu'il avoit mesme conceu quelque moyen pour l'effectuer. Je n'avois pas encore receu alors vostre penultime, où estoit le second morceau de vostre composition, de sorte que je ne luy ay pas proposé l'expedient au quel vous aviez pensé de solliciter vostre affaire sous un nom inconnu. Mais je ne suis pas aussi d'avis d'en parler, parce que je sçay fort bien le meschant effect que cela feroit aupres du patron s'il venoit par apres à le connoistre.

Je vous rends graces de la recrue du phosphore, et des nouvelles instructions. Mais j'ay à vous dire que je les ay pratiquées en vain, car ni la poudre à canon ni deux papiers frottez l'un contre l'autre apres les avoir imbus de cette composition, n'ont jamais voulu s'allumer, quelque frotement que j'aye appris. Je n'ay rien produit que bien de

la fumeur et de l'odeur assez mal agreable au nez. Cela fait que je m'estonne de ce que vous me mandez d'avoir bien reussi à cette experience, et il faut qu'en chemin la vertu de la drogue ait diminué, car assurement la poudre que j'ay emploiée estoit bonne, fine et seche.

Pour ce qui est des effects de vostre characteristique, je vois que vous persistez à en estre persuadé, mais, comme vous dites vous mesme, les exemples toucheroient plus que les raisonnements. C'est pourquoy je vous en demande des plus simples, mais propres à convainere mon incredulité, car celuy des lieux, je l'avoue, ne me paroit pas de cette sorte. Ce que vous promettez des tangentes sur des equations embarrassées de racines me paroit beau, mais voions aussi de cela s'il vous plait un petit exemple, où marquez seulement l'equation de la courbe et le dernier resultat du calcul qui donne la construction de la tangente. Touchant ce que vous me demandez à l'egard du raisonnement Mr. des Cartes, où il explique les refractions, je vous diray que je n'en ay jamais esté satisfait, par plusieurs raisons trop longues à mettre icy. Mr. Fermat pour prouver la mesme regle qu'avoit donnée des Cartes, suppose que le rayon de lumiere doit emploier le moins de temps qu'il est possible, et de plus que ce rayon chemine plus lentement dans le verre ou l'eau que dans l'air. Mais moy, je ne suppose que ce dernier et delà je demontre la mesme regle des refractions, et aussi cette proprieté que le rayon emploie le moindre temps. L'irregularité que Mr. Newton a remarqué aux refractions nuit plus aux lunettes à mon avis que le defaut qui accompagne les verres spheriques à cause de la figure.

Pour les moulins à vent que vous avez en vue d'emploier pour vuider l'eau des mines, je crois que cela est pratiquable, et que la chaisne avec des seaux est le meilleur moyen. Mais la profondeur de 100 toises est bien grande et c'est à vous à examiner si la richesse des mines peut recompenser les fraix de ces machines qui comme vous sçavez coustent beaucoup. Je me souviens qu'un Seigneur Escossais m'a dit autrefois qu'avec de chaines comme cela il vuidoit l'eau de ses mines de charbon, qui n'avoient pas moins de profondeur que celles dont vous parlez. Il me semble pourtant qu'il n'y emploioit que des chevaux, ce qui devoit aller bien lentement. La description de mon niveau sera mise dans le Journal qui suivra celuy de lundy prochain, et je vous l'envoieray dez qu'elle sera imprimée. Je vous souhaite une heureuse année et demeure etc.

X.

Leibniz an Huygens.

à Hannover ce 26 de Janvier 1680.

Voicy un exemple de ma methode des Touchantes.*) J'ay pris le premier qui me paraissoit egalement curieux et embarassé d'irrationelles; et vous jugerez bien que je ne l'ay pas accommodé à ma methode, et que j'en aurois pu faire autant avec quelque autre.

J'ay allumé tant de fois et du papier et de la poudre avec mon phosphore, que je ne scaurois deviner pourquoy vous n'y avés pas reussi. Si melant un petit morceau de phosphore parmy de la poudre et les agitant ou broyant ensemble, il ne vous arrive pas d'y mettre le feu, je suis au bout de mon latin.

Pour donner un essay de ma caracteristique, j'avois choisi les lieux, parceque tout le reste je determine par leurs intersections, et parceque la generation de tous les autres lieux depend des plus simples que j'ay donnés. Ainsi je croy d'avoir jetté les veritables fondemens.

Je suis bien aise que vostre jugement touchant la demonstation pretendue des loix de refraction donnée par Descartes, s'accorde avec le mien. Mr. Fermat a accommodé à la refraction la methode, dont Heron, Ptolemée et quelques autres anciens s'étaient servis pour demonstrer la regle de la reflexion, avec cette difference que les anciens n'avoient besoin que de chercher le moindre rayon, puisqu'il n'y a qu'un milieu, et par consequent, il n'y a que la longueur du chemin, qui vienne en considération, mais lorsqu'il y a deux milieux, il se faut servir de la raison composée du chemin et de la resistence du milieu, ce que Mr. Fermat a tres bien fait, se servant de cette supposition, que le rayon arrive d'un point à un autre par la voye la plus aisée. Cependant il faut avouer que cette supposition ne sçauroit passer pour un axiome, mais seulement pour une hypothèse. Et je voy bien que vous en faites le même jugement.

Je vous remercie, Monsieur, de ce que vous me mandez touchant les mines de charbon, où l'on s'est servi des chaines à seaux jusqu'à la profondeur de 100 toises. Je croy que cela reussiroit bien aussi au Harz, s'il n'y avoit un inconvenient, qui est la corrosivité des eaux

*) Folgt als Beilage zu diesem Briefe.

qu'on est contreint de tirer de nos mines qui mange bientost le fer. C'est pourquoy on s'y sert d'un vingtaine de pompes les unes sur les autres; ces pompes jouent par le moyen de moulins à eau; et mon dessein n'estant que d'essayer, si au défaut de l'eau dans un temps sec ou autrement, on pourroit y employer le vent, ménageant l'eau dans les grands reservoirs faits pour cet effect, je n'ay qu'à employer les mêmes pompes déja faites. Mais le vent allant fort inégalement, et agissant quelques fois avec une violence qui pourroit endommager les machines, il s'agit d'y remedier et de faire de l'application d'une maniere simple, commode et durable. J'ay pensé de faire ensorte que les ailes du moulin se tournent un peu et s'inclinent, quand le vent devient trop fort, sans que pour cela la croix, qui porte les ailes, change de place. Mais je souhaite d'en avoir vostre avis.

J'ay bien du déplaisir de ce que vous me mandés d'avoir esté malade tout de bon depuis quelques semaines. Il nous importe beaucoup que vous vous ménagiés un peu mieux que vous n'avés coustume de faire et que vous ne songiés presque doresnavant à d'autre étude, qu'à celle de vostre conservation.

Je vous suis obligé de ce que vous avés parlé avec Mr. l'Abbé Gallois. Ce que j'avois mandé, n'estoit pas pour deguiser, mais pour n'estre pas rebuté d'abord en reprenant une vieille sollicitation. Mais je vous supplie, Monsieur, de dechirer le billet que je vous avois envoyé, parce que je connois par là qu'il pourroit estre mal interpreté.

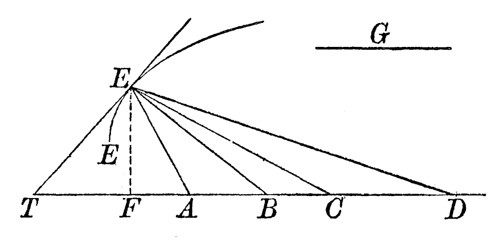
J'ay fait une grande perte par la mort de feu mon maistre, qui estoit sans doute un des plus grands hommes que j'aye connu, sans parler de sa qualité de Prince. Mais Monsieur le Duc d'Osnabrug son frere prenant les rénes du gouvernement, et ayant deja donné à connoistre que la vertu et la generosité sont en quelque façon hereditaires dans la maison, nous avons tout sujet de nous consoler en quelque façon d'une perte, qui ne se pourroit mieux reparer que par un tel successeur. Cependant ces changements de la cour auxquels on est sujet, m'obligent de songer quelques fois à des ressources, qui en sont independantes, en quoy vous m'avés déja assez favorisé. Je suis avec zele etc.

Beilage.

Specimen utilitatis Methodi novae Tangentium sive de maximis et minimis.

Sit curva EE talis naturae, ut datis in recta AD velut axe quatuor punctis constantibus A, B, C, D, et puncto curvae E, ac junctis quatuor rectis AE, BE, CE, DE, tunc summa quatuor solidorum sub

ternis quibuslibet rectis praedictis aequetur solido ex omnibus quatuor invicem ductis et datae rectae G applicatis facto. His positis ex puncto dato E tangens ET axi occurrens in T ita educetur: ex E demittatur in axem perpendicularis EF, ponamus autem (facilitatis causa, ne signa mutare necesse sit) punctum F cadere inter A et T.*)



Constructio: Exhibeantur rectae octo quarum	Prima	Secunda	Tertia	Quarta	Quinta	Sexta	Septima	Octava			
	sit ad EF in ratione triplicata G ad DE	sit ad EF in rat. tripl. G ad CE	. . . . . . BE	. . . . . AE	. DF . . . DE	. CF . . . CE	. BF . . . BE	. AF . . . BE	TF erit ad EF	ut	summa quatuor harum rectarum priorum ad summam quatuor posteriorum.

Hanc solutionem paucis calculi lineis invenio, per methodos autem publicatas, quippe quibus irrationales tolli opus est, credo vix aliquot diebus inventum iri, et fortasse ne vix quidem. Tollendo enim irrationales assurgetur ad altissimos gradus, quod non sine taedio fieri potest; et tamen postea cum valores aut constructiones quaerimus, cogemur aequationis inutiliter exaltatae iterum depressiones investigare, qui labor in aequationibus decimum longe gradum excedentibus, qualis ista foret, saepe immensus est.

XI.

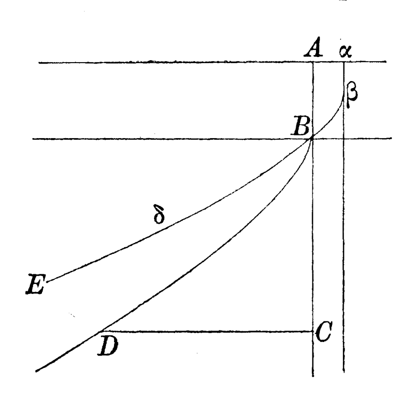
Leibniz an Huygens.

Janvier 1688.

Je ne m'attendois pas à voir mon probleme honnoré de vostre solution. C'est à vous et à vos semblables, dont le nombre est tres petit, d'estre plustost juges de ce que font les autres. On sçait assez que ces problemes ne vous arrestent pas. Il est inutile de dire, que vostre solution s'accorde extactement avec la mienne. Mon dessein avoit esté de tailler un peu de besoigne à ces bons Cartesiens qui pour avoir leu les Elemens de Bartholin ou du P. Malebranche croyent de pouvoir tout faire en Analyse. Cependant M. l'Abbé Catelan doit estre

*) Notandum tamen si punctum F cadat inter A et D, mutanda nonnihil esse signa, et pro summis adhibendas differentias certo modo sumtas.

bien aise d'estre degagé, il auroit peut estre souvent mordu les ongles inutilement. Il est vray que vostre solution est encor un peu enigmatique en ce qui regarde ces autres lignes isochrones moins principales, que vostre figure dans les Nouvelles de la republique des lettres mois d'octobre 1687 appelle BE, BF, BG. C'est pourquoy vous jugerés, Monsieur, si j'ay rencontré vostre sentiment. Voicy ce que j'en pense. Soit une de ces moins principales $\beta B \delta E$ passant par B sommet de la principale BD. Soit $\alpha\beta$ egale à $\frac{4}{9}$ du parametre de $\delta\beta$, et soit $A\alpha$ une droite horizontale et AB, $\alpha\beta$ perpendiculaires chacune touchant sa courbe au sommet. Or nous sçavons que le poids tombant de la hauteur ou horizontale qui passe par A sur quelque point de la courbe BD que ce soit, c'est à dire sur le sommet B ou quelqu'autre point D, pourra descendre uniformement par la courbe. Donc de



meme le poids tombant d'A, c'est à dire de l'horizontale qui passe par α, sur un point B de la courbe $\beta B \delta$, pourra descendre uniformement par $B\delta$. Mais la descente par la principale BD et qui commence par le sommet, retient le plus de vistesse. Aussi la perpendiculaire AB touche BD, et coupe $\beta\delta$. J'adjouteray aussi que generalement le temps de la descente par BD est au temps de la descente par AB, comme BC est au double AB, dont le corollaire est ce que vous avés voulu remarquer que BC estant double d'AB, les temps sont egaux. [Nous verrons si M. l'Abbé C. voudra mordre, quoyqu'il soit aisé en effect à un Analyste ordinaire de trouver le reste apres ce que vous en avés dit. Car le noeud de l'affaire estoit de determiner la nature de la courbe.]*)

Je souhaitte de tout mon coeur, que vous donniés au public tant de belles decouvertes que vous avés faites depuis long temps dans la Geometrie, dans les Mécaniques, dans la Dioptrique, et autres sciences. Pourquoy ne vous servés vous pas de la commodité de tant de journaux des Sçavans. Mais ce que je souhaitte le plus, c'est vostre santé. Je ne connois personne qu'on vous puisse substituer. En attendant la publication de vos ouvrages, je voudrois avoir au moins quelque connoissance

---

*) Diese eingeschlossene Stelle sollte wahrscheinlich in der Abschrift des Briefes wegbleiben.

de ce que vous avés dessein de donner. Il me semble d'avoir ouy dire que vous pouviés rendre raison enfin de la refraction du crystal d'Islande. Je voudrois sçavoir vostre sentiment sur le flus et reflus, sur la variation de l'aimant, qui apparemment a quelque regle, sur la nature des couleurs fixes qu'on appelle reelles. Item sur la generation des sels.

J'aurois écrit plustost, mais je suis en voyage depuis trois mois à voir quelques Archives pour en tirer des lumieres Historiques, et c'est pourquoy je n'ay vu les Nouvelles d'octobre qu'il y a quelques semaines.

Beilage.

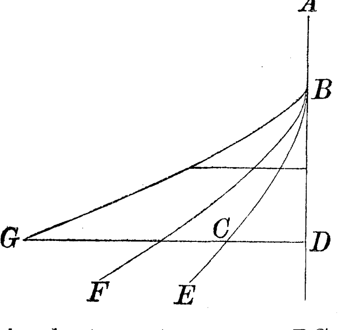
Solution du Probleme proposé par M. L. dans les Nouvelles de la Republique des Lettres du mois de Septembre 1687.*)

Trouver une ligne de descente dans laquelle le corps pesant descende uniformement et approche egalement de l'horizon en temps egaux.

Solution.

Si l'on vouloit, que le corps pesant commençast à descendre dans cette ligne depuis le repos, elle seroit impossible.

Mais si le corps est supposé avoir quelque mouvement, quelque petit qu'il soit, comme par ex. celui qu'il aquiert en tombant de la hauteur perpendiculaire AB, alors la ligne courbe BC qui est telle que le cube de BD perpendiculaire sur AB prolongée soit egale au solide du quarré de CD et de la hauteur de $\frac{9}{4}$AB, satisfera au Probleme.



Mais outre cette ligne BC il y en aura une infinité d'autres du même genre et aisées à trouver, qui feront le même effet, c'est à dire que le corps pesant apres la chute par AB descendant par ces lignes, approchera encore egalement de l'horizon en temps egaux, mais plus lentement, que par BC.

Que si BD est double de BA, le temps de la descente par la portion de courbe BC sera egal au temps de la chute par AB.

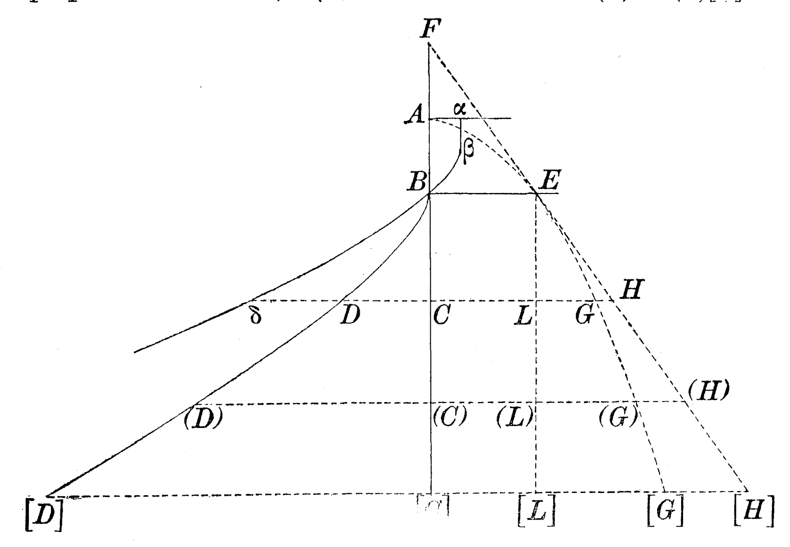
H. D. Z.

*) Article VI des Nouvelles de la Republique des Lettres du mois d'Octobre 1687.

Addition de M. L. à la solution de son probleme donnée par M. H. D. Z. article VI du mois d'octobre 1687.*)

Je n'avois garde de proposer ce probleme à des Geometres du premier rang, tels que Monsieur H. D. Z., ils doivent plustost juger des prix, à peu prés comme les quarante Academiciens. Cependant puisque M. H. a trouvé ce probleme digne de le resoudre luy même, je tacheray d'adjouter quelque chose.

On demande une ligne BD(D) tracée sur quelque plan, dans laquelle un corps pesant puisse descendre uniformement, et approcher egalement de l'horison en temps egaux, c'est à dire que les temps des descentes par BD, B(D) soient comme les hauteurs perpendiculaires BC, B(C) et si les hauteurs C(C) et (C)[C] estoient



égales, les temps des descentes par D(D) et par (D)[D] seroient aussi égales entre elles.

Je dis que la Paraboloeide Quadrato-Cubique BD(D)[D] satisfera à la question et sera la Ligne Isochrone demandée dont le sommet sera B, et les quarrés des ordonnées CD comme les cubes des abscisses (de la touchante du sommet) BC. Par exemple, les abscisses BC, B(C) estant 1 et 4, les ordonnées CD, (C)(D) pourront estre $\frac{2}{3}$ et $\frac{16}{3}$, car les cubes de 1 et 4 sont 1 et 64, et $\frac{2}{3}$

*) Scrips. 4 Januar. 1688 Pilsnae in Bohemia. Haec missa autori Novellarum Reipublicae literariae. (Bemerkung von Leibniz.)

estant à $\frac{16}{3}$ comme 1 à 8, leurs quarrés seront aussi comme 1 à 64. Cette ligne qu'on pourra maintenant appeller Isochrone (apres la decouverte de cette proprieté) est assez connue d'ailleurs aux Geometres, et a esté la premiere de toutes les lignes courbes de la Geometrie ordinaire, à qui on ait donné une droite exactement egale. Or il est manifeste que le corps pesant ne sçauroit descendre uniformement dans la ligne BD depuis le repos, car s'il commençoit par le repos, cette même uniformité le feroit continuer ce repos, c'est à dire il n'y auroit point de mouvement. Mais avec quelque vistesse ou tardité qu'il tende de descendre, il y aura moyen de luy assigner une infinité de ces Paraboloeides Quadrato-Cubiques, l'une au sommet B, les autres dans quelque autre point, comme D, depuis lequel ce corps continuera de descendre et d'approcher de l'horison avec cette même vistesse ou tardité. Si la descente uniforme doit commencer depuis le sommet B, le parametre de nostre Paraboloeide isochrone sera $\frac{9}{4}$ de la hauteur ou cheute perpendiculaire AB, qui a pu donner au corps pesant la vistesse qu'il a au sommet B.

Pour donner une regle de ce mouvement, supposons que le corps pesant ait acquis la vistesse qu'il a au point B en descendant par la perpendiculaire AB, et pour representer le temps de cette descente, menons à discretion BE normale à AB; puis traçons la parabole AEG dont l'axe soit ABC. De plus soit menée une droite FEH, qui touche la parabole en E et coupera l'axe en F, on sçait que FB est double d'AB. Continuons CG jusqu'en H, et menons EL parallele à BC, coupant CH en L, je dis que LH representera le temps de la descente par BD. On peut se passer de la parabole, si prenant FA egale à AB, on mene FEH, mais la parabole sert à rendre raison de cette operation, car ses ordonnées representent les temps de cheute droite AC.

Voicy donc la regle: Le temps LH de la descente uniforme sur une portion BD de la ligne isochrone est au temps BE de la descente perpendiculaire AB, qui a pû donner la vistesse acquise au commencement B de la ligne isochrone qu'elle touche, comme la hauteur BC de la descente isochrone au double de la hauteur AB de la descente perpendiculaire. Car à cause des triangles semblables ELH et FBE, il est visible que LH est à BE comme EL ou BC est à FB double d'AB.

Corollaire. Si la hauteur BC de la descente uniforme est double de la hauteur AB de la descente perpendiculaire, les temps LH et BE

seront égaux, ce qui convient avec la remarque de Mons. H. Mais si le temps de la dite descente perpendiculaire estoit double de celuy de la descente uniforme, leurs hauteurs seroient egales. Et on peut resoudre de même tous les cas particuliers donnés.

Mais si on ne demande pas que la descente uniforme commence au sommet, alors la vistesse du commencement, ou bien la hauteur de la cheute de cette vistesse aussi bien que la paraboloeide isochrone estant données, il s'agit de trouver le point D où le corps pesant arrivant avec cette vistesse et continuant son mouvement dans la ligne D(D) descendra uniformement.

En voicy la regle generale: „Lorsque le corps pesant tombe de quelque hauteur ou horizontale qui passe par A, sur quelque point D que ce soit de la ligne isochrone BD qui est touchée au sommet B par AB perpendiculaire à l'horisontale et egale à $\frac{4}{9}$ du parametre de la ligne isochrone; il commencera de descendre uniformement dans la dite ligne depuis ce point D." Ce qui suffit à determiner ces questions et à construire aussi les lignes mentionnées dans la figure de Monsieur H., appliquant les points convenables des autres lignes isochrones comme $\beta B\delta$ du sommet B de la principale BD, en sorte qu'A et α points pris au dessus des sommets B et β et determinants la hauteur de la cheute tombent dans une même horisontale Aα. C'est pourquoy le poids tombant d'A sur B pourra depuis B descendre dans toutes les isochrones qui se coupent en B, dont les points α tombent dans l'horisontale Aα. Mais BD à l'egard de la hauteur AB est la principale des Isochrones, qui sert icy depuis sommet et dans laquelle le poids arrivant de la hauteur AB descendra uniformement avec le plus de vistesse qu'il pourra, et la perpendiculaire AB elevée sur le point de rencontre du poids et de la ligne isochrone touche la principale BD au lieu qu'elle coupe les autres comme $\beta\delta$.

Il est aisé de donner la demonstration de toutes ces choses, lorsqu'elles sont déja trouvées, c'est pourquoy je ne veux pas m'arrester.

XII.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 8 Fevr. 1690.

Il est bien tard de vous dire maintenant (si toutefois je ne dois pas l'omettre) que je reçûs la tres obligeante lettre que vous m'escrivistes il y a quelques 8 ou 10 mois, à l'occasion de Vostre Probleme dont vous aviez trouvé ma solution dans les Nouvelles des Sçavans. Je ne sçaurois vous dire pourquoy je n'y ay pas fait de response, si ce n'est pas ce que je l'avois differée, comme cela arrive parfois, et que dés lors je prevoiois cette occasion presente de vous devoir envoier le livre que j'allois faire imprimer. La lenteur des ouvriers, et un voiage que je fis e Angleterre depuis que l'edition estoit commencée, ont fait qu'elle a trainé jusqu'icy. Le voila en achevé ce gros volume, et qui vous demand quelques heures de vostre loisir pour estre lû, comme à un juge tres competent en ces matieres. Outre le Traité de la Lumiere vous y v rrez un discours de la cause de la Pesanteur, et ce que j'y ay adjouté touchant les corps qui traversent l'air ou quelqu'autre milieu qui leur fait resistence, de quoy vous avez traité aussi, et Mr. Newton plus amplement que pas un de nous deux. Je vois que vous vous estes encore rencontré avec luy en ce qui regarde la cause naturelle de chemins Elliptiques des Planetes; mais comme en traitant cette matiere vous n'aviez encore vû qu'un extrait de son livre et non pas le livre mesme, je voudrois bien sçavoir si du depuis vous n'avez rien changé à vostre Theorie, parce que vous y faites entrer les Tourbillons de Mr. des Cartes, qui à mon avis sont superflus, si on admet le Systeme de Mr. Newton, où le mouvement des Planetes s'explique par la pesanteur vers le Soleil et la vis centrifuga, qui se contrebalancent. Outre que ces Tourbillons Cartesiens faisoient naitre plusieurs difficultez, comme vous verrez par mes remarques, et mesme sans elles vous ne pouviez pas l'ignorer. Je ne feray pas cette lettre plus longue, puisque je vous envoie assez d'ailleurs pour derober de vostre temps. Je vous supplieray seulement que lorsque vous aurez examiné ces petits Traitez, de m'en faire sçavoir vostre sentiment, et si j'ay esté assez heureux pour y avancer quelque chose qui vous soit nouvelle et qui vous satisfasse. Je suis de ceux que vous honnorent le plus, Monsieur, et demeure etc.

XIII.

Leibniz an Huygens.

Hannover $\frac{11}{21}$ Juillet 1690.

Comme vostre temps nous est pretieux, je ne vous importunerois pas, si je ne trouvois à propos de vous recommander un jeune homme de tres grande esperance, nommé Mr. Spener. Il s'applique fort à la physique, et puisqu'il joint la connoissance de la chymie à celle des mathematiques, je m'en promets beaucoup. Comme il pretend l'honneur de vous faire la reverence à la Haye, vous en jugerés mieux, et il profitera de l'avantage de vous voir, pour se fortifier dans ses bons desseins, et pour les poursuivre avec l'exactitude, qui y est necessaire. S'il venoit chez vous, je vous supplie de luy faire donner la cy-jointe.

Il n'y a que cinq ou six semaines que je suis de retour à Hannover d'un voyage de deux ans et plus, pendant lequel j'ay parcouru une bonne partie de l'Allemagne et de l'Italie pour chercher des monumens historiques par ordre de Monseigneur le Duc.

J'ay trouvé bien peu de personnes, avec qui on puisse parler de ce qui passe l'ordinaire en physique et en mathematiques. Mr. Auzout que j'ay trouvé à Rome, nous promet une nouvelle edition de Vitrouve, où il pourroit bien reussir sans doute, puisqu'il a eu le moyen de voir tant d'antiques. Il pretend qu'il y a bien des passages, où Mr. Perrault a debité plustost ses propres pensées que celles de l'auteur et des anciens. Mais je trouve que Mr. Auzout est trop distrait, et comme il ne veut pas donner des pieces detachées, j'apprehende que cela ne nous prive entierement du fruit de ses travaux.

J'ay trouvé aussi à Rome chez Mr. le Cardinal de Bouillon Mr. l'Abbé Berthet, que vous aurés peut-estre connu à Paris sous le nom de P. Berthet jesuite. Il s'applique fort à la musique, où il fait des observations. Il est bon poëte avec cela, et il a traduit en Italien l'opera français, qui s'appelle l'Amadis, et encor quelques autres, conservant parfaitement le même chant, ce qu'on a trouvé beau et difficile. J'ay esté present à une representation qu'on en fit chez Mr. le Cardinal.

Le traité de Mr. Viviani de locis solidis est imprimé en partie, mais comme il y manque encor quelque chose, il ne le monstre pas encor.

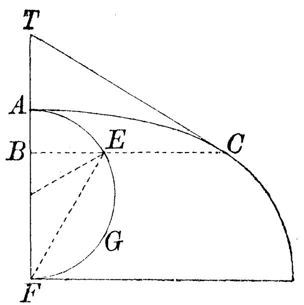
J'ay trouvé deux medecins, bien versés dans les mathematiques, dont je me promets quelque chose, Mr. Guillelmini à Bologne et Mr. Spoleti à Padoue.

J'ay la plus grande impatience du monde, Monsieur, de voir vostre traité de la lumiere que j'attends de Hambourg, aussitost qu'il y sera arrivé. Il y a déja longtemps que le public le souhaittoit. Il nous faut de tels livres pour avancer veritablement. J'attends d'y voir dechiffré le mystere du crystal d'Islande, et peut estre y trouverons nous quelque chose, qui puisse servir à deviner les raisons des couleurs pour expliquer mathematiquement, par quelle adresse la nature rend certaines liqueurs ou surfaces, toutes rouges ou toutes bleues. Car je m'imagine que ces couleurs, qu'on appelle fixes, ne viennent pas moins de la refraction que celles qu'on appelle transparentes, quoyque feu Mr. de Mariotte ait esté d'un autre sentiment.

Je ne scay Mr. si vous avés veu dans les Actes de Leipzig une maniere de calcul que je propose, pour assujettir à l'Analyse ce que Mr. des Cartes luy même en avoit excepté. Au lieu que les affections des grandeurs, qu'on employoit jusqu'icy en calculant, n'estoient que les racines et les puissances, j'employe maintenant les sommes et les differences, comme $d\overline{y}$, $d\overline{dy}$, $d\overline{ddy}$, c'est à dire differences et incremens ou elemens de la grandeur y, ou bien les differences des differences, ou les differences des differences des differences etc. Et comme les racines sont reciproques aux puissances, de même les sommes sont reciproques aux differences, par exemple $\sqrt{yy} = y$ et $\sqrt[3]{y^3} = y$, de même $\int d\overline{y} = y$ et $\int\int d\overline{dy} = y$. Par le moyen de ce calcul je me suis avisé de donner les touchantes et de resoudre des problemes de maximis et minimis, lorsque les equations sont fort embarassées de racines et de fractions, sans que j'aye besoin de les oster, ce qui m'epargne souvent des grandissimes calculs. Par le même moyen je reduis à l'analyse les courbes que Mr. des Cartes appelloit mechaniques, comme par exemple les cycloides, exprimant par une equation la relation entre x et y abscisse et ordonnée de la courbe. Par exemple AB le sinus versus estant x, alors FGE*) arc du cercle chez moy se designe ainsi $\int(adx : \sqrt{2ax - xx})$, c'est à dire l'arc est la somme des elemens de la courbe circulaire qui sont: $adx : \sqrt{(2ax - xx)}$ (ou $\frac{adx}{\sqrt{(2ax - xx)}}$, car les deux points me signifient division, pour eviter la soubscription du diviseur). C'est à dire, les elemens de la courbe circulaire sont à dx

*) Voluit dicere AE pro eo quod dixit FGE. (Anmerkung von Huygens.)

elemens respondans de l'abscisse, comme a, rayon, est aux sinus versus $\sqrt{(2aa - xx)}$. Cela estant posé, l'ordonnée de la cycloide, menée perpendiculairement sur l'axe, que nous appellerons y, sera $\sqrt{2ax - xx} + \int adx : \sqrt{2ax - xx} = y$. Par le moyen de cette equation je trouve toutes les proprietés de la cycloide sans avoir aucun recours à la figure, comme si c'estoit une ligne ordinaire. Cherchant par exemple l'equation differentiale de cette equation, nous trouvons les tangentes de la cycloide, car $d\sqrt{2ax - xx} = \overline{a - x}\, dx : \sqrt{2ax - xx}$ par les regles de mon Algorithme, que j'ay données, donc $dy = (2a - x)\, dx : \sqrt{(2ax - xx)}$ ou bien $dy : dx :: (2a - x) : \sqrt{(2ax - xx)}$; c'est à dire, dans la cycloide l'ordonnée est à la partie de l'axe compris entre l'ordonnée et la touchante (ou bien dy est à dx) comme $2a - x$, sinus. versus de l'arc parcouru FGE*) est au sinus rectus, c'est à dire CB à BT comme FB à BE. Ainsi l'analyse des lignes transcendantes estant établie, on pourra découvrir bien des proprietés, dont on ne s'avisera pas sans cela, et j'en ay beaucoup d'echantillons. Je souhaite d'en avoir un jour votre jugement dont je scay le poids. Je suis avec zele en vous souhaitant beaucoup de santé pour longues années etc.



XIV.

Huygens an Leibniz.

A Voorburg ce 24 Aoust 1690.

J'ay receu Vostre tresagreable du $\frac{15}{25}$ Jul. Elle en enfermoit une pour Mr. Spener, qui n'est point venu encore la querir. Peut estre m'aura-t-il cherché en vain à la Haye, où je ne demeure plus, mais à une maison de campagne à une lieue de là tant que dure la belle saison. J'ay pourtant laissé Vostre lettre au logis de mon frere de Zulichem, à fin qu'on la luy donnast s'il venoit la demander.

Je vous ay escrit du 9e Fevr.**) de cette année en vous envoiant

*) Imo AE. (Bemerkung von Huygens.)

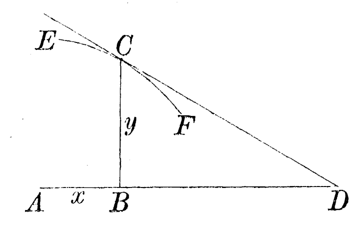
**) Der Brief hat als Datum 8. Febr.

un Exemplaire de mon livre de la Lumiere. Je recommanday le pacquet à Mr. van der Heck, Agent de Mr. le Duc de Hanover, mais comme vous n'estes revenu de vostre voiage d'Italie que depuis 6 semaines, ce pacquet pourra estre resté entre les mains de celuy à qui Mr. van der Heck l'aura adressé, de quoy je vous prie de vous informer. Je vous rends grace de vos nouvelles d'Italie, où je voudrois avoir esté avec vous. Je souhaite fort de voir ce Vitruve de Mr. Auzout, qui a raison de reprendre Mr. Perrault en plusieurs choses, par exemple en la construction de la Balliste, où il nous a forgé une machine de sa teste, qui n'est point practicable, au lieu de la vraye qu'on voit dans Heronis Belopoiecia commentez per Benardinus Baldus. J'ay esté bien aise d'apprendre des nouvelles du P. Berthet, que j'ay connu à Paris et que je trouvois fort à mon gré. Je voudrois bien scavoir pour quelle raison il est sorti de la Societé des Jesuites. J'admire ce que vous dites de sa traduction des Opera de François en Italien, en conservant le chant. Je ne croiois pas que M. Viviani fust encore vivant, n'ayant pas ouy parler de luy depuis qu'il nous envoya à Paris un petit ouvrage posthume de Galilee, qui ne me fut rendu que 2 ans apres par le caprice de certaines gens. Qu'est ce que pourra contenir de nouveau ce traité de Locis Solidis?

Je n'ay rien dit des couleurs dans mon Traité de la Lumiere, trouvant cette matiere tres difficile, sur tout à cause de tant de manieres differentes dont les couleurs sont productées. Mr. Newton, que je vis l'esté passé en Angleterre, promettoit quelque chose là dessus, et me communiqua quelques experiences fort belles de celles qu'il avoit faites. Il semble, Monsieur, que vous aiez aussi medité sur ce sujet, et apparemment ce ne sera pas en vain.

J'ay vu de temps en temps quelque chose de Vostre nouveau calcul Algebraique dans les Actes de Leipsich, mais y trouvant de l'obscurité, je ne l'ay pas assez etudié pour l'entendre, comme aussi parce que je croiois avoir quelque methode equivalente, tant pour trouver les Tangentes des Lignes courbes où les regles ordinaires ne servent pas, ou fort difficilement, que pour plusieurs autres recherches. Mais sur ce que vous me dites maintenant de l'usage de vostre Analyse et Algorithme dans les Lignes que des Cartes excluoit, j'ay envie de l'etudier à fond si je puis, en repassant sur tout ce que vous en avez donné dans les dites Actes. Je vois qu'entre autres utilitez de Vostre nouvelle invention vous mettez Methodus Tangentium inversa, qui seroit encore de grande importance si vous l'avez telle que la proprieté ou construction des Tangentes estant donnée, vous en puissiez deduire la proprieté de la Courbe. Comme si du point C de la courbe ECF ayant

mené la perpendiculaire CB ∞ y sur la droite donnée AD, dans laquelle soit donné le point A et AB ∞ x; la tangente estant CD, et BD alors



egale à $\frac{yy}{2x} - 2x$; si vous pouvez trouver l'Equation qui exprime la relation de AB à BC, ou bien quand BD est $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$, estant a une ligne donnée. Si vostre methode sert icy et aux autres choses que vous dites, vous pouvez estre tres seur quel en sera mon jugement, et vous m'obligerez fort aussi bien que tous les geometres en l'expliquant clairement et dans un traité expres.

Dans ma lettre qui accompagnoit le traité de la Lumiere, je vous faisois response à la tresobligeante que vous m'aviez escrite il y avoit longtemps, au sujet de vostre probleme des corps egalement descendants, que j'avois resolu. J'y avois aussi touché quelque chose des Orbes Elliptiques des Planetes, dont vous aviez donné vos pensées dans les Acta de Leipsich, pour sçavoir si vous n'aviez pas rejetté les Tourbillons de des Cartes, apres avoir vu le livre de Mr. Newton. Je demandois aussi vostre jugement sur ce que j'ay escrit au traité de la Pesanteur touchant le mouvement des corps qui sentent la resistance de l'air, ayant vu que vous aviez aussi entamé cette matiere. Mais j'attens avec impatience vos remarques sur tous les sujets differents que mon livre contient, scachant que je ne scaurois avoir un juge plus competent, ni plus porté à me faire justice. Je suis avec toute l'estime possible etc.

XV.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 9 Oct. 1690.

Je vous ay escrit une assez longue lettre du 24 Aoust, pour response à la vostre du $\frac{15}{25}$ Jul. Je n'ay point appris jusqu'icy si vous l'avez reçue. Monsr. Spener est venu depuis querir vostre lettre que j'avois pour luy, et je l'ay vu fort souvent pendant le sejour qu'il a fait à la Haye, et certes avec bien de la satisfaction, trouvant qu'il scavoit beaucoup de choses singulieres, principalement en ce qui regarde la matiere où il s'est le plus appliqué qui est celle des metaux et mi-

neraux. Selon le compte qu'il faisoit, il doit vous avoir vu depuis son retour en Allemagne, et estre passé en suite chez luy à Leipsich. J'ay tasche depuis ma dite lettre d'entendre vostre calculus differentialis, et j'ay tant fait que j'entens maintenant, mais seulement depuis 2 jours, les exemples que vous en avez donné, l'un dans la Cycloide, qui est dans vostre lettre, l'autre dans la recherche du Theoreme de Mr. Fermat, qui est dans le Journal de Leipsich de 1684. Et j'ay mesme reconnu les fondements de ce calcul, et de toute vostre methode que j'estime tres bonne et tres utile. Cependant je crois encore d'avoir quelque chose d'equivalent, comme je vous ay escrit dernierement, et la raison qui me le persuade, c'est non seulement la solution que je trouvay de vostre Probleme de la Ligne courbe pour la descente egale, mais aussi l'examen que j'ay fait de la Tangente d'une autre Courbe fort composée dont vous m'envoiastés la construction il y a desia plusieurs années. Car par ma methode je trouve cette mesme construction, et toutes les autres dans les lignes qui se forment de mesme, sans que les quantitez irrationelles m'embarassent: et à tout cela je ne me sers d'aucun calcul extraordinaire ni de nouveaux signes. Mais pour juger mieux de l'excellence de vostre Algorithme, j'attens avec impatience de voir les choses que vous aurez trouvées touchant la ligne de la corde ou chaine pendante, que Mr. Bernouilly vous a proposée à trouver, dont je luy scay bon gré, parce que cette ligne renferme des proprietez singulieres et remarquables. Je l'avois considerée autre fois dans ma jeunesse, n'ayant que 15 ans, et j'avois demontré au P. Mersenne, que ce n'estoit pas une Parabole, et quelle maniere de pression il faloit pour faire la parabole. Cela a fait que j'ay esté tenté maintenant d'examiner le Probleme de Mr. Bernouilly, et voicy le chifre de ce que j'y ay trouvé. Je l'ay escrit en sorte que vous pourrez à peu pres l'interpreter, si vous avez fait les mesmes decouvertes, et je crois vous faire plus de plaisir d'en user ainsi, que si je vous envoiois les choses expliquées. Je vous prie de m'envoier pareillement vostre chifre, et que nous puissions en suite abbreger entre nous le terme d'un an que vous avez accordé aux Geometres, afin que j'aye d'autant plustost la satisfaction de voir ce que vostre Analyse aura produit de singulier.

$$\frac{ri}{a} \infty c \cdot \frac{ci}{a} \infty e \cdot \frac{1}{2} rc + \frac{2}{3} ec^{*)} \infty S \cdot \odot \sqrt{2rv} \infty s \cdot c \cdot 45r \infty c \cdot 10000 \cdot 8809 \cdot 4134 \cdot$$
$$\cdot\, xxyy \infty a^4 - aayy \cdot xxyy \infty aaxx - aayy \cdot d \cdot h \cdot c \cdot q \cdot c \cdot p \cdot q \cdot i \cdot p \cdot e \cdot t \cdot i \cdot i \cdot$$
$$\cdot\, p \cdot e \cdot r \cdot e \cdot i \cdot i \cdot i \cdot a^0.$$

---

*) Leibniz hat bemerkt: il faut écrire $\frac{1}{6}$ ec au lieu de $\frac{2}{3}$ ec suivant la lettre du 19 Nov. de cette année.

Vous aurez vu, à ce que je crois depuis vostre derniere, mon Traité de la Lumiere et celuy de la Pesanteur, soit que l'exemplaire, qu'ensemble avec ma lettre j'avois recommandé à Mr. van der Heck, se soit trouvé ou qu'on vous en ait fait avoir d'ailleurs. Vous me ferez plaisir de m'en dire vostre sentiment, apres que vous l'aurez examiné à loisir. Je vois qu'on n'en dit rien dans les Acta de Leipsich, de quoy M. D. T.*) pourroit bien estre cause, qui depuis mon livre imprimé a fait inserer dans ce Journal quelque chose touchant la ligne de reflexion du miroir concave, qui se trouve de mesme chez moy, et que j'avois proposé dans l'Academie à Paris il y a plus de 12 ans. Il me souvient qu'en ce temps là je montray a Mr. D. T. quelques figures de ces lignes de reflexion et refraction, et je crois que de là vient la ressemblance de nos inventions, mais que cela soit dit entre nous s'il vous plait. Il est peut estre desia fasché contre moy, quoyque j'aye plus grande raison de l'estre contre luy, pour n'en avoir pas usé civilement en mon endroit, lorsque je luy eus envoié quelques remarques sur sa Medicina Mentis et Corporis. Cela n'empesche pas que je n'estime son esprit et son scavoir, et s'il peut montrer qu'il a veritablement trouvé ce qu'il a avancé touchant l'invention des quadratures, ou de leur impossibilité, je diray qu'il a fait une des belles decouvertes qu'on puisse faire dans la geometrie. Honorez moi d'un mot de response et croiez que je suis entierement etc.

XVI.

Leibniz an Huygens.

A Hannover ce $\frac{3}{13}$ d'Octobre 1690.

Pendant que je vous prepare une lettre assés ample, tant pour m'acquitter de mon devoir et pour vous remercier de l'honneur que vous m'avés fait en m'envoyant vostre excellent ouvrage, que pour profiter de vos instructions sur plusieurs points que vous avés touchés; voicy une troisieme lettre qui m'arrive aujourdhuy et qui me fait prendre la plume d'abord pour satisfaire par avance à une partie de ce que je dois, et pour vous dire, qu'il y a environ deux semaines, que le pacquet adressé par M. van der Heck s'est trouvé et m'a esté rendu

*) Tschirnhaus.

enfin. Ceux qui l'avoient receu en mon absence, ne s'en estant pas souvenus à mon retour, que lorsque je l'ay fait demander.

Je conçois fort aisement, Monsieur, que vous avés une methode equivalente à celle de mon calcul des differences. Car ce que j'appelle dx ou dy, vous le pouvés designer par quelque autre lettre, ainsi rien ne vous empeche d'exprimer les choses à vostre maniere. Cependant je m'imagine qu'il y a certaines vues qui ne viennent pas aussi aisément que par mon expression, et c'est à peu près comme si, au lieu des racines et puissances, on vouloit toujours substituer des lettres, et au lieu de xx ou x^3 prendre m ou n, après avoir declaré que ce doivent estre les puissances de la grandeur x. Jugés, Mr., combien cela embarasseroit. Il en est de meme de dx ou de ddx, et les differences ne sont pas moins des affections des grandeurs indeterminées dans leur lieux, que les puissances sont des affections d'une grandeur prise à part. Il me semble donc qu'il est plus naturel de les designer ensorte qu'elles fassent connoistre immediatement la grandeur dont elles sont les affections. Et cela paroist surtout convenable, quand il y a plusieurs lettres et plusieurs degres de differences à combiner, comme il m'est arrivé quelquefois, car il y a alors à observer une certaine loy d'homogenes toute particuliere, et la seule vue decouvre ce qu'on ne deméleroit pas si aisément par des notes vagues, comme sont des simples lettres. Je voy que Mr. Newton se sert des minuscules pour les differences; mais quand on vient aux differences des differences, et au de là, comme il peut arriver, il faudra encor changer, de sorte qu'il me semble qu'on fait mieux de se servir d'une expression qui s'étend à tout.

Cependant quand on est accoustumé à une methode, on a raison de ne la pas changer aisément, quoyqu'on conseilleroit peut estre à d'autres, qui n'en ont encor aucune, de se servir de celle qui paroist la plus naturelle. Aussi sans quelque chose d'approchant de mon expression, je ne scay si on s'aviseroit d'exprimer les courbes transcendentes comme la cycloide ou la quadratrice, par des equations entre x et y abscisse et ordonnée, où il n'entre aucune inconnue que ces grandeurs ou leur affections. Mais peut estre qu'il y a aussi quelques avantages dans vostre expression qui me sont encore inconnus, et je seray ravi d'en estre instruit, estant plus porté à profiter de vos lumieres, qu'à vouloir contester avec vous.

Je croy d'avoir trouvé les deux lignes que vous m'aviés proposées dans vostre lettre de Voorbourg. Appellant*) AB, x, CB, y et DB devant estre $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$, je trouve $\frac{x^3y}{h} = b\frac{2xy}{\cdot}$. C'est une equation

*) Siehe die Figur zu Brief XIV.

transcendente, où les inconnues entrent dans l'exposant; h est une grandeur arbitraire, qui fait varier la courbe infinites fois; a est l'unité, et le logarithme de l'unité icy est 0; et b est une grandeur dont le logarithme est l'unité. J'ay parlé quelques fois dans les Actes de Leipzig de ces Equations à exposans inconnus, et quand je les puis obtenir, je les prefere à celles qui ne se forment que par le moyen des sommes ou differences. Aussi peuvent elles estre toujours reduites aux Equations differentielles, mais non pas vice versa. Je voudrois bien sçavoir si les lignes que vous m'avés proposées peuvent avoir quelque usage.

En considerant vostre chiffre de la ligne de la chaine pendante, j'y trouve quelque rapport à mon calcul, mais aussi quelque difference, car au lieu de l'equation $xxyy = a^4 - aayy$, je voy dans mon calcul reduit à certains termes $xxyy = a^4 + aayy$, qui sert à arriver à la ligne de question, et quoyque cette ligne soit du nombre des transcendantes, je ne laisse pas (supposita ejus constructione) d'en pouvoir donner non seulement les touchantes, mais encor la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation, et la dimension de l'espace compris de la courbe et de l'axe; et le calcul m'offre tout cela comme de soy meme. De la maniere que vous en parlés, Monsieur, je ne doute point que vous n'ayiés tout cela, et quelque chose de plus. Mais comme je me haste à present à vous repondre, je ne m'y arresteray pas presentement.

Je n'ay pas non plus que vous, Monsieur, raison d'estre trop content de Mr. D. T., car il m'est arrivé plus d'une foy qu'il a oublié d'avoir vû aupres de moy des echantillons des choses qu'il a données par apres. Je m'estois avisé de forger des courbes indeterminées, designées par une expression generale, comme $a + bx + cy + dxx + cyy + fxy$ etc. $= 0$ et de determiner par ce moyen, s'il est possible, de trouver des quadratrices ordinaires des courbes données, c'est à dire s'il y a moyen de trouver une quadrature generale de la courbe donnée pour toutes ses portions. J'en avois dit quelque chose à Mr. Tschirnhaus, et je fus surpris de voir plusieurs années apres, qu'il en parloit comme de son invention dans les Actes de Leipzig. Par malheur il poussa sa methode trop loin, il s'imagina de pouvoir demonstrer par là encor les impossibilités des quadratures particulieres. Mais je luy donnay une instance, qui l'obligea à chercher des faux fuyans assés estrangers, et qui n'auroient pas servi, si j'avois voulu le pousser. J'avois aussi certaines notions philosophiques, que j'ay remarquées despuis dans sa Medicina Mentis. Considerant, par exemple, autrefois la demonstration pretendue de Mr. des Cartes sur l'Existance de Dieu-

qui a esté inventée premierement par S. Anselme, je voyois que l'argument est effectivement demonstratif, quand on accorde que Dieu est possible. Cela me fit remarquer, qu'on ne sçauroit se fier sur une demonstration lorsqu'on n'est pas asseuré de la possibilité du sujet. Car s'il implique contradiction, ce qu'on demonstrera de luy, pourra estre vray et faux en même temps. Cela me donna occasion de faire cette distinction entre les definitions reelles et nominelles, que les nominelles se contentent de nous donner moyen de discerner ou reconnoistre la chose definie, si elle se rencontroit; mais les reelles doivent faire connoistre de plus qu'elle est possible. Et je jugeay aussi que c'estoit là le moyen de discerner les idées vraies et fausses, ne demeurant pas d'accord du principe de Mr. des Cartes, que nous avons l'idée des choses dont nous parlons, lorsque nous nous entendons. Sur cette reflexion, qu'il faut tacher de connoistre les possibilités des notions, Mr. D. T. a basti une partie de sa Medicina Mentis. Je luy envoyay aussi des remarques, apres la publication de son ouvrage, où je luy fis voir, que sa regle de determiner les tangentes par les foyers ne pouvoit reussir que rarement, dont je luy donnay un exemple. Je remarquay aussi que son denombrement des lignes courbes de chaque degré ne va pas bien. Je me mis à chercher une meilleure regle pour determiner les tangentes par les foyers et filets, et je la trouvay; mais pour la publication j'ay esté prevenu par Mr. Fatio Duillier, dont je ne suis pas fort faché, car il me semble qu'il a bien du merite. Je vous diray pourtant ma maniere: j'avois trouvé et demonstré ce principe general, que tout mobile ayant plusieurs directions à la fois, doit aller dans la ligne de direction du centre de gravité commun d'autant de mobiles qu'il y a de directions, si on s'imaginoit le mobile unique multiplié autant de fois pour faire reussir entierement, et en mesme temps chacune; et que la vistesse du mobile dans cette direction composée doit estre à celle du centre de gravité de la fiction, comme le nombre des directions est à l'unité. Cela posé, je consideray que le stile qui tend les filets, peut estre conçu comme ayant autant de directions (egales en vistesse entre elles) qu'il y a de filets. Car comme il les tire, il en est tiré. Ainsi sa direction composée, qui doit estre dans la perpendiculaire à la courbe, passe par le centre de gravité d'autant de points, qu'il y a de filets, qui sont les intersections d'un cercle (décrit du point de la courbe) avec ces filets. Mais il est temps de finir et de me dire, comme je le puis et dois avec toute la sincerité et toute la reconnoissance etc.

P. S. Ne continuerés vous pas, Monsieur, de nous donner quelque chose de temps en temps du grand nombre des belles pensées que vous

avés? Ne fait-on pas quelques découvertes en Hollande ou en Angleterre? Mr. Hudde ne songe-t-il plus aux sciences? Mr. Arnaud est-il en Hollande?

XVII.

Leibniz an Huygens.

Vous aurés receu la lettre que je me suis donné l'honneur de vous écrire, et où je reponds touchant les lignes que vous me proposés à chercher par ma methode, et touchant la ligne de la corde pendante. Je n'ay pas encore mis au net une lettre plus longue, où je mets mes pensées sur le mouvement des planetes. Cependant vous l'aurés aussitost que je pourray m'y attacher assez pour cet effect, et j'en espere alors vostre jugement. Cependant je crois que par ce peu que j'avois dit de la chaine pendante, vous jugerés si je me suis rencontré avec vous sans qu'il faille d'autre chifre, et j'en espere des nouvelles quand vostre commodité le permettra.

Il m'est venu dans l'esprit cependant, que l'equation que j'avois donnée pour vostre courbe, pourroit embarasser, n'estant pas aisé de juger, si elle peut satisfaire à vostre demande, puisqu'on n'a pas encor donné moyen de trouver les tangentes par des equations où l'exposant est inconnu. Et quoyque je n'aye pas encor communiqué à d'autres la methode dont je me sers pour cet effect, je ne laisse pas de vous en envoyer ici un echantillon, par lequel vous la connoistrés assés.

Soit donc x l'abscisse et y l'ordonnée de la courbe, et l'equation, comme je vous ay dit, $\frac{x^3y}{h} = b^{2xy}$. Je designeray le logarithme de x par log. x, et nous aurons $3 \log. x + \log. y - \log. h = 2xy$, supposant que le log. de l'unité soit 0, et le $\log. b = 1$. Donc par la quadrature de l'hyperbole nous aurons $3\int\frac{dx}{x} + \int\frac{dy}{y} - \log. h = 2xy$, dont l'equation differentielle sera $\frac{3dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2xdy + 2ydx$, ou bien $3ydx + xdy = 2x^2ydy + 2xy^2dx$, et par consequent dx sera à dy, ou bien DB à y (selon la figure de la lettre precedente) comme $2x^2y - x$ est à $3y - 2xy^2$, c'est à dire DB sera $\frac{2x^2y - xa^2}{3a^2 - 2xy}$, comme vous le demandiés, a estant l'unité.

Je croy, Monsieur, que vous trouverés ce calcul nouveau, et de consequence. L'analyse transcendante seroit portée à sa perfection, si on la pouvoit tousjours reduire à de telles equations.

Les equations differentielles sont un acheminement pour cet effect. J'ay beaucoup medité sur ce qu'il y a à faire là dessus, et si j'avois le loisir necessaire, ou si quelque jeune mathematicien intelligent estoit proche de moy pour m'assister, je croy qu'on pourroit avancer cette science bien au delà de l'estat où elle se trouve. Plût à Dieu, qu'on put avancer en physique en proportion.

Que jugés vous, Monsieur, de l'explication du flus et reflus de Mr. Newton? et vous paroist il raisonnable, que les queues des cometes soyent un matiere effective, poussée hors de la comete à des distances immenses et qui ne laisse pas de suivre son mouvement? Je les aurois plustost pris pour un effect optique.

Un Ecossois qui estoit en Hollande, nommé Mr. Stear, dit dans sa Physiologie, d'avoir experimenté que les corps poussés dans le vuide d'air nè vont pas fort loin; j'ay de la peine à le croire.

N'a-t on rien decouvert sur les loix de la variation de l'éguille aimantée? Je m'imagine, Monsieur, que vous aurés medité là dessus aussi bien que sur beaucoup d'autres matieres de Physique, et je vous supplie de me faire quelques fois part de vos lumieres, quand même ce ne seroient que des conjectures, puisque vos conjectures mêmes valent mieux que les demonstrations de bien des gens. C'est à cet effect que je vous ay demandé vos sentimens dans cette lettre, aussi bien que dans la precedente, sur certains points, et j'espere que vous me connoissés assez, pour ne vous pas defier de ma sincérité.

Considerant ce que j'ay dit de la resistance du milieu dans les Actes de Leipzig, Fevrier 1639, vous trouverés, Monsieur, art. 5. n. 3, qu'encor chez moy (les élemens des temps estant pris egaux, condition que vous et Mr. Newton avés dissimulée) les resistances sont comme les quarrés des vistesses. Et par le n. 4. et 6. de cet article, il s'ensuit aussi que la somme $a + \frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{5}a^5$ etc. se reduit à la quadrature de hyperbole. Dans l'ouvrage que j'avois composé autre fois sur la quadrature Arithmetique, je trouve cette proposition generale: S e c t o r c o m p r e h e n s u s a r c u s e c t i o n i s c o n i c a e a v e r t i c e i n c i p i e n t e e t r e c t i s e x c e n t r o a d e j u s e x t r e m a d u c t i s, a e q u a t u r r e c t a n g u l o s u b s i m i l a t e r e t r a n s v e r s o e t r e c t a $t \pm \frac{1}{3}t^3 \pm \frac{1}{5}t^5 \pm \frac{1}{7}t^7$ etc. p o s i t o t e s s e p o r t i o n e m t a n g e n t i s i n v e r t i c e, i n t e r v e r t i c e m e t t a n g e n t e m a l t e r i u s e x t r e m i i n t e r c e p t a m, et r e c t a n g u l u m s u b

dimidiis lateribus recto et transverso (id est quadratum a semiaxe transverso) esse unitatem. Est autem $\pm$ in hyperbola $+$, in ellipse vel circulo $-$.

Quelqu'un m'a dit qu'on scait en Hollande la carte de l'Asie septentrionale, et si l'Amerique en est divisée par la mer. Si vous en scavés quelque chose, je vous supplie de m'en dire un mot. Voila à quoy vostre bonté et vostre scavoir vous exposent. Mais il est tousjours bon d'estre riche au hazard d'estre importuné par des pauvres. Je suis avec zele etc.*)

XVIII
Leibniz an Huygens.

Je suis bien marri de n'avoir sçeu la nouvelle obligation que je vous avois apres tant d'anciennes, que par vostre lettre de Voorbourg du 24. d'Aoust, je me suis d'abord informé où pouvoit estre devenu vostre paquet, et enfin on me l'a apporté il y a quelques semaines; je vous en dois remercier de toutes les manieres. Vos presens me sont precieux, et je puis dire, que celuy que vous me fistes à Paris de vôtre excellent ouvrage sur les pendules a esté un de plus grands motifs des progrés que j'aye peutestre faits depuis dans ces sortes de sciences Car m'efforçant de vouloir entendre des pensées qui passoient de beaucoup les connoissances que j'avois alors en ces matieres, je m'estois enfin mis en estat de vous imiter en quelque chose. Apres cela vous pouvés juger quel estat je dois faire de ce qui vient de vostre part, puisque cela me porte tousjours des lumieres. Et rien n'en avoit plus besoin que la lumiere même. Quand vôtre traité sur ce sujet ne me seroit venu que par les voyes ordinaires des libraires, je ne l'aurois pas moins consideré comme une grace que vous m'auriés faite, le bien que vous avés fait à tous, touchant plus particulierement ceux qui en peuvent profiter d'avantage par le goust qu'ils prennent à la matiere. Maintenant que vous m'envoyés vous mêmes vôtre ouvrage si attendu depuis tant d'années, cette distinction favorable m'oblige encor plus etroitement, et me fait joindre la reconnoissance que je vous en dois, à celle qui m'est commune avec tout le genre humain, dont vous augmentés le veritable thresor par vos decouvertes importantes, quoyque

*) Ohne Ort und Datum.

le nombre de ceux qui en puissant connoistre le prix soit mediocre. Je me sçay bon gré d'en estre: ille se profecisse sciat, cui ista valde placuerint. Si j'avois l'âge et le loisir du temps de mon sejour à Paris, j'espererois qu'il me pourroit servir en Physique comme vôtre premier present me fit avancer en Geometrie. Mais je suis distrait par des occupations bien differentes qui semblent me demander tout entier. Et ce n'est que par échappades que je puis m'en écarter quelque fois, cependant le plaisir et l'utilité qu'il y a à communiquer avec vous me fait profiter de l'occasion. J'ay lû vôtre ouvrage avec la plus grande avidité du monde; je l'avois fait chercher à Hambourg il y a déjà quelques mois, mais on me manda, que quelque peu d'exemplaires qui y estoient venu estoient déjà disparus.

L'usage que vous faites des ondes pour expliquer les effects de la lumiere m'a surpris, et rien n'est plus heureux que cette facilité, avec laquelle cette ligne qui touche toutes les ondes particulieres et compose l'onde generale satisfait aux loix de reflexion et de refraction connues par l'experience. Mais quand j'ai vû que la supposition des ondes spheroidales vous sert avec la même facilité à resoudre les phenomenes de la refraction disdiaclastique du cristal d'Islande, j'ay passé de l'estime à l'admiration. Le bon Pere Pardies parloit aussi d'ondes, mais il estoit bien éloigné de ces considerations comme vous avés remarqué vous même p. 18, où vous dites qu'on le pourra voir si son écrit a esté conservé. Mais sans chercher cet écrit, on le pourra juger par un petit livre de dioptrique du Pere Ango Jesuite, qui avoue d'avoir eu les papiers du P. Pardies entre les mains, et d'en avoir puisé la consideration des ondes. Mais lorsqu'il pretend d'en tirer la regle des sinus pour la refraction (car c'estoit là, où je l'attendois), il se trompe fort, ou plustost il se mocque de nous en forgeant une demonstration apparente qui suppose adroitement ce qui est en question. Je voudrois que vous eussiés voulû nous donner au moins vos conjectures sur les couleurs, et je voudrois sçavoir aussi quelle est vôtre pensée de l'attraction que M. Newton reconnoist après le P. Grimaldi dans la lumiere à la p. 231 de ces Principes, item quelles sont les experiences nouvelles sur les couleurs que M. Newton vous a communiquées, si vous trouvés à propos d'en faire part. Le crystal d'Islande n'a-t-il rien fourni de particulier sur les couleurs?

Apres avoir bien consideré le livre de M. Newton que j'ay vû à Rome pour la premiere fois, j'ay admiré comme de raison quantité de belles choses qu'il y donne. Cependant je ne comprends pas comment il conçoit la pesanteur, ou attraction. Il semble que selon luy ce n'est qu'une certaine vertu incorporelle et inexplicable, au lieu que vous l'expliqués

tres plausiblement par les loix de la mecanique. Quand je faisois mes raisonnemens sur la Circulation harmonique, c'est à dire, reciproque aux distances, qui me faisoit rencontrer la regle de Kepler [du temps proportionel aux aires], je voyois ce privilege excellent de cette espece de circulation: qu'elle est seule capable de se conserver dans un milieu qui circule de même, et d'accorder ensemble durablement le mouvement du solide et du fluide ambiant. Et c'estoit là la raison Physique que je pretendois donner un jour de cette circulation, les corps y ayant esté determinés pour mieux s'accorder ensemble. Car la circulation harmonique seule a cela de propre que le corps qui circule ainsi, garde precisement la force de sa direction ou impression precedente toute comme s'il estoit mû dans le vuide par la seule impetuosité jointe à la pesanteur. Et le même corps aussi est mû dans l'ether comme s'il y nageoit tranquillement sans avoir aucune impetuosité propre, ny aucun reste des impressions precedentes, et ne faisoit qu'obeïr absolument à l'ether qui l'environne, quant à la circulation (le mouvement paracentrique mis à part), car*) comme j'avois monstré dans les Actes de Leipzig p. 89 au mois de Fevrier 1689, la circulation D_1M_2 ou D_2M_3 estant harmonique, et M_3L parallele à $\odot M_2$, rencontrant la direction precedente M_1M_2 prolonguée en L, alors M_1M_2 est égale M_2L (ou à GM_1, le graveur a oublié la lettre G entre T_2 et M_2 marquée dans ma description) et par consequent la direction nouvelle M_2M_3 est composée tant de la direction precedente M_2L jointe à l'impression nouvelle de la pesanteur, c'est à dire à LM_3, que de la velocité de circuler de l'ether ambiant D_1M_3 en progression harmonique jointe à la velocité paracentrique déjà acquise M_2D_1 en progression quelconque. Mais quelque autre circulation qu'on suppose hors l'harmonique, le corps gardant l'impression precedente M_2L ne pourra pas observer la loy de la circulation D_1M_2 que le tourbillon ou l'ether ambiant luy voudra prescrire, ce qui fera naitre un mouvement composé de ces deux impressions. C'est pourquoy les corps circulans tant liquides que solides apres bien des combats et contestations ont esté enfin reduits à cette seule espece, où ils s'accordent avec ceux qui les environnent, et où chacun ne va que comme seul ou comme dans le vuide. Cependant je ne m'estois pas avisé de rejetter avec M. Newton l'action de l'ether environnant. Et encor à present je ne suis pas encor bien persuadé qu'il soit superflu. Car bien que M. Newton satisfasse quand on ne considere qu'une seule planete ou satellite, neantmoins il ne sçauroit

---

*) Leibniz bezieht sich hier auf die Abhandlung: Tentamen de motuum coelestium causis.

rendre raison par la seule trajection jointe à la pesanteur, pour quoy toutes les planetes d'un même systeme vont à peu pres le même chemin et dans le même sens. C'est ce que nous ne remarquons pas seulement dans les planetes du soleil, mais encor dans celles de Jupiter et dans celles de Saturne. C'est une marque bien evidente qu'il y a quelque raison commune qui les y a determinées, et quelle autre raison pourroit-on apporter plus probablement que celle d'une espece de tourbillon ou matiere commune qui les emporte? Car de recourir à la disposition de l'auteur de la nature, cela n'est pas assés philosophique, quand il y a moyen d'assigner des causes prochaines; et il est encor moins raisonnable d'attribuer à un hazard heureux cet accord des planetes d'un même systeme, qui se trouve dans tous ces trois systemes, c'est à dire dans tous ceux qui nous sont connus. Il m'etonne aussi que M. Newton n'a pas songé à rendre quelque raison de la loy de la pesanteur, où le mouvement Elliptique m'avoit aussi mené. Vous dites fort bien, Monsieur, pag. 161 qu'elle merite qu'on en cherche la raison. Je seray bien aise d'avoir vôtre jugement sur ce que j'avois pensé là dessus, et que j'avois gardé pour une autre fois, quand j'avois donné mes premieres pensées dans les Actes comme j'ay declaré sur la fin. En voicy deux voyes, vous jugerés laquelle vous semble preferable, et si on les peut concilier: concevant donc la pesanteur comme une force attractive qui a ses rayons à la façon de la lumiere, il arrive que cette attraction garde precisement la même proportion que l'illumination. Car il a esté demonstré par d'autres, que les illuminations des objets sont en raison reciproque doublée des distances du point lumineux, d'autant que les illuminations en chaque endroit des surfaces spheriques sont en raison reciproque des dites surfaces spheriques, par lesquelles la même quantité de lumiere passe. Or les surfaces spheriques sont comme les quarrés des distances. Vous jugerés, Monsieur, si on pourroit concevoir, que ces rayons viennent de l'effort de la matiere qui tache de s'eloigner du centre. J'ay pensé encor à une autre façon qui ne reussit pas moins, et qui semble avoir plus de rapport à vôtre explication de la pesanteur par la force centrifuge de la circulation de l'ether, qui m'a tousjours parue fort plausible. Je me sers d'une hypothese qui me paroist fort raisonable. C'est qu'il y a la même quantité de puissance dans châque orbite ou circonference circulaire concentrique de cette matiere circulante; ce qui fait aussi qu'elles se contrebalancent mieux et que chaque orbe conserve la sienne. Or j'estime la puissance ou force par la quantité de l'effect, par exemple la force d'élever une livre à un pied est le quart de la force capable d'élever une livre à quatre pieds, à quoy on n'a besoin que du double de la vistesse; d'où

il s'en suit que les forces absolues sont comme les quarrés des vistesses. Prenons donc par exemple deux orbes ou circonferences concentriques; comme les circonferences sont proportionelles aux rayons ou distances du centre, les quantités des matieres de châque orbe fluide le sont aussi; or si les puissances de deux orbes sont égales, il faut que les quarrés de leur velocités soyent reciproques à leur matieres, et par consequent aux distances, ou bien les velocités des orbes seront en raison reciproque soubsdoublée des distances du centre. D'où suivent deux corollaires importans, tous deux verifiés par les observations. Le premier est, que les quarrés des temps periodiques sont comme les cubes des distances. Car les temps periodiques sont en raison composée de la directe des orbes ou distances et de la reciproque des velocités; et les velocités sont en raison soubsdoublée des distances; donc les velocités periodiques sont en raison composée de la simple des distances et de la soubsdoublée des distances, c'est à dire les quarrés des temps periodiques sont comme les cubes des distances. Et c'est justement ce que Kepler a observé dans les planetes du soleil, et ce que les découvertes des satellites de Jupiter et de Saturne ont confirmé merveilleusement, suivant ce que j'avois vû remarqué par M. Cassini. L'autre Corollaire est celuy dont nous avons besoin pour la pesanteur, sçavoir que les tendences centrifuges sont en raison doublée reciproque des distances. Car les tendences certrifuges des circulations sont en raison composée de la directe des quarrés des velocités et de la reciproque des rayons ou distances. Or icy les quarrés des velocités sont aussi en raison reciproque des distances, donc les tendences centrifuges sont en raison reciproque doublée des distances, justement comme les pesanteurs doivent estre. Voila à peu près ce que j'avois reservé à un autre discours*), lorsque je donnois mes essais au public, mais il y a de l'avantage à vous faire part des pensées qu'on a, puisque c'est le moyen de les rectifier. C'est pourquoy je vous supplie de me faire part de vôtre jugement là dessus. Après ces heureux accords vous ne vous étonnerés peutestre pas, Monsieur, si j'ay quelque penchant à retenir les tourbillons et peutestre ne sont-ils pas si coupables, que M. Newton les fait. Et de la maniere que je les conçois, les trajections mêmes servent à confirmer les orbes fluides deferans. Vous dirés peutestre d'abord, Monsieur, que l'hypothese de quarrés des vistesses reciproques aux distances ne s'accorde pas avec la circulation harmonique. Mais la réponse est aisée: la circulation harmonique se rencontre dans châque corps à part, comparant les distances differentes qu'il a, mais

*) Siehe die Beilage.

la circulation harmonique en puissance (où les quarrés des velocités sont reciproques aux distances) se rencontre en comparant des differens corps, soit qu'ils décrivent une ligne circulaire, ou qu'on prenne leur moyen mouvement (c'est à dire le resultat equivalent en abregé au composé des mouvemens dans les distances differentes) pour l'orbe circulaire qu'ils décrivent. Cependant je distingue l'ether qui fait la pesanteur (et peutestre aussi la direction ou le parallelisme des axes) de celuy qui defere les planetes, qui est bien plus grossier.

Je ne suis pas encor tout à fait content des loix Elastiques qu'on donne, car il semble que l'experience ne s'accorde pas assés avec la regle, que les extensions des cordes (par exemple) sont comme les forces qui les tendent. C'est pourquoy j'en desire sçavoir vôtre sentiment. Quant à la resistence du milieu je crois d'avoir remarqué que les theoremes de M. Newton, au moins quelques uns que j'avois examinés, s'accordoient avec les miens. Ce qu'il appelle la resistence en raison doublée des velocités (en cas des temps égaux) n'est autre que celle, que j'appelle la resistence respective, qui m'est en raison composée des velocités et des elemens de l'espace, sans considerer si les temps sont pris égaux ou non, de sorte que je crois que je ne me suis point éloigné encor de ce que vous en avés donné; mais il me faudroit du temps pour y mediter.*)

Soviel enthalten die beiden Abschriften; in dem zweiten Entwurfe, der weiter geht, finden sich noch einige Stellen, die bemerkenswerth sind:

J'ay tousjours du penchant à croire que la variation de l'eguille aimantée a une cause reglée; quand on la decouvrira un jour, elle servira encor à mieux connoistre nostre systeme. M. Newton n'y a pas touché, je ne doute point que vous n'y aies pensé, Monsieur, et je souhaitterois d'en sçavoir vôtre sentiment.

Kepler s'est avisé le premier qu'on pourroit expliquer la pesanteur par l'effort que font les corps circulans de s'éloigner du centre, pensée dont M. des Cartes s'est fait honneur dépuis.

Beilage.

Unter den Leibnizischen Manuscripten ist die folgende kurze Abhandlung druckfertig vorhanden; vielleicht enthält sie den „discours", von dem Leibniz in dem vorstehenden Schreiben spricht.

*) Der übliche Schluß, Ort und Datum fehlen. — Vorstehendes Schreiben ist in mehreren Entwürfen und in zwei von Leibniz revidirten Abschriften vorhanden, offenbar ein Zeichen, mit wie großer Sorgfalt Leibniz das Schreiben abgefaßt hat.

Tentamen de physicis motuum coelestium Rationibus.

Astronomi superiorum temporum, ut Machinam Mundi explicarent, orbes solidos commenti sunt, aliis rursum exiguis orbibus insertis excavatos, quibus infixi planetae compositis pro Astronomi libitu motibus circumagi possent. Nec contemnenda illa meditatio fuit in ea infantia philosophiae, saltem enim imaginationi regendae inservire poterat, sed a veritate naturae longissime dissidebat.

Primus Tycho apparatum ex coelo sustulit, orbesque fluidos et phenomenis et rationibus consentire ostendit, quem posteriores magno applausu sunt secuti. Sed inde visa est augeri difficultas, neque enim apparebat, quid in libero aethere regeret planetas, intelligentias enim gubernatrices affingere perabsurdum et divino artificio indignum merito videbatur. Sympathiae autem et Magnetismi, etsi quadam Analogia juvarent, menti tamen non satisfaciebant, cum explicatione nova indigere judicarentur.

Non ita pridem Galilaeo, Torricellio, Cartesio, aliisque Philosophiae restauratoribus in mentem venit, Materiam aethream ad Oceani cuiusdam morem constanti motu actam secum rapere planetas. Res ergo eo rediit, ut Orbes quidem deferentes, sed fluidi ad motus coelestes explicandos requirantur. Sed quomodo ex certa regula motuum aetheris liquidi orirentur motus planetarii Leges, nemo quod sciam explicare aggressus est, et ipse Cartesius velut desperatum silentio transmisit.

Keplerus, vir maximi sane ingenii, Tychonicis observationibus adjutus, cum multa tentasset, varieque phaenomena numeris explicata improbo labore comparasset, tandem duas invenit regulas Generales, nempe primo Motum planetarium esse in Ellipsi, in cujus foco sit sol, secundo tempora esse ut sectores Ellipticos ex sole tanquam foco abscissos. Verum cum arearum proportio, vera licet et succedens, simplex videretur, omnesque ad lineas et angulos potius inclinarent, rem per varias motuum compositiones ex circulis determinatis derivatas explicare sunt conati Ismael Bullialdus, Sethus Wardus, aliique viri insignes, qui Kepleri coepta sunt prosecuti.

Tandem mihi haec ante annos aliquot profundius meditanti incidit ratio mire simplex, motuum planetariorum causas Physicas explicandi, unde apparet tantum abesse ut arearum proportio difficilis habenda sit, ut potius ex simplicissimis materiae aethereae motibus statim nascatur. Quod hoc loco paucis explicare operae pretium erit.

Nimirum videmus, baculum vel axem erectum ad perpendiculum in vase aqua pleno circa se rotatum omnem aquam et innatantes festucas circumagere, sic tamen ut vicina centro velocius, remotiora tardius circulentur, quod jam et ab aliis est annotatum. Pono igitur quod est

simplicissimum, velocitates materiae aethereae deferentis in orbe cuiusque planetae decrescere in proportione distantiarum a sole, seu Geometrica phrasi, velocitates esse distantiis a sole reciproce proportionales, eamque Circulationem voco harmonicam, ostendo enim si distantiae sint progressionis Arithmeticae, circulandi velocitates hoc modo fore progressionis Harmonicae.

Hinc jam Geometrica demonstratione conficio, in omni mobili quod Harmonica circulatione circa aliquod centrum agitur vel a materia aetherea harmonice circulante defertur, quemcunque mobile demum habeat motum proprium accedendi ad centrum vel a centro recedendi, tempora arcubus orbitae describendis impensa fore ut areas, radiis ex centro circulationis ad arcus terminos ductis abscissas. Caeteras horum motuum, abditas sane ac mirificas, sed simplices non minus ac naturae consentaneas rationes, quibus demonstratis spes est, faciliorem nobis paulatim aditum in rerum interiora factum iri, alias uberius exponemus.

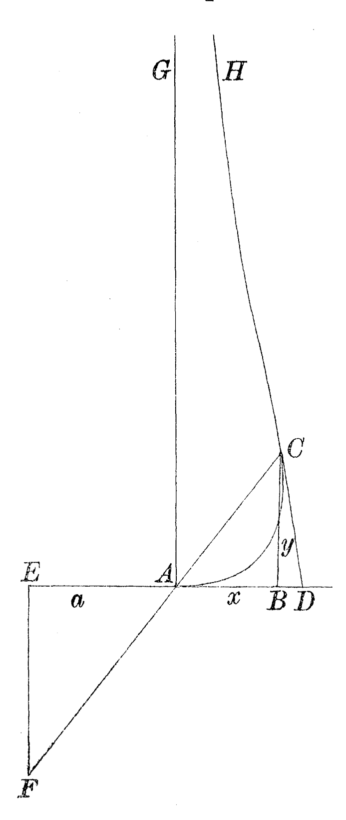
XIX.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 18 Nov. 1690.

Je repons à deux de vos lettres, par la premiere des quelles j'ay esté bien aise d'apprendre que le pacquet, où estoit mon Traité de la Lumiere, s'est enfin trouvé. et je vois dans l'autre que vous avez commencé d'en examiner le contenu, à quoy je vous prie de continuer, vous assurant que je recevray avec joye non seulement vostre approbation mais aussi vos objections. Je ne vous avois pas envoié les deux questions des lignes courbes pour vous donner de la peine en cherchant les solutions, mais croiant que vous auriez une methode preste pour trouver les courbes par la proprieté de leur Tangentes, ou pour determiner quand cela se peut ou non. Je commence à croire maintenant que cela n'est point, puisque la courbe, dans laquelle AB estant x, et sa perpend. BC y, on trouve BD distance du concours de la tangente egale à $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$; cette courbe, dis-je, a pour equation qui exprime sa nature, $x^3 + xyy \infty aay$. Car par la regle des Tangentes BD se trouve premierement $\infty \frac{2xyy - aay}{yy + 3xx}$, et si pour xx on substitue sa va-

leur $\frac{aay}{x} - yy$, on aura $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$. J'ay fabriqué cette ligne en mettant AE ∞ a, EF perpendiculaire à BAE, et en faisant que dans la droite FAC le quarré de AC soit egal au rectangle de AE, EF; car alors C est un point dans la courbe ACH, qui a son asymptote AG perpendic. à AB. Elle n'est dont point de ces Transcendantes comme votre Equation l'a faite. Et vous examinerez s'il vous plait, comment peut subsister la demonstration que vous en donnez dans vostre derniere. Pour moy j'avoue que la nature de ces lignes supertranscendantes, où les inconnues entrent dans l'Exposant, me paroit si obscure, que je ne serois pas d'avis de les introduire dans la geometrie, à moins que vous n'y remarquiez quelque notable utilité.



De ce que vous me mandez touchant vos speculations sur la ligne de la chaine pendante, qu'on peut appeller Catenaria, sçavoir que certaines choses données, vous en determinez les Tangentes, la dimension de la courbe, la surface du solide de sa rotation, et la dimension de l'espace compris de la courbe et de l'axe (vous ne dites pas de quelle ligne encore, car ces deux ne comprennent point d'espace) je croirois certainement que nous aurions trouvé les mesmes choses; car tout cela est dans le chifre que je vous ay envoié; si ce n'estoit cette difference dans nos equations d'une courbe auxiliaire, où j'ay $xxyy \infty a^4 - aayy$, au lieu que vous avez $xxyy \infty a^4 + aayy$. Cela me paroit etrange, et s'il n'y a point d'abus dans vostre calcul, il faut que vous ayez suivi quelqu'autre chemin que moy, par lequel peut estre vous serez allé plus avant. C'est pourquoy je vous prie de m'envoier vostre chifre, où les grandeurs soient determinées comme dans le mien, afin de voir si nous differons en quelque chose. Je trouve qu'au lieu de ma courbe, je viens de marquer, je puis substituer cette autre $xxyy \infty 4a^4 - x^4$, mais non pas la vostre. Il y a une faute à mon chifre que vous aurez la bonté de corriger, en mettant $\frac{1}{6}$ ec où j'avois escrit $\frac{2}{3}$ ec.

Vostre meditation pour les Tangentes par les foiers me paroit bien profonde. Elle suppose pourtant des choses qui ne peuvent estre admises comme evidentes. Et quoyque des tels raisonnements puissent quelque fois servir à inventer, l'on a besoin en suite d'autres moiens pour des demonstrations plus certaines. J'eus quelque part à la Regle de Mr. Fatio par les centres de gravité, comme il l'a avoué luy mesme dans les Journaux. Mais ce fut luy qui me montra le premier la faute de Mr. D. T.*)

Pour ce qui est de la Cause du Reflus que donne Mr. Newton, je ne m'en contente nullement, ni de toutes ses autres Theories qu'il bastit sur son principe d'attraction, qui me paroit absurde, ainsi que je l'ay desia temoigné dans l'Addition au Discours de la Pesanteur. Et je me suis souvent etonné, comment il s'est pu donner la peine de faire tant de recherches de calculs difficiles, qui n'ont pour fondement que ce mesme principe. Je m'accommode beaucoup mieux de son Explication des Cometes et de leur queues; et quoyque la chose ne soit pas sans cette grande difficulté, que vous remarquez fort bien, je ne trouve encore rien de meilleur que ce qu'il en dit, qui vaut mieux incomparablement que ce qu'en a imaginé des Cartes. Mr. Stair a tort, s'il dit que les corps poussez dans le vuide ne vont guere loin. Où est ce qu'il en a fait l'experience? et que peut il dire à celle, que moy et d'autres ont faite, de la plume qui tombe dans un tuyau de verre vuide d'air aussi viste que du plomb.

J'ay quelques meditations sur l'Aimant, mais la raison de la Variation de l'Eguille m'est inconnue, qui ne suit pas des loix certaines que je sache, quoyqu'il y en a qui en ont voulu etablir. Je trouve les effets de l'Ambre encore plus difficiles à expliquer que ceux de l'Aimant, principalement à l'egard de quelques nouveaux phenomenes, que j'ay trouvez, il n'y a guere, par mes experiences. J'ay regardé ce que vous avez donné dans les Acta de Leipzich en Jan. 1689 artic. 5. n. 3**), où je ne puis pas dire que je trouve que vous ayez consideré des resistences du milieu qui soient comme les quarrez des vitesses, tout vostre raisonnement dans cette matiere m'estant obscur et inintelligible. Je vois au contraire qu'à la teste de cet artic. 5. vous supposez motum retardatum proportione velocitatis, et non pas duplicata proportione velocitatis. Aussi ces Elemens egaux

*) Hierbei ist zu vergleichen, was Uylenbroek aus Huygens' Manuscripten beibringt (Christ. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebr. Exercitation. math. et philosoph. Fascicul. II. p. 56 sqq.).

**) In der Abhandlung von Leibniz: Schediasma de resistentia medii et motu projectorum gravium in medio resistente.

des temps que vous croiez que Mr. Newton et moy avons dissimulez, n'ont rien à faire, à mon avis, avec les resistences, puisqu'elles dependent uniquement de la vitesse des corps. Vous me pardonnerez aussi, si aux nombres 4 et 6 de ce mesme article je ne trouve rien, d'où je puisse entrevoir la quadrature de l'hyperbole par la progression $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc. puisqu'il n'y est pas dit un mot ni de progression ni d'hyperbole. Je vous assure que je n'ay pas pris cette progression de là, et que je n'ay point sceu non plus, que vous eussiez la Proposition generale qui comprend le circle et l'hyperbole, qu'apres l'avoir appris dans vostre derniere lettre. Vous deviez bien l'avoir publiée en suite de vostre premiere quadrature du cercle.

Ce qu'on vous a dit de la Carte de l'Asie Septentr. n'est pas sans fondement; Mr. Witsen Bourgem. d'Amsterdam estant sur le point de donner au public celle qu'il en faite avec bien de la peine et de la depense; à quoy mesme il se trouve pressé parce qu'on dit qu'une autre personne en promet une pareille. J'ay vu il y a plus d'un an la Carte de Mr. Witsen, mais elle n'avoit rien de certain touchant la continuité de l'Asie et de l'Amerique. Je n'ay plus sujet de me plaindre de Mrs. de Leipsich, ayant vu le raport exact qu'ils ont donné de mon Traité de la Lumiere avec des Eloges plus grands que je ne merite.

Je m'etonne de ne recevoir aucune nouvelle de Mr. Spener, qui avoit promis qu'il m'escriroit. Il est vray qu'il doit estre bien occupé à tenir ce college du quel il m'a laissé un project imprimé. Je ne scay s'il vous a debité une Experience avec du Mercure attiré par un siphon, que je ne pus croire, et que j'ay aussi trouvée fausse, et Mr. de Volder de mesme. Pour ce qui est de mes estudes dont vous demandez des nouvelles, je tasche de mettre en estat de paroitre au jour divers traitez, où la forme manque plus que la matiere, mais je ne puis pas travailler avec assiduité sans incommoder ma santé. Je ne crois pas que nous devions rien attendre de Mr. Hudde, quoyque je ne laisse pas de l'en presser quand je le vois. Mr. Arnaut est en ce pais, ou fort peu loin. C'est une merveille que cet esprit, qui ne se sent pas de la vieillesse. J'attens vostre lettre pour le mouvement des Planetes et suis etc.

XX.

Leibniz an Huygens.

A Hannover ce $\frac{14}{24}$ de Novembre 1690.

Je reponds incontinent à la vostre du 18 de Novembre, afin que vous ne me soubçonniés pas d'une vanité ridicule, comme si j'avois cru, que ce que j'avois dit dans les Actes de Leipzig vous avoit servi pour vostre series $\frac{1}{1}a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc. Vous estes trop sincere pour dissimuler l'usage que vous faites des pensées des autres, et vous avés marqué en cela même que celles de Mr. Newton vous avoient servi. J'avois dit seulement qu'il y a de l'accord, et cela est ainsi, car je dis en termes expres art. 5. n. 3, resistentias esse in ratione composita elementorum temporis et quadratorum velocitatum. De sorte que les elemens du temps estant pris egaux, comme on les prend ordinairement, les resistences sont en raison doublée des vistesses; et cela s'ensuit de ce que j'avois dit, que les resistences sont en raison composée des vistesses et des elemens de l'espace. Car les elemens de l'espace sont en raison composée des elemens du temps et des velocités. En symboles, soit resistence r, vistesse v, temps t, espace s, leurs elemens dr, dv, dt, ds, il est tousjours vray que les ds sont comme $dt \cdot v$, et icy r est comme $ds \cdot v$, donc r comme $dt \cdot v^2$. Et quoyque les resistences dependent de la vistesse, comme vous dites, elles dependent aussi de la quantité des parties du milieu qui resiste. Un globe en mouvement rencontrant un globule en repos, la perte qu'il fait de sa velocité est proportionnelle à la velocité (les grandeurs des globes et tout le reste demeurant, hormis la velocité) comme il est aisé de demonstrer. Mais plus il rencontre des globules, et plus grande est la perte; or le milieu estant uniforme, le nombre des globules sera comme les parties de l'espace. Mais afin que vous jugiés mieux de cet accord, je dis que j'ay precisement determiné les mesme rapport entre les temps et les velocités. Il est vray qu'il y a eu une trajection ou transposition dans l'edition, qui est de ma faute, mais j'estois en voyage et bien distrait. En voicy la correction: c'est qu'il faut mettre les espaces pour les temps et vice versa dans les propositions 4 et 6 de l'article 5, et apres avoir ainsi corrigé les propositions, il faut donner la demonstration de l'une à l'autre, et vice versa. De sorte voicy comme il falloit dire dans la prop. 4 en y mettant la prop. 6 corrigée: si veloci-

tates acquisitae sunt ut sinus, erunt tempora impensa ut logarithmi sinuum complementi, posito radium seu sinum totum esse ut velocitatem maximam. Et à cela s'ajuste la demonstration qui est mise à la prop. 4, cum enim (j'en repete les paroles) incrementum velocitatis sit differentia inter impressionem et resistentiam, hinc ex praecedenti statim sequitur impressionem (gravitatis) esse ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximae ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis. Ex quo scimus per quadraturas, summam impressionum, quae est proportionalis assumto tempori, esse ut logarithmum, si numerus sit, qualem in propositione hac enuntiavimus. Ces sont mes paroles precises, et pour vous faire voir qu'elles s'ajustent à la proposition ainsi corrigée et transposée, aussi bien qu'avec vos découvertes, appellons comme auparavant les temps t, les velocités v, la plus grande velocité a, les resistences r. Or il est manifeste que les elemens des velocités, c'est à dire les differences de deux velocités prochaines se trouvent en adjoutant à la velocité precedente la nouvelle impression faite par la gravité et en soustrayant en mesme temps la resistence ou perte causée par le milieu, donc dv (increment de la velocité precedente pour faire la suivante) est $dt - r$. Or $r = \frac{dt \cdot v^2}{a^2}$, donc $dv = dt - \frac{dt \cdot v^2}{a^2}$ ou bien $\frac{dt}{dv} = \frac{a^2}{a^2 - v^2}$, c'est à dire, comme parle ma demonstration: impressio gravitatis (dt) est ad incrementum velocitatis (dv) ut quadratum velocitatis maximae (a^2) ad excessum hujus quadrati super quadratum praesentis velocitatis ($a^2 - v^2$). Car dt expriment aussi bien les elemens des temps, que les impressions de la pesanteur, qui sont proportionnelles à ces elemens. Par là vous voyés, Monsieur, que $t = \int \frac{dv \cdot a^2}{a^2 - v^2}$, ou, parlant à l'ordinaire, que le temps est la somme de $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$, c'est à dire selon vostre expression, que le temps est $\frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. Mais selon ma mienne, les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$, c'est à dire les velocités v estant comme les sinus, les temps sont comme les logarithmes sinuum complementi. Et vous trouverés que ces deux expressions s'accordent. J'avois crû mieux faire en m'exprimant ainsi. — En échange la proposition 4 corrigée (les espaces estant mis pour les temps) doit estre mise à la place de la sixieme et alors la proposition sixieme veritable sonnera ainsi: si rationes inter summam et differentiam velocitatis maximae et minoris assumtae sunt ut numeri, spatia qui-

bus assumtae velocitates sunt acquisitae, sunt ut logarithmi. Et alors la demonstration de la proposition 6 repondra à sa proposition. En symboles les espaces estant marqués de s et les elemens de ds comme auparavant, puisque $r = \frac{ds \cdot v}{a}$ et $dt = \frac{a}{v} ds$, substituant ces valeurs dans l'equation susdite $dv = dt - r$, on aura $ds = \frac{dv \cdot av}{a^2 - v^2}$ ou $s = \int \frac{dv \cdot av}{a^2 - v^2}$. Ce qui depend encor de la quadrature de l'Hyperbole ou des Logarithmes. On le pourroit encor exprimer par cette series $s = \frac{1}{2} v^2 + \frac{1}{4} v^4 + \frac{1}{6} v^6$ etc., mais j'ay crû mieux faire en disant, que les velocités estant v, les espaces sont comme les logarithmes des raisons de $a + v$ à $a - v$. Ainsi j'ay ces expressions exponentiales (que vous appellés en riant supertranscendentes) $\sqrt{(1 - v^2)}$ comme b^t et $\frac{1 - vv}{1 + v}$ comme b^s, b estant un certain nombre constant. Je ne voy pas, pourquoy vous trouvés d'obscurité dans ces expressions, car il n'y en scauroit plus avoir que dans les logarithmes ordinaires qui ne vous scauroient donner aucune peine. Et puisque vous avés adjouté quelque limitation à vostre arrest contre ces sortes de formules, en les rejettant, à moins que je n'y aye remarqué quelque utilité notable, j'acheveray d'instruire le procés, afin que vous puissiés prononcer une sentence definitive. Je crois donc que dans les lignes qui passent les equations de l'Algebre ordinaire, c'est tout ce qu'on peut souhaiter à leur egard en Analyse, que de les exprimer par ces equations nouvelles. Si on le pouvoit tousjours faire, on connoistroit par là parfaitement la nature de la ligne, on pourroit donner ses tangentes, ses quadratures, extensions, centres et même ses intersections avec une courbe donnée, et resoudre par ce moyen des problemes transcendans determinés, enfin, je ne voy rien de possible, qui resteroit à faire apres cela, et le tout ne supposeroit que la construction des logarithmes, outre les constructions de la geometrie ordinaire. On pourra encor determiner les cas quand certains points demandés se peuvent donner par la geometrie commune. Si ces raisons ne valent rien, je me suis bien trompé de mon calcul. Je croyois vous avoir communiqué quelque chose de fort bon et de grand usage. Et quand j'aurois fait une beveue dans le cas, que je vous ay envoyé, cela ne pourroit rien diminuer de la force de la methode. Par les expressions surdites je donne une equation qui exprime la relation entre l'espace et le temps, car il se trouve $\frac{1 - b^s}{1 + b^s} = \sqrt{(1 - b^t)}$. De sorte que les temps estant donnés en nombres, les

espaces se trouvent par là et vice versa; en supposant la construction des logarithmes, on aura bien de la peine à arriver icy par une autre voye à une equation finie.

Apres avoir examiné la courbe que vous assignés pour la proprieté des Tangentes, que vous m'aviés proposée, Monsieur, je trouve que vostre courbe semble y repondre, mais qu'elle n'y repond pas de la maniere que la formule est conçue, au lieu que les miennes y repondent. Et il s'y passe quelque chose de curieux à l'égard des signes. Je trouve donc que l'equation estant $x^3 + xy^2 = a^2y$, il provient $DB = \frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$, au lieu que vous m'aviés proposé $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$. Et afin qu'on ne pense pas que c'est la mesme chose, et qu'il faut parler de la façon posterieure, lorsque le point D doit estre pris ad partes oppositas, et non vers A, je reponds que suivant le calcul il est tousjours vray, soit que CD se mene supra ou infra, c'est à dire, vers A ou ad partes oppositas, que DB est $\frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$ dans votre courbe, puisque cette valeur s'obtient par un calcul general, et cela prouve seulement, que lorsque cette valeur est une grandeur negative, D doit estre pris non supra (vers A) mais infra B. Et afin que vous jugiés mieux de la fidelité de cette remarque, et que l'analyse ne scauroit mener à vostre courbe par la proprieté que vous aviez proposée, vous trouverés que les courbes, que j'avois envoyées, satisfont rigoureusement et uniquement à la valeur $(2x^2y - a^2x):(3a^2 - 2xy)$ et ne scauroient satisfaire à la valeur $(a^2x - 2x^2y):(3a^2 - 2xy)$; car jettant les yeux sur ma derniere lettre, vous trouverés cette equation $\frac{3dx}{x} + \frac{dy}{y} = 2xdy + 2ydx$, dont je puis venir à bout. Car la somme de $2xdy + 2ydx$ est $2xy$. Mais si la valeur est $(a^2x - 2xy^2):(3a^2 - 2xy)$, vous trouverés $\frac{3dx}{x} - \frac{dy}{y} = -2xdy + 2ydx$. Mais la somme de $-2xdy + 2ydx$ ne se trouve pas de même, et il faut avoir recours à d'autres adresses, dont je ne m'estois pas servi, parceque j'estois devenu fort aisément à ce que vous m'aviés demandé. Apres tout cela, je m'imagine que vostre arrest provisionnel sera adduci, et comme vous devés juger en dernier ressort et sans appel, vous serés d'autant plus porté à faire droit aux parties.

Je suis bien aise, que Mrs. de Leipzig vous ont fait justice dans leurs Actes: mais en rapportant la seconde partie de vostre traité il y a une beveue dont je suis fasché. Celui qui a donné cette relation s'est imaginé que vostre quadrature de l'hyperbole par $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ etc.

estoit la même que celle que j'avois jointe à ma quadrature arithmetique du cercle, parceque je voyois une certaine analogie assez belle. Cependant la mienne est celle de Mercator, tirée de $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ etc. et par consequent differente de la vostre. Je vous asseure que je n'ay aucune part à ce mesentendu et même je feray en sorte que cela soit remarqué et redressé.

Je voudrois pouvoir satisfaire à tous les autres points de vostre lettre, et sur tout examiner attentivement ce que j'ay fait sur la figure de la chaine, pour faire la comparaison avec vos decouvertes. Mais je suis à present enfoncé dans des vieux papiers et parchemins de nos archives et pressé pour les depecher. Ainsi il me faut prendre du temps pour cela. J'ay demonstration de la regle de la composition des mouvemens, qui me sert de fondement à la decouverte des tangentes par les foyers. Je suis bien aise de scavoir que c'est vous dont Mr. Fatio entendoit parler, pour joindre cette obligation aux autres qu'on vous a. — Mr. Spener ne m'a pas écrit non plus. J'espere qu'il sera plus exact en experiences qu'en correspondences. J'avois eu autrefois la vue d'essayer, si, par le moyen du vuide, on ne pourroit tirer quelque chose des corps, entre autres en y joignant des filtres, puisque ce seroit une espece de presse, plus subtile et plus uniforme que l'ordinaire. Peut estre que Mr. Spener a pensé à quelque chose de semblable avec son siphon, qui doit attirer, mais si cela estoit, il ne devroit pas avoir manqué. Ainsi je ne scay pas bien ce que c'est.

Puisque vous avés fait des experiences de consequence avec l'ambre, je vous diray que feu Mr. Gericke en avoit fait de fort considerables avec des corps electriques. Il m'en ecrivit un jour et j'en chercheray le detail. Ce qui m'a fait croire que la variation de l'éguille a quelque regle (quoyqu'inconnue encor) c'est que j'ay vu des journaux des grands voyages, où elle estoit tres souvent observée et où elle ne changeoit pas par sauts mais peu à peu.

Comme ma lettre sur les planetes et autres points, que je vous destinois il y a longtemps, est quasi faite, je la finiray et la mettray au net, pour la vous envoyer aussitost que je seray un peu plus libre pour pouvoir vaquer à des pensées que je n'ay plus presentes dans l'esprit. Je vous remercie de ce que vous dites de Mrs. Hudde et Witsen. Quoyque je souhaite fort de voir vos pensées publiées, je prefere l'interest de vostre santé à celui de nostre utilité. Peut-estre pourriés vous donner souvent des pensées detachées qui seroient de consequence sans vous tant attacher à la forme des ouvrages reguliers. Je suis avec tout le zele que je dois etc.

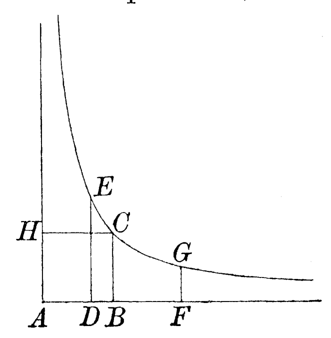
XXI.

Leibniz an Huygens.

A Hannover ce 25 de Novembre v. s. 1690.

J'apprehende de vous importuner trop souvent et d'interrompre vos pensées que j'estime pretieuses. Mais la raison qui me fait écrire maintenant, est que ma derniere, qui comme j'espere vous aura esté rendue maintenant, a besoin de suite pour satisfaire entierement aux deux problemes que vous m'aviés proposés. Je crois qu'il n'y a plus rien à demander à l'égard de l'une des lignes proposées, où DB devoit estre $\frac{2x^2y - a^2x}{3a^2 - 2xy}$, car en ce cas, prenant les signes au pied de la lettre comme vous les aviés exprimés, les lignes transcendantes, dont je vous ay envoyé l'equation, y satisfont parfaitement. Mais en cas qu'on veuille $DB = \frac{a^2x - 2x^2y}{3a^2 - 2xy}$, la ligne que vous avés donnée, vous meme y satisfait. Je viens à l'autre question, scavoir quelle ligne satisfait, DB devant estre $\frac{y^2}{2x} - 2x$, ou bien $2x - \frac{y^2}{2x}$, car j'ay voulu chercher l'un et l'autre, afin qu'il ne manque rien quelque interpretation que vous puissiés donner à vostre demande. Et il est à noter que les courbes encor icy sont toutes differentes selon qu'on change les signes, au lieu qu'auparavant le changement des signes a fait venir une ordinaire pour une transcendante. Je dis donc que lorsqu'on demande $DB = \frac{y^2}{2x} - 2x$, comme vous l'aviés proposé, l'équation de la courbe est $6a^6x^2y^4 = a^6y^6 + r^{12}$, d'où la dite valeur de DB viendra incontinent par le calcul ordinaire des tangentes. Mais lorsqu'on demande $DB = 2x - \frac{y^2}{2x}$, la courbe qui satisfait est assez differente de la precedente et son equation est $2r^4x^2 = r^4y^2 + a^2y^4$, qui est moins élevée que l'autre de deux degrés. On peut varier la courbe en changeant la proportion de r à a. Ainsi j'espere maintenant de m'estre justifié un peu, et que vous reconnoistrés, Monsieur, que j'ay eu quelque raison de m'attacher aux signes de la maniere que vous les aviés marqués vous meme. Car suivant l'Analyse toute pure (comme il est necessaire de faire quand on veut chercher des solutions par son moyen) les signes doivent estre gardés tels que le calcul les fournit, sauf par apres à celui qui fait la construction de mener la ligne CD comme il faut, selon que la valeur de DB est

affirmative ou negative. Ces petits changemens sont quelque fois cause de beveues, surtout en des methodes, où l'on ne s'exerce pas souvent, comme il m'est arrivé en vous escrivant ma derniere, où le calcul que je vous ay envoyé touchant la relation entre les espaces et velocités, item entre les temps et les velocités, est bon, mais la consequence que j'en avois tirée n'est pas bonne entierement. Car les temps estant t, espaces s, velocités v, la plus grande velocité a, il est vray, comme j'ay marqué, que les temps sont comme les sommes de $\frac{a^2}{a^2 - v^2}$, et les espaces comme les sommes de $\frac{a^2 v}{a^2 - v^2}$. Mais au lieu d'en tirer cette consequence que les temps sont comme les logarithmes de $\sqrt{(a^2 - v^2)}$ et les espaces comme les logarithmes de la raison de $a + v$ à $a - v$, je devois dire le contraire. Et peut-estre ne seriés vous pas faché, Monsieur, d'en voir la demonstration. Soit ECG l'hyperbole, dont le centre A, le vertex C, les asymptotes AB, AH, et BC costé du carré AC soit l'unité ou a, dont le logarithme 0. L'on scait que l'espace ou parallelogramme hyperbolique (comme vous l'appelés) BG sera le logarithme de AF, mais $-$BE sera le logarithme de AD, ou bien BE sera le logarithme de DE ou de $\frac{1}{AD}$.



Donc il est clair que BD ou BF estant v, alors BG ou le log. de $1 + v$ sera $\frac{1}{1}v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3$ etc., et BE ou le log. de $\frac{1}{1 - v}$ sera $\frac{1}{1}v + \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{4}v^4$ etc., donc BG + BE ou le log. de $\frac{1 + v}{1 - v}$ sera $\frac{2}{1}v + \frac{2}{3}v^3 + \frac{2}{5}v^5$ etc., ce qui est le double de la somme de $\frac{a^3}{a^2 - v^2}$; mais BG $-$ BE ou le log. $(1 + v)$ par $(1 - v)$ c'est à dire le log. de $1 - v^2$ sera $-\frac{2}{2}v^2 - \frac{2}{4}v^4 - \frac{2}{6}v^6$ etc. Ou bien le log. de $\frac{1}{\sqrt{(1 - v^2)}}$ sera $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$ etc. Ainsi $\sqrt{(1 - v^2)}$ estant en progression geometrique decroissante, $\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{6}v^6$ (c'est à dire la somme de $\frac{a^2 v}{a^2 - v^2}$) seront en progression arithmetique croissante. Cette methode servira en beaucoup d'autres rencontres; donc les velocités estant v, les temps seront les logarithmes de $\frac{1 - v}{1 + v}$, et les espaces seront les logarithmes

de $\sqrt{(1-v^2)}$. Ainsi ce que j'avois dit dans les Actes imprimés n'a pas besoin de la correction que j'avois crû. Et l'equation exponentiale que je vous avois envoyée pour la relation des espaces et temps aura lieu, pourveu qu'on y change s en t et vice versa.

Je m'imagine que vous jugerés maintenant que les equations exponentiales n'ont rien d'obscur. Elles introduisent point de nouvelles lignes comme il semble que vous l'aviés pris, mais elles expriment mieux celles dont on a besoin, et les expriment d'une maniere au delà de laquelle il n'y a rien à pretendre. Aussi quand j'ay dit que l'équation d'une certaine ligne est $\frac{x^3y}{h} = b^{\frac{2xy}{\cdot}}$, vous voyés bien maintenant que c'est comme si j'avois dit la nature de la ligne estre telle que x^3y estant en progression geometrique, 2xy ou meme xy sont en progression arithmetique. On peut proposer de semblables problemes en nombres, par exemple soit $x^x + x = 30$, alors on satisfera faisant $x = 3$. Et ces problemes ne se peuvent construire geometriquement que par les lignes dont je me sers, lorsque les racines ne sont pas rationelles. Et je croirois àvoir perfectionné l'Analyse, si je pouvois toujours reduire les quantités transcendantes à un tel calcul. Et je seray bien aise de scavoir ce qui vous en semblera maintenant que le proces est assés instruit pour que vous puissiés donner arrest.

Vous reconnoitrés peut-estre aussi que je n'ay pas eu tant de tort de dire que ma maniere de calculer sert pour les problemes des tangentes données. Quand j'avois vu que vos deux lignes proposées estoient in potestate, je m'estois contenté d'en calculer l'une qui venoit plus aisement, et j'attendois pour l'autre d'apprendre si elles pouvoient servir. Mais je voy que vous les aviés proposées tentandi gratia. Néantmoins j'ay esté bien aise de voir si je vous pourrois donner satisfaction depuis que j'ay vu que la premiere n'avoit pas trouvé une audience favorable. Cependant je ne me vante pas d'avoir poussé cette methode à sa perfection. Il s'agit sans doute de ce qu'il y a de plus profond et de plus difficile dans la Geometrie et dans l'Analyse. Mais je puis dire que je n'en suis pas fort éloigné et j'espererois d'en venir à bout, si j'avois le loisir qu'il faut. Ce qu'il y a de beau entre autres dans cette methode est, qu'elle mene directement à des transcendantes, comme elle doit aussi, puisque ordinairement on y doit venir dans ces questions, à peu pres comme ordinairement les racines des equations sont sourdes. Mais lorsque les courbes ordinaires peuvent satisfaire, les transcendantes mesmes le monstrent. J'ay une autre maniere particuliere qui reussit toutes les fois que la courbe est ordinaire, mais je ne m'en sers pas volontiers à cause de sa prolixité; il

faudrait faire des tables pour rendre aisée. J'estime bien plus la generale, mais je ne l'ay pas encore portée à sa perfection. Mais vous serés las de ces bagatelles. — Il est temps que je finisse en me disant comme je puis faire avec beaucoup de zele et de sincerité etc.

P. S. Je vous envoyeray tout ce que j'ay promis, lorsque je seray un peu plus en estat de mediter à des choses que je n'ay plus presentes dans l'esprit.

XXII.

Huygens an Leibniz.

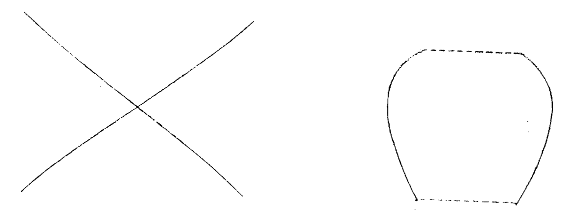
A la Haye ce 19. Decembre 1690.

A cause d'un voiage de quelques jours que j'ay esté obligé de faire à Amsterdam, pour avoir soin de l'embarquement de mes horloges à Pendule dans les vaisseaux qui vont aux Indes, je n'ay pu repondre plustost à deux lettres que j'ay eu l'honneur de recevoir de vostre part.

J'estime beaucoup vostre solution pour ma seconde ligne courbe, et si vous avez une methode qui reussisse tousjours, quand ce ne seroit que lorsque la courbe est ordinaire, vous augmenterez la Geometrie d'une invention fort considerable en la donnant au public. Mais j'ay tousjours de la peine à croire que la regle universelle se puisse trouver, sur tout quand les termes algebraiques de la construction donnée pour la Tangente sont beaucoup deguisez par la substitution des valeurs. Et il faudroit encore une preuve, où il y eust plus de difficulté que dans ma dite courbe. Mais je ne veux pas vous en donner la peine, si vous ne le souhaitez vous meme. Il me semble que dans cette courbe, par un calcul retrograde on peut connoistre l'Equation, d'où les termes de la construction ont esté produits: et surtont, cela n'est pas difficile dans ce cas, où vous avez trouvé l'Equation de 6 dimensions, scavoir où la soutangente estoit donnée $\frac{yy}{2x} - 2x$. Je me sers icy de vostre correction pour les signes + et —, et j'avoue que dans toutes les deux courbes je les devois avoir mis comme vous dites, parce qu'en suivant simplement l'operation de la Regle, les termes viennent de cette façon. Mais comme j'ay accoutumé de m'en servir avec des signes contraires au numerateur, en avertissant de quel costé la Tangente doit estre prise, cela a esté cause de ce renversement. J'ay autrefois escrit la demonstration et l'origine de cette Regle des Tangentes, et Mrs. de l'Academie

de Paris ont fait imprimer ce petit traité depuis peu, avec quelques autres, tant de moy que de quelques uns d'entre eux. Il y a là aussi de moy une nouvelle demonstration et tout à fait differente de celle d'Archimede pour l'Equilibre de la Balance, laquelle je seray bien aise que vous voyez, celle d'Archimede m'ayant tousjours paru defectueuse, ainsi qu'à bien d'autres. Mais on ne peut rien avoir de ce qu'on imprime en France.

Pour ce qui est de vostre Courbe de 4 dimensions, dont l'Equation est $2r^4xx \propto r^4yy + aay^4$, ou qui est la mesme chose, $2aaxx \propto aayy + y^4$, elle satisfait parfaitement, je l'avoue, à ma soutangente donnée $-\frac{yy}{2x} + 2x$. Et pourtant ce n'est pas là l'Equation de ma courbe dont j'avois tiré ces termes, ce qui peut estre vous surprendra. Mon Equation estoit $2aaxx \propto aayy - y^4$, qui donne tout une autre courbe que la vostre. Il sembleroit d'abord qu'il y aurait une mesme construction de tangente pour deux courbes differentes, mais à y prendre bien garde, on voit



que les constructions different aussi, parce que dans la vostre, la quantité $-yy + 4xx$ est tousjours affirmative, et que dans la mienne elle est tousjours negative. Vostre ligne a la figure d'une croix, et la mienne celle de deux demi-ovales posées à certaine distance. Celle-cy se peut quadrer, ce que je ne sçay s'il convient aussi à la vostre. Je voudrois bien essaier dans toutes deux ce que pourroit faire M. D. T. par la methode qu'il pretend d'avoir.

Touchant la courbe Exponentiale que vous avez trouvée pour ma premiere soutangente donnée $\frac{2xxy - aax}{3aa - 2xy}$, je vous prie de me dire, si vous pouvez representer la forme de cette courbe en y marquant des points ou par quelque maniere que ce soit, ou si elle vous sert seulement à pouvoir decider qu'il n'y a point de courbe ordinaire qui y convienne, ni de transcendante non Exponentiale, comme sont les cycloides, quadratrices etc.

J'ay dit que vostre equation $2r^4xx \propto r^4yy + aay^4$ ne differe pas de $2aaxx \propto aayy + y^4$. Et cela paroit parce qu'elle se reduit à $\frac{2r^4xx}{aa} = \frac{r^4yy}{aa} + y^4$ et que $\frac{r^4}{aa}$ est une quantité donnée. Par consequent

cette courbe ne se peut point varier, comme vous avez creu, en changeant la proportion de a à r, non plus que la parabole se varie en prenant le parametre plus ou moins grand. Par la mesme raison vostre Equation de 6 dimensions $6a^6xxy^4 \propto a^6y^6 + r^{12}$ revient à $6xxy^4 \propto y^6 + a^6$, et la courbe est de mesme invariable.

Il y a plus d'un an que j'ay receu deux lettres de Mr. Fatio, dans lesquelles il propose une Regle renversée des Tangentes, mais comme elle paroissoit d'une longue discussion, et que d'ailleurs je ne pouvois croire qu'elle fust parfaite, j'ay esté jusqu'icy sans l'examiner: ce que j'ay maintenant envie de faire, mais je n'ay pas ces lettres dans cette ville.

Je ne scay pas pourquoy vous voulez que j'aye prononcé trop severement contre les courbes Exponentiales, puis que je n'ay pretendu les rejetter qu'en cas qu'elles ne soient de nulle utilité. Car si elles servent à exprimer d'autres courbes dont on a besoin, et si par leur moyen vous trouvez les espaces des chutes par un medium resistens, lorsque les temps sont donnez, et que de plus elles vous aident à trouver les courbes par la proprieté des tangentes, je les estimeray grandement, car je n'aime rien tant que les nouveautez qui tendent à l'accroissement des sciences. Il s'agit de scavoir s'il est bien seur qu'on en puisse tirer tous ces avantages; ce que voulant me prouver, vous supposez que j'entens parfaitement tout vostre calcul des Equations Exponentiales et Logarithmiques, ce qui n'est point; et ainsi vous instruisez le proces (pour demeurer dans les termes de vostre similitude) devant un juge qui n'entend pas bien vostre langue. Je n'ose pas aussi vous demander plus d'eclaircissement, voiant bien que cela seroit trop long pour des lettres. Je souhaiterois de vous pouvoir entretenir coram sur ces matieres, et je ne desespere pas qu'à cette occasion que les Princes d'Allemagne vont venir icy à l'arrivée du Roy d'Angleterre, Mr. le Duc de Hanovre ne s'y rende aussi, et vous, Monsieur, à la suite de Son Altesse, dont certainement j'aurois bien de la joye.

Les Acta de Leipsich ne nous viennent icy que de deux en deux mois; ainsi je n'ay pas encore vu ceux de Novembre, où vous dites qu'on a fait une bevue à l'egard de ma progression pour la quadrature de l'Hyperbole. Cependant comme cela me fait tort, vous m'obligerez si vous pouvez faire en sorte qu'il soit redressé. Vostre excuse au reste est merveilleuse, quand vous m'assurez de n'avoir aucune part à ce mesentendu. J'adjoute icy à propos de cette quadrature, que je ne vois pas que vostre progression $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. responde à la mienne, parce que vous ne vous servez pas, comme moy, de la tangente du

secteur hyperbolique pour en faire v, lorsque le demiaxe est 1. L'application que vous en faites aux chutes des corps est encore bien obscure, et vous devez l'avouer vous mesme, apres les corrections reiterées que vous avez apportées à ce raisonnement. Et quant aux resistences de l'air, s'il est vray que vous les ayez considerées comme estant en proportion double des vistesses, il faut au moins changer l'inscription de l'article 5 de vostre derniere, en mettant proportione quadratorum velocitatis.

J'ay le livre de Mr. Guericke, où il raporte ses Experiences de l'Ambre. S'il vous en a communiqué encore d'autres, je seray bien aise d'y participer. Plusieurs des miennes ont esté faites en vue de certaines hypotheses, que je me suis imaginées pour expliquer cette admirable attraction et ses divers phenomenes, mais je ne suis pas encor venu à bout de cette speculation. Je vous demande pardon de vous avoir derobé du temps par une si longue lettre et vous prie de croire que je suis etc.

XXIII.

Leibniz an Huygens.

Hannover ce 27 de Janvier v. s. 1691.

Je n'ay pas osé vous importuner trop souvent en écrivant lettre sur lettre; de plus j'étois fort accablé depuis ma derniere, ayant esté deux fois à Wolfenbuttel et une fois à Hildesheim pour chercher des memoires historiques, et ayant repondu à plus de 40 lettres dont la pluspart avoient esté differées et demandoient quelque attention. Il est vray qu'il y avoit un mot dans la vostre, qui m'avoit tenté de repondre sur la champ, mais j'ay cru qu'il ne falloit pas écrire pour cela seul. En effect, j'ay esté le plus surpris du monde de vous voir capable d'un soubçon aussi mal fondé que l'estoit celui qui paroissoit, lorsque vous disiés trouver mon excuse merveilleuse. Mais il n'y avoit point d'excuse, Monsieur, et je ne pouvois pas en faire d'une chose où je vous asseure encor de n'avoir eu aucune part. Les Msr. de Leipzig ont mis dans leur journal ce qu'ils ont dit de la 2. partie de vostre ouvrage, où est l'endroit dont vous vous plaignés, avant que je l'eusse sçu ou vu, ou y contribué en aucune façon. J'avois même dessein de leur envoyer quelque petit discours pour estre mis à la suite de ce qu'ils en diroient et pour comparer ce que vous et Mr. Newton avés dit de la

resistence du milieu, avec ce que j'en avois publié, et je suis asseuré que vous n'auriés pas eu sujet de vous en plaindre. Mais j'appris qu'ils avoient déja depeché vostre ouvrage, et je differay mon dessein à une autre occasion pour voir premierement ce qu'ils en avoient dit. Si je ne vous honnorois pas autant que je fais, je negligerois une accusation qui n'a pas le moindre fondement. Car je ne voy pas ce qui vous a pu mouvoir à ne pas adjouter foy à une chose de fait dont je vous avois asseuré. Mais vous estimant autant que je dois, je bien aise de vous desabuser. J'ay une lettre de Mr. Mencken, Professeur de Leipzig, qui a soin des Actes, datée du 28. d'Octobre vieux stile, lorsque leur mois de Novembre étoit déja imprimé (car il paroist le premier jour du mois) où il me mande (sur ce que je lui avois écrit à l'occasion de vôtre lettre, où vous vous étonniés de leur silence) que j'en trouverois une relation convenable dans les mois d'Octobre et de Novembre (von des Herrn Hugenii Buch werden sie in den October und November Actorum gebührende relation finden). Il adjoute que cette fois leur Novembre avoit esté achevé trois semaines plustost qu'à l'ordinaire. Si vous en desirés voir l'original, je le vous envoyeray. Peut-estre que la vue de ce mois vous aura déja detrompé, et vous aurés remarqué aisément que ce qu'on y dit du consentement de vostre series avec celle que j'avois donnée il y a plusieurs années, estant manifestement erronnée, ne pouvoit estre attendu du moy. Je feray temoigner le contraire comme je vous l'ay promis. Mais tout ce proces importe bien peu. Car vous ou moy n'avions qu'à voir l'equation de la courbe pour connoistre la series, et vous ne l'aviés reduit à l'Hyperbole que sur la demonstration de Mr. Newton, au lieu que je l'avois fait immediatement et avois preferé l'expression par les logarithmes. Mais je n'ay garde de m'imaginer que ce que j'en avois dit vous y ait servi. Je n'avois pas pensé pour cette fois à la tangente, ny eu recours à mon theoreme general marqué dans une de mes precedentes, n'ayant eu en vue qu'une expression degagée de toute consideration de la figure, que les logarithmes me fournissoient la plus analytique que je pouvois souhaiter. C'est pourquoy je ne comprends pas comment vous dites de ne pas voir que ma progression $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. réponde à la vôtre, parceque, dites vous, je ne me sers pas de la tangente et du secteur hyperbolique. Mais qu'ay je besoin de penser à cette tangente et à ce secteur? N'est ce pas assés que je donne moyen d'exprimer la quadrature de la figure dont l'ordonnée est $\frac{1}{1 - v^2}$, c'est à dire d'exprimer la grandeur de la series

$v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. $= t$ par les logarithmes, disant que v estant les velocités, les temps t sont comme les logarithmes de $\frac{v+1}{v-1}$, et vous trouverés tousjours que $\int \frac{dv}{1-v^2}$ ou $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. repond au logarithme de $\frac{v+1}{v-1}$, c'est à dire les $\frac{v+1}{v-1}$ estant pris en progression geometrique, les grandeurs égales à $v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. seront en progression arithmetique. C'est ce que j'avois dit art. 5. n. 4: Si rationes inter ($v+1$ et $v-1$) summam et differentiam velocitatis maximae (unitatis) et minoris assumtae (v) sunt ut numeri, tempora fore ut logarithmos. Or je suppose qu'on sçache que la construction des logarithmes revient à la quadrature de l'Hyperbole. Nous avions tous deux besoin pour un même dessein (c'est à dire pour donner la relation entre les temps et les velocités) de la quadrature de la figure dont l'ordonnée est $\frac{1}{1-v^2}$, l'abscisse estant v. Vous l'avés donnée par la series, j'ay cru mieux faire en la donnant par les logarithmes. Je croyois m'estre expliqué d'une maniere dans la derniere lettre à n'avoir plus laissé d'obscurité. Et pour ce qui est de la correction réiterée, ce n'est que la retraction de la correction, c'est à dire la restitution du premier estat. Car en refaisant le calcul pour vous satisfaire, un abus dans les signes me fit croire que j'avois fait un echange des temps pour les espaces dans les prop. 4. et 6. de l'art. 5; mais depuis j'ay vû qu'il n'y avoit rien à changer comme je vous ay déja mandé. Et lorsque vous dites, que s'il est vray que j'aye consideré les resistences de l'air comme en proportion doublée des velocités, il faudroit au moins changer l'inscription de l'article 5, en mettant in proportione quadrata velocitatis, je reponds que si vous aviés consideré ce que je vous avois écrit, vous auriés vû qu'il n'y a rien à changer, et je n'aurois pas besoin de repetition; mais j'avoue de n'avoir point de droit de vous demander de l'attention. Je dis encore une fois motum a medio retardari proportione velocitatis, c'est à dire comme je m'estois expliqué dans le precedent article 4 (dont l'hypothese premiere est la même avec celle du present article 5) que les resistences sont en raison composée des elemens de l'espace ou milieu et des velocités, et prenant les elemens du milieu pour égaux, ou considerant tout comme égal à l'égard du milieu, les resistences sont comme les velocités; car si vous divisés le milieu en parties égales tres petites et le considerés comme également parsemé de globules égaux, un grand

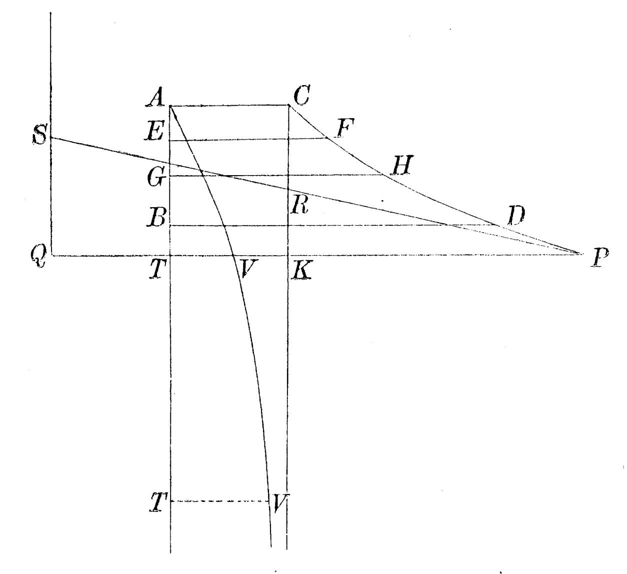
globe allant là dedans perdra à chaque choc (c'est à dire à chaque particule du milieu) un degré de vistesse proportionel à la velocité qui luy reste. Et cette consideration a priori m'avoit mené à mon hypothese. Ainsi considerant le milieu comme la base de la division égale (ce qui est le plus naturel) les resistences sont comme les velocités; mais considerant le temps comme la base, c'est à dire divisant le temps en parties égales tres petites, les resistences ou velocités perdues, à chaque particule de temps, seront comme les quarrés des vistesses. Et la raison est, que les resistences estant en raison composée des elemens de l'espace et des velocités, et les elemens de l'espace estant encor en raison composée des elemens des temps et des velocités, les resistences sont en raison composée des elemens des temps et des quarrés de velocité, ce que je dis en termes expres sous la propos. 3. Et comme j'avois déja marqué toutes ces choses, je m'étonne de vôtre conditionelle: s'il est vray que j'aye consideré la proportion doublée, car dans mes precedentes, j'avois expliqué à fonds comment elle avoit lieu, et j'avois rendu raison de mon expression. A parler exactement, on ne doit pas dire que les resistences sont en raison de velocité ny en raison des quarrés des velocités, si ce n'est qu'on adjoute le temps ou le milieu, comme j'ay fait. Enfin on peut examiner à toute rigueur cet article 5, on n'y trouvera rien à dire; il y a seulement une faute à corriger. C'est que l'enontiation de la prop. 3 est toute gâtée, je ne sçay par quelle megarde; mais cette beveue n'a point d'influence sur tout le reste. Il falloit dire: resistentia est ad impressionem gravitatis ut quadratum velocitatis acquisitae ad quadratum velocitatis maximae, ou bien je pouvois dire quelque chose de semblable à cecy: impressio nova (seu accessio velocitatis), resistentia (seu diminutio velocitatis), et incrementum velocitatis (quod est differentia impressionis et resistentiae) sunt inter se ut quadratum velocitatis maximae, quadratum velocitatis acquisitae, et excessus quadrati maximae super quadratum acquisitae. La preuve de la proposition 3 infere cecy et les preuves des propositions 4 et 6 le supposent, et je ne sçay pas d'où est venu ce quiproquo. Mais je laisse enfin ce point, sur lequel la seule consideration que j'ay pour vous m'a rendu si prolixe, afin de tacher de vous satisfaire s'il est possible; mais aussi je ne crois pas d'en pouvoir ou devoir dire d'avantage. Vous avés raison, Monsieur, de dire que les courbes que j'avois données pour vostre probleme sont invariables, et je n'avois pas pris garde que $\frac{r^2}{a}$ fait une seule quantité determinée. Mon calcul m'avoit pû mener aussi bien à $2a^2x^2 = a^2y^2 - y^4$ qu'à $2a^2x^2 = a^2y^2 + y^4$, mais ayant la solution qui

s'estoit offerte, je n'y avois plus pensé. Vous dites que la premiere se peut quadrer et vous doutés si la seconde se pourroit quadrer aussi: je reponds qu'effectivement il est aussi aisé de quadrer la premiere, que de donner un plan egal à la surface decrite par un arc de cercle tourné à l'entour du diametre; mais la seconde depend de la quadrature de l'Hyperbole. Je ne vous ay pas donné la solution de vos problemes comme une marque de la perfection de ma methode, mais comme une marque de son utilité. Je crois même de vous avoir déja dit, que pour les resoudre, je ne me suis pas servi de la methode qui peut toujours reussir pour toutes les lignes ordinaires, car elle est fort prolixe, mais d'une autre, qui est bien plus courte et bien plus directe et commune aux transcendantes et ordinaires, mais je ne l'ay pas encor mise en perfection pour la pouvoir toujours conduire jusqu'au bout, parcequ'il y a encor des choses à découvrir pour applanir des difficultés qui se trouvent dans son chemin. Je n'ay garde de souhaiter qu'on me propose des problemes, dont la solution ne serve qu'à faire croire que je les puisse resoudre. Notre temps est trop pretieux, je suis trop distrait ailleurs pour le present, et la methode pour les lignes ordinaires que je crois suffisante est trop prolixe; il faudroit dresser des tables pour l'abreger, mais je n'en ay pas le loisir.

Pour ce qui est des expressions exponentiales, je les tiens pour les plus parfaites de toutes les manieres d'exprimer les transcendantes. Car les exponentiales donnent une equation finie, où il n'entre que des grandeurs ordinaires quoyque mises dans l'exposant, au lieu que les series donnent les equations infinies, et les equations differentiales, quoyque finies, employent des grandeurs extraordinaires, scavoir les differences infiniment petites. Et tout ce que je souhaite pour la perfection de la Geometrie, c'est de pouvoir reduire les autres expressions transcendantes aux exponentiales. Je ne divise donc pas les courbes transcendantes en exponentiales et non-exponentiales (comme il semble que vous l'avés pris) mais leurs expressions. Car une même courbe peut recevoir les trois expressions, que je viens de dire. Par exemple la courbe susdite [qui exprime la relation entre les temps et les vistesses, ou bien entre les vistesses imprimées par la pesanteur (qui sont proportionelles au temps) et entre les vistesses absolues, qui en restent à cause de la resistence du milieu] c'est à dire la courbe dont les abscisses sont v et les ordonnées t se peut exprimer serialement par $t = \frac{1}{1}v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5$ etc. et differentialement par $t = \int \frac{dv}{1 - v^2}$, et enfin exponentialement par $b\frac{t}{\cdot} = \frac{1 + v}{1 - v}$, ce qui veut dire que $\frac{1 + v}{1 - v}$ estant

comme les nombres, t sont comme les logarithmes; b estant une grandeur constante, dont le logarithme est 1, et le logarithme de 1 estant 0.

Vous faites une demande, Monsieur, à laquelle il est juste que je satisfasse, sçavoir si les expressions exponentiales servent à donner quelque description de la courbe et à la marquer en quelque façon par points, ou si je m'en sers seulement à decider que la courbe est transcendante. Je reponds que les expressions exponentiales servent à trouver autant de points qu'on voudra d'une telle courbe, tout comme dans les helices et dans la quadratrice, au lieu que les autres expressions ordinairement ne donnent pas des points veritables, mais seulement des points approchans, outre qu'elles ne sont pas si maniables par le



calcul. Mais il sera bon d'expliquer dans un exemple la maniere de construire ou de marquer des points de la courbe susdite. Soit AC = AB = 1 representant la plus grande velocité, et BD, droite prise à discretion, soit b. Supposons AC, BD paralleles et cherchant entre elles des moyennes proportionelles EF, GH etc. decrivons la courbe des logarithmes CFHDP. Je dis donc que prenant un point quelconque de cette courbe comme P, et en menant à l'axe AB une ordonnée PT, alors le logarithme ou l'abscisse AT sera t, et le nombre ou l'ordonnée TP sera $\frac{1+v}{1-v}$ que nous appellerons e. Or e estant assignée, il ne reste que de trouver v, ce qui est aisé, car il y aura $v = \frac{e-1}{e+1}$, c'est à dire dans la droite TP prolongée prenant TK, TQ égales à AC, et erigeant QS normale à QP

et égale à AC, et joignant PS qui coupera CK (parallele à AB) en R, et enfin dans TP prenant TV égale à KR, il est manifeste que TV sera v, AT estant t, c'est à dire AT estant comme les temps, TV seront comme les velocités, et la ligne AVV asymptote à CK sera la courbe demandée. Il n'est gueres plus difficile de construire les courbes exponentialement exprimées, qui satisfont à une de vos soutangentes, et je m'imagine qu'à present vous serés plus content de ces sortes d'expressions.

Je seray bien aise de sçavoir si la regle renversée des tangentes de Mr. Facio contenuë dans les lettres que vous dites avoir receues de luy vous donne quelque contentement, et en quelle sorte de cas vous la trouvés la plus practicable, afin que je puisse juger si elle a quelque rapport à mes meditations.

Feu Mr. Gericke m'envoya ses experiences sur un globe de matiere electrique, lorsque son livre n'estoit pas encor imprimé, car je luy avois procuré un privilege de l'Empereur pour ce livre par mes amis. Mais je m'imagine que la substance de ces experiences sera dans ce livre, et comme la lettre a esté écrite il y a bien du temps, il ne me seroit pas aisé maintenant de la trouver parmy mes vieux papiers. Je seray ravi d'apprendre un jour quelque chose de vos experiences electriques.

Pour ce qui est de l'aimant, il est vray que nous ne sçavons pas la regle des declinaisons. Je crois neantmoins qu'elles sont reglées avec leurs changemens, et ne dependent pas des causes accidentaires et non liées comme seroient les fibres du globe de la terre suivant ce que Gilbert et Descartes ont cru. Si elles sont reglées et tant que nous ne sçavons pas comment et pourquoy, c'est une marque que nous n'avons pas encor la vraye hypothese.

Je seray bien aise de voir un jour ce qu'on a imprimé en France de la part de l'Academie Royale, sur tout ce qu'il y a de vous. Je me souviens d'avoir aussi remarqué autres fois des voyes de demonstrer la regle de l'equilibre differentes de celle d'Archimede. Mr. Römer me parla aussi d'une sienne, et un Professeur de Jena nommé Weigelius en a aussi donné. Mais j'ay sur tout envie de voir un jour vôtre maniere, sçachant que vous avés coustume de donner quelque chose d'elegant.

J'ay honte de vous parler encore d'une lettre que je vous destine il y a longtemps touchant le systeme des planetes, et qui est demeurée imparfaite par des interruptions, sans que j'aye encor pû la finir. Cependant je m'y mettray au plustost, et il faut bien aussi que je mette en ordre mes pensées sur la courbe de la chaine pour les con-

fronter avec les vostres. Les occupations journalieres entierement éloignées de ces choses font que j'ay bien de la peine à reprendre le fil d'un travail interrompu, quand les idées ne me sont plus recentes.

Je souhaitte beaucoup l'honneur de vous voir; mais quand S. A. S. Monseigneur le Duc d'Hanover iroit encor à la Haye, il n'y a pas d'apparence que je le pourrois accompagner, mon employ n'estant pas de suivre la Cour, mais de travailler à des choses dont je suis chargé. Si Dieu me donne la grace de depecher le travail qui m'occupe à present et qui est de longue haleine, je serai plus libre. Je prie Dieu de vous conserver, dont j'espere de profiter avec le public et je suis avec passion etc.

P. S. Quant à la ligne de la chaine pendante donnant une oeillade à mon calcul, je m'apperçois que pour la relation entre deux points de la chaine situés dans la même horison et entre la partie de la chaine pendante dessous, je me puis servir d'une ligne dont l'equation est de la forme de celle que vous aviés marquée $x^2y^2 = a^4 - a^2y^2$. Mais une autre dont je vous avois parlé et dont la forme est $x^2y^2 = a^4 + a^2y^2$ ne laisse pas d'avoir aussi son usage dans ce probleme.

XXIV.

Huygens an Leibniz.

A la Haye 23. Février 1691.

J'ay vu avec bien du déplaisir dans vostre derniere lettre que vous avez entendu tout autrement et au contraire de mon intèntion ce que je vous avois escrit, que vostre excuse estoit merveilleuse Car j'ay voulu dire par là que cette excuse estoit tout à fait superflue, et que j'estois fort eloigné d'avoir aucun soupçon, que vous eussiez contribué à ce qu'on avoit mis abusivement dans les Actes de Leipsich à mon prejudice. C'est la pure verité, et il me semble que par toute sorte de raison vous deviez l'avoir pris de cette maniere. Je n'ay pas encore pu avoir ces Actes des mois de Novembre et Decembre de l'année derniere, de sorte que je ne scay si la faute aura esté reparée. Cependant j'ay fort bien compris depuis ma derniere, comment ma series pour l'Hyperbole se raporte à celle de vos logarithmes, et j'ay aussi trouvé que j'aurois pu apprendre cette series du livre de Mr.

Wallis qu'il a escrit de l'Algebre en Anglois p. 329, où il range la progression de Mercator et la sienne l'une au dessus de l'autre conjointement, qui estant adjoutées ensemble font le double de la progression $a + \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{5}a^5$ etc., de mesme que vous le faites voir dans vostre lettre du 25. Nov. Je m'etonne que Mr. Wallis n'ait pas remarqué cela, ni combien cette progression doublée est plus utile pour la quadrature de Hyperbole et pour trouver les Logarithmes, que n'est la sienne ni celle de Mercator, car le calcul en devient plus court de la moitié.

Depuis quinze jours j'ay revu, non sans peine, les brouillons que j'avois touchant les mouvements à travers un milieu qui fait resistence, sçavoir dans la vraie hypothese, et j'ay fait quelquels calculs en suite, pour voir comment ils s'accorderoient avec les vostres. Je trouve qu'une partie de nostre dispute vient de ce que vous prenez le mot de resistence dans une autre signification que moy et Mr. Newton; car vous appellez resistence la velocité perdue ou la perte de velocité causée par le milieu, et en consequence de cela, pour comparer des resistences differentes, vous voulez que la consideration des elemens du temps entre en compte, et qu'à parler exactement, on ne doit pas dire que les resistences sont en raison des velocitez, ni en raison des quarrez des velocitez. En quoy il est evident que vous prenez l'effect de la resistence pour la resistence mesme. Mais à Mr. Newton et à moy la resistence est la pression du milieu contre la surface d'un corps, comme par exemple, quand on tient dans la main une feuille de carton, et qu'on l'agite à travers l'air, on sent une pression qui se peut comparer à celle d'un poids, et qui devient quatre fois plus grande lorsqu'on remue cette feuille deux fois plus viste qu'auparavant, ainsi que j'ay trouvé autre fois à Paris par des experiences fort exactes. Vous voiez, Monsieur, qu'il n'y a que la differente vitesse dont depend cette pression, sans considerer des parties egales ni inegales du temps. Et c'est sans doute la veritable et la plus naturelle notion de la resistence.

Je comprens bien pourtant comment, suivant la vostre, vous voulez conserver l'inscription de vostre article 5, mais c'est comme j'ay dit en prenant l'effet pour la cause, et toute l'obscurité de vostre discours vient principalement d'icy; laquelle, à ce que je crois, est cause que personne ne l'a assez examiné pour comprendre ce qu'il y a de vray, ni pour remarquer les abus que vous y corrigez maintenant vous mesme. J'avois fait la mesme correction mot à mot dans la prop. 3. art. 5, que vous m'envoiez dans vostre derniere lettre. A la prop. 6.

du mesme article les espaces parcourus, qui à moy sont comme les logarithmes de $\frac{aa}{aa - vv}$, selon vous sont comme les logarithmes de $\sqrt{aa - vv}$ (il falloit $\frac{\sqrt{aa - vv}}{aa}$) ou de $\sqrt{1 - vv}$: ce qui revient pourtant à la mesme chose (si non que vos logarithmes devienent negatifs), car les logarithmes des racines ont entre eux la mesme raison que ceux de leurs quarrez. Vous aviez de mesme des logarithmes negatifs, en disant que les temps sont comme les logarithmes de $\frac{1 - v}{1 + v}$, mais dans vostre derniere vous l'avez redressé en mettant $\frac{1 + v}{1 - v}$. Je m'apperçois assez, Monsieur, en tout cela, qu'il ne vous manque ni habilité ni science pous demesler toute cette matiere, et d'autres plus difficiles, mais que seulement vous n'avez pas assez de loisir pour adjouter plus d'exactitude et de clarté aux choses que vous avez trouvées. Je ne sçay pas pourquoy dans tout ce discours de la Resistence vous n'avez rien voulu determiner des choses qui sont comme le fruit de cette recherche et qu'on peut souhaiter de sçavoir, comme si quaeratur tempus descensus liberi ad tempus descensus impediti donec data celeritate obtineatur, hoc est, quae ad celeritatem terminalem datam rationem habeat; aut si quaeratur ratio spatiorum sic peractorum; item quae sit ratio temporis ascensus ad tempus descensus, cum corpus recta sursum projicitur celeritate terminali. Je souhaiterois de voir comment vos calculs s'accordent aux miens dans ces problemes, et en les comparant ensemble nous pourrions estre assurez tous deux d'avoir raisonné juste. Le Traité de Mr. Newton en cecy n'est pas sans faute. Dans l'art. 6 prop. 1 vous faites la ligne du jet bien plus facile à trouver qu'elle n'est en effet; sur quoy je vous prie d'examiner la remarque que j'ay faite dans l'Addition à mon discours de la Pesanteur.

J'ay consideré vostre construction de la Courbe Exponentiale qui est fort bonne. Toute fois je ne vois pas encore que cette expression $b^{\frac{t}{·}} = \frac{1 + v}{1 - v}$ soit d'un grand secours pour cela. Il y a longtemps que je connois cette mesme courbe, aussi bien que sa campagne, qui sert aux jets montants, et je la construis par la ligne logarithmique en supposant les velocitez données, au lieu que vous supposez les temps.

Quoyque cette lettre soit desia bien longue, il faut que je vous responde à ce que vous souhaitez de sçavoir touchant la methode renversée des Tangentes de Mr. Fatio. Vous scaurez donc que l'autheur

est depuis quelque temps en cette ville, et qu'il me fait souvent l'honneur de me voir. J'avois examiné sa lettre dont je vous ay parlé, où la dite methode estoit amenée jusqu'à un certain point, mais depuis qu'il est icy, il l'a beaucoup perfectionnée, et m'a trouvé les deux mesmes courbes dont je vous avois proposé les soutangentes, des quelles la 2. a plus de difficulté. Ses calculs ne sont pas longs, ni n'ont besoin d'aucunes tables, mais il ne sçauroit resoudre jusqu'icy les cas, où il entre des racines qui contienent des inconnues et plus d'un terme; par exemple, si la soutangente est donnée $\frac{yy\sqrt{aa-xx}}{ax}$, x estant l'abscisse, y l'appliquée à angles droits, et a une ligne connue. Si vostre methode ne s'arreste pas à ces racines, vous avez quelque chose de plus que Mr. Fatio, quoyqu'il ait desia surpassé mon attente. Peut estre c'est pour ces racines que les Tables, dont vous parlez, sont necessaires dans la methode que vous dites reussir tousjours.

Cette quadrature de la 1e de mes courbes que vous dites estre aisée, marque aussi quelque connoissance extraordinaire. Vous me ferez plaisir de la determiner, à fin que Mr. Fatio se puisse assurer que vous l'avez trouvée, à quoy il m'a avoué ne pouvoir reussir. La figure, au reste, de cette courbe ne consiste pas dans les seules deux demiovales, comme je vous avois marqué, mais elles sont jointes par une croix, et le tout ressemble à un 8, ce qui se connoit facilement par l'equation. Quant à la courbe exponentiale que vous trouvastes au lieu de cette ligne, lorsque les signes + et — estoient renversez, Mr. Fatio assure, et m'a demontré en quelque façon, que cette Exponentiale est impossible, par où vous voiez que vostre demonstration pour prouver qu'elle satisfait à la soutangente donnée, ne nous est pas claire.

Vous m'obligerez, Monsieur, d'achever ce que vous avez trouvé sur la chaine pendante, afin que nous nous communiquions nos meditations. Je crois qu'il y aura bien d'autres geometres qui resoudront ce probleme, car à dire vray, il ne me paroit pas bien difficile, si ce n'est que vous en demandiez quelque chose de plus que ce que j'en ay trouvé.*)

---

*) In der Sammlung Uylenbroek's kommt nach diesen Worten Folgendes, das in dem Briefe von Huygens, wie er ihn an Leibniz übersandte, fehlt: Mr. Spener m'a dit que, pour faire reussir la boule de souphre de Mr. Guericke, il faut adjouter pour chaque livre 13 grains salis tartari fixi; peut estre l'autheur vous aura donné la mesme recepte. — Il me dit aussi qu'il pouvoit ostes au fer l'attraction vers l'aimant, mais je ne m'y fie pas trop depuis que j'ay trouvé fausse une experience avec le vif argent, qu'il debitoit comme tres certaine.

Ce n'est pas sans regret etc.

Ce n'est pas sans regret que je perds l'esperance de vous voir icy, et je n'aurois pas esté si longtemps sans vous escrire, si je ne vous avois toujours attendu. Je suis etc.

XXV.

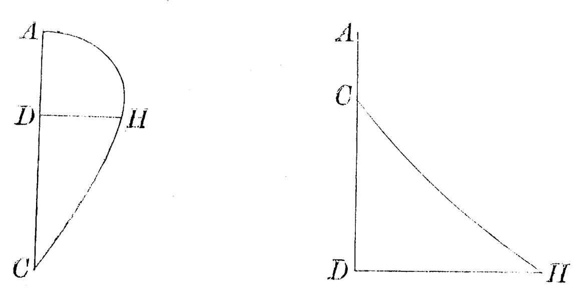
Leibniz an Huygens.

Hannover ce $\frac{20}{30}$ de Février 1690.

Je suis ravi de m'estre trompé en vous attribuant un soubcon, dont, malgré vos paroles, je ne vous devois pas juger capable. La faute de la relation de Leipzig n'aura pas encor esté redressée, mais ce sera fait au plustost, car il y a quelque temps que je n'y ay pas écrit. J'avois cru de pouvoir estimer la resistence par son effect prochain, c'est à dire par la diminution de la vistesse du corps qui la sent, et je m'estois assez expliqué là dessus dans tout mon discours, mais j'advoue qu'il demande de l'attention. Je ne scay si vous aurés examiné ce que je dis de la resistence absolue, comme il s'en trouve dans le frottement. Il est vray, comme vous avés remarqué, Monsieur, que dans un jet libre par un milieu resistent, la simple composition des deux mouvemens ne peut avoir lieu, et pour que mon article 6 puisse trouver place, il faut une hypothese particuliere

Ce que j'ay vu de Mr. Fatio, me le fait estimer, et j'attends beaucoup de sa penetration. Je suis bien aise d'entendre qu'il est à la Haye, et je luy envierois ce bonheur, dont il ne m'est pas permis de jouir, si je ne considerois, qu'il profitera beaucoup en vous voyant quelques fois, et qu'il en sera d'autant plus en estat de rendre service au public. Il n'a pas mal choisi en se mettant à chercher les courbes dont les tangentes sont d'une nature connue, c'est presque ce qu'il y a de plus difficile et de plus important en Geometrie; je contribuerois volontiers à l'aider si je puis dans cette recherche, s'il en croyoit avoir besoin. Comme il a aussi trouvé vos courbes, je m'imagine qu'il aura pris quelque biais, qui serve à abreger, comme en effect je puis fabriquer plusieurs canons particuliers pour retrancher le calcul. Pour ce qui est d'une courbe dont la soutangente soit $yy\sqrt{aa-xx}:ax$, j'ay trouvé qu'il y en a plusieurs qui y peuvent satisfaire, mais les plus simples sont comme je croy celles dont les equations $aaxx = a^4 - y^4$.

ou bien $4aaxx = 4aayy - y^4$. Le calcul fera connoistre que tant l'une que l'autre reussit. Si Mr. Fatio trouve bon de me communiquer sa methode pour vos deux lignes, je luy communiqueray la mienne ces deux d'à present où il a trouvé de la difficulté. J'avois cru que l'aire de la courbe dont l'equation est $2aaxx = aayy + y^4$ dependoit de la quadrature de l'hyperbole, mais ayant revu mon calcul, je trouve qu'elle est quadrable absolument aussi bien que l'autre, dont l'equation est $2aaxx = aayy - y^4$. Et comme vous me demandés la determination de l'aire de la derniere, afin que Mr. Fatio se puisse asseurer que je l'ay trouvée, de quoy il avoit douté, parce qu'il n'y avoit pas reussi luy



même, je vous donneray les aires des parties quelconques de toutes deux. Soit AC, a et AD, y, et DH, x, et $aaxx = aayy - y^4$, et soit $\sqrt{aa - yy} = z$, je dis que ADHA est $\frac{a^3 - z^3}{3a}$, et par consequent ACHA estant $\frac{a^3}{3a}$, CHDC sera $\frac{z^3}{3a}$. Caeteris iisdem positis, soit $aaxx = aayy + y^4$ et soit $\sqrt{aa + yy} = z$, je dis que CDHC est $\frac{z^3}{3a}$, comme auparavant; si au lieu de aaxx on met 2aaxx comme vous le demandés, on n'a qu'à écrire $3a\sqrt{2}$ au lieu de 3a.

Puisque la premiere achevée retourne en elle même, en forme de 8, on en peut juger que le theoreme de Mr. Newton p. 105, qui pretend, qu'il n'y a point de courbe recourrante (de la Geometrie ordinaire) indefiniment quadrable, ne scauroit subsister, et qu'il y a quelque faute dans sa demonstration. Mais je ne l'en estime pas moins; opere in longo fas est obrepere somnum. Mr. Bernoulli a aussi trouvé enfin la ligne de chaine. Je croy que la connoissance de mon calcul l'aura un peu aidé, car quoyque ce probleme ne soit pas de plus difficiles, je m'imagine qu'il n'est pas trop aisé d'y reussir sans avoir quelque chose d'equivalent à ce calcul. Je n'ay pas vu sa solution, je ne laisse pas de croire qu'il a donné dans le but. Mons. Tschirnhaus n'y a pas mordu, quoyque j'aye parlé expres d'une maniere à l'y engager, pour

luy donner occasion d'exercer sa methode, dont il nous promettoit tant, jusqu'à me reprendre obliquement de ce que j'avois dit que l'Analyse ordinaire ne suffit pas dans ces rencontres. Je croy que Mr. Fatio est allé trop viste en pretendant que mon exponentiale est impossible. Je verray un de ces jours, si je vous en pourray donner la construction. On ne donnera la solution de Mr. Bernoulli que quand j'auray envoyé la mienne; et si vous le trouvés à propos, nous y joindrons la vostre, mais j'espere de la voir prealablement et de vous faire juger de la mienne.

Je voudrois bien scavoir ce que vous jugés des variations de l'eguille aimantée et des causes de l'inclination, et s'il est bien seur, que dans des lieux qui ne sont pas éloignés l'un de l'autre, il se trouve une grande difference entre les declinations. Je suis disposé à croire que cela n'est point. Mais l'experience en doit juger souverainement. Je desire aussi de scavoir vostre sentiment sur la cause du flus et reflus de Mr. Descartes. Je me souviens que vous avés traité autres fois de la cause des parelies. J'espere que vous en mettrés la demonstration dans vostre dioptrique, et que vous nous donnerés après tant de delais cet ouvrage si desiré. Mr. Newton n'a pas traité des loix du ressort; il me semble de vous avoir entendu dire autres fois que vous les aviés examinées, et que vous aviés demonstré l'isochronisme des vibrations.

N'y a-t-il personne à present qui medite en philosophe sur la medecine? Feu Mr. Crane y estoit propre, mais Messieurs les Cartesiens sont trop prevenus de leur hypotheses. J'aime mieux un Leeuwenhoek qui me dit ce qu'il voit, qu'un Cartesien qui me dit ce qu'il pense. Il est pourtant necessaire de joindre le raisonnement aux observations. Mais je finis en me qualifiant avec beaucoup de zele etc.

XXVI.

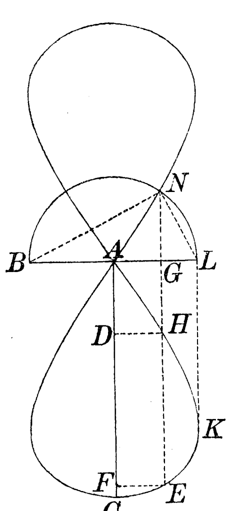
Huygens an Leibniz.

A la Haye 26 Mars 1691.

J'ay esté indisposé pendant plus de 3 semaines, et sur la fin j'ay esté aussi attaqué de la goute dont je ressens encore un reste, et cela pour la premiere fois de ma vie. Sans cet accident j'aurois respondu plustost à la derniere que vous m'avez fait l'honneur de m'escrire. J'y ay vu avec beaucoup de satisfaction que vous avez si bien sceu trouver

la ligne courbe, dont l'équation est $4aaxx \infty 4aayy - y^4$ pour la soutangente $yy\frac{\sqrt{aa - xx}}{ax}$. Mais j'ay de la peine à croire ce que vous dites, qu'il y a plusieurs autres courbes qui y satisfont, et j'oserois presque assurer que cela est impossible; du moins celle que vous apportez $aaxx \infty a^4 - y^4$, ne donne pas cette mesme soutangente, mais $-\frac{2yy\sqrt{aa - xx}}{ax}$, qui est double de l'autre, et qui doit estre prise au delà de x, à cause du signe negatif.

J'ay proposé vostre offre à Mr. Fatio touchant l'échange de vostre methode dans cette recherche, contre la sienne dont il s'est servi à trouver mes deux autres courbes par leur soutangentes; mais je vois qu'il ne desespere pas de surmonter la difficulté des Racines, et qu'il ne peut pas se resoudre à vous envoier un traité assez long qu'il a sur cette matiere. Il avoue au reste qu'elle est d'une estude penible et infinie, et il est seur, dit il, qu'on ne sçauroit venir à bout de tous les divers deguisemens possibles des soutangentes, ce que j'ay aussi tousjours creu. Je ne laisse pas de l'exhorter de donner ce qu'il en a trouvé, et je souhaiterois, Monsieur, que vous en voulussiez faire de mesme, parceque le Probleme est de grande utilité, quand bien il ne seroit pas generalement resolu. Vous obligeriez aussi le public en produisant vostre methode des quadratures dont vous venez de donner un si joli echantillon dans la courbe que je vous avois proposée, scavoir $2aaxx \infty aayy - y^4$, où j'admire certes vostre adresse et l'excellence de vostre regle, quoyque limitée aussi bien que l'autre, comme je crois.

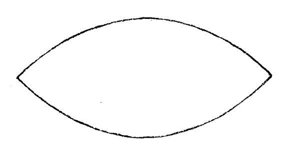


Il m'a falu un assez long calcul pour voir si vostre quadrature se rapportoit à la mienne. Vostre figure AHC*) est la quart du 8 que forme cette courbe. Et comme en posant $AC \infty a$, $AG \infty x$, $GH \infty y$, $\sqrt{aa - yy} \infty z$, vous trouvez l'espace $AHKCA \infty \frac{a^3}{3a\sqrt{2}}$, et l'espace $AHD \infty \frac{a^3 - z^3}{3a\sqrt{2}}$, et par consequent $DHKEC \infty \frac{z^3}{3a\sqrt{2}}$, il s'ensuit que l'espace AKCA est à DHKEC comme le cube de AC au cube de EG, car cette EG est z; et que le mesme espace AKCA est à CEF comme le cube AC au cube HG. J'avois formé

*) Die erste Figur des vorhergehenden Briefes.

cette courbe en faisant un demi-cercle BNL et dans les droites qui coupent BL perpendiculairement, comme NGE, prenant GE egale aux soutendentes NB, NL, d'où nait aussi GH egale à leur difference. Il est aisé de voir par là que l'espace ACKL devient egal à deux espaces paraboliques, et l'espace AKL à leur difference. Je n'ay pas encore eu le temps d'examiner vostre autre quadrature de la courbe $2aaxx \infty aayy + y^4$, et je doute si j'en trouveray le moyen. Car je n'ay pas penetré bien avant cette matiere, et je ne crois pas mesme que je doive m'y occuper, puisque j'espere de participer un jour à ce que vous en scavez, qui m'avez devancé de si loin que j'aurois trop de peine à vous atteindre.

Mr. Fatio ne peut pas bien soutenir la Proposition de Mr. Newton pag. 105, sur tout quand pour son Ovale indeterminée, je luy marque deux portions egales de parabole, qui aient la mesme base. Il commence aussi à douter si l'impossibilité de vostre courbe Exponentiale est telle qu'il l'avoit crue.



Je verray avec plaisir comment s'accorderont vos découvertes et celles de Mr. Bernouilly avec les miennes sur la chaine pendante. Mais pour faire connoitre au vray ce qu'un chacun aura trouvé, et pour prevenir toute dispute, il est absolument necessaire qu'on se communique premierement les chifres, comme j'ay fait il y a longtemps. Je ne doute pas que vous et Mr. Bernouilly n'en conveniez; car si sans cette precaution vous luy envoiez le premier vostre solution, on pourra douter s'il est autheur de la sienne. Voicy mon chifre que j'ay mis d'une maniere moins embarassée qu'il n'estoit, en marquant seulement les premieres lettres des mots, ce qui se fait avec facilité et s'examine de mesme. J'y ay enfermé aussi quelque chose de plus que dans l'autre, m'estant aperçeu du depuis d'une chose qui estoit in potestate (pour me servir de vostre terme) sans que je l'eusse remarqué.

s c a p s s e f a e u a g c q c s i e a.

1. p i t i d q c p.
2. r a e c v c e p.
3. r c i v.
4. c a e s c e r c e a.
5. c e l l c e c c d.
6. m s c e p c.
   p c i p p q c a h
   $xxyy \infty a^4 - aayy$
   $xxyy \infty 4a^4 - x^4$

1. s u a c t a p a q i a e d c p e v,
   i s t i c c a a, q i a a; e e h c a e i a c c a a;
   h i p a p d d t c i i h p.
2. u t i c c, d a, e a a, i s a d e l.
3. a i q a a r c i u.
4. s c c e c r c a a e e c c r e m p.
   i d r c i v e p a q i v e t.
5. u r e a e d i t e a a q s i r c i v a c c e c d.
6. s c e p c e a e r e l c d e c e s e e s r c i v.*)

*) Siehe die Beilage

Vous pouvez, si vous trouvez bon, communiquer cet Enigme à Mr. Bernouilly, en luy demandant le sien. Je m'etonne du silence de Mr. D. T. sur ce Probleme, apres y avoir esté invité plus particulierement que tous les autres, mais il luy reste encore du temps. Pour ce qui est de vos demandes, je me souviens qu'en examinant dans l'Academie des Sciences la cause du flus et reflus selon Mr. des Cartes, les Astronomes n'en estoient pas contents et trouvoient des phenomenes contraires.

La declinaison de l'Eguille aimantée, et encore plus sa variation, me paroissent irreduisibles à quelque regle certaine. La variation, ou bien le changement de declinaison marque assez clairement qu'au dedans de la Terre il doit arriver quelque changement.

J'ay une demonstration de l'Isochronisme des vibrations du ressort, estant supposé qu'il cede dans la mesme proportion de la force qui le presse, comme l'experience l'ensigne constamment.

La demonstration des Parelies sera dans ma Dioptrique, à laquelle je vay travailler cet esté, sans m'en laisser detourner par d'autres speculations, pourveu que j'aye de la santé.

Il y avoit un article dans ma lettre precedente touchant le calcul de quelques cas du mouvement avec resistence du milieu, au quel article vous n'avez rien respondu: ce que pourtant je vous pardonne facilement, ne vous ayant que trop fatigué par mes problemes des lignes courbes. Vous me direz aussi quelque jour comment vous trouvez mes explications de la Refraction et du Cristal d'Islande, de quoy jusqu'icy je n'ay pas appris la moindre chose. Je suis etc.

Beilage.

Uylenbroek hat aus Huygens' Manuscripten die Interpretation der Chiffer mitgetheilt. Es sind dabei die in dem folgenden Briefe von Huygens gegebenen Ergänzungen und Berichtigungen berücksichtigt (l. c. fascic. II pag. 83 sqq.):

Pars prior:

s c a p s s e f a e u a g c q c s i e a d a i f e c p	Si catena ad parietem suspensa sit ex filis aequalibus, utrimque annexis. gravitate carentibus, quarum capita sint in eadem altitudine, deturque angulus inclinationis filorum et catenae positus:
1. p i t i d q c p	Possumus invenire tangentem in dato quolibet catenae puncto;
2. r ae c v c e p	Rectam aequalem catenae vel cuilibet ejus portioni;

3. r c i e	Radium curvitatis in vertice;
4. c ae s c e r c c a	Circulum aequalem superficiei conoidis ex revolutione catenae circa axem;
5. c e ll c e c c d	Constructionem et longitudinem lineae, cujus evolutione curva catenae describitur;
6. m s c e p c	Mensuram sectoris cui evoluta pro centro.
p c i p p q c a h $xxyy = a^4 - aayy$ $xxyy = 4a^4 - x^4$ v d d c g a a i p c p	Puncta catenae inveniri possunt posita quadratura curvae alterius harum: $xxyy = a^4 - aayy$, $xxyy = 4a^4 - x^4$; vel data distantia centri gravitatis ab axe in portionibus curvae prioris.

Pars altera:

1. s u a c t a p a q i a e d c p e v i s t i c c d s a a a q h i a a; e e h c ae i a c c a a; h i p a p d d t c i i h p	Si, ut axis catenae totius ad partem axis, quae inter applicatam ex dato catenae puncto et verticem, ita sit tangens in capite catenae, demta sua applicata, ad aliam, quae huic ipsi applicatae addatur; et ex his compositae aequalis inclinetur a capite catenae ad axem, huic inclinatae parallela a puncto dato ducta, tanget curvam in ipso hoc puncto.
2. u t i c c, d a, e a a, i s a d c l	Ut tangens in capite catenae, demta applicata, est ad axem, ita subtangens ad dimidium catenae longitudinem.
3. a i q a a r c i v	Atque ita quoque applicata ad radium curvitatis in vertice.
4. s c c e c r c a ae e c c r e m p i d r c i v e p a q i v e t	Superficiei curvae conoidis ex catenae revolutione circa axem aequalis est circulus, cujus radius est medius proportione inter duplum radium curvitatis in vertice et partem axis, quae inter verticem et tangentem.
5. u r e a e d i t e a a q s i a a c c e c d	Ut rectangulum ex applicata et differentia inter tangentem et applicatam, ad quadratum subtangentis, ita axis ad curvam, cujus evolutione catena describitur.
6. s c e p c e ae r e l c d e c e s e e s r c i v.	Sector cui evoluta pro centro est, aequatur rectangulo, ex longitudine catenae dimidia et composita ex sextante evolutae et semisse radii curvitatis in vertice.

XXVII.

Huygens an Leibniz.

A la Haye 21 Avril 1691.

N'ayant pas eu jusqu'icy de response à ma lettre du 26. du mois passé, que je vous adressay par la voie de Mr. Meyer, j'escris celle cy pour scavoir si elle vous a esté rendue, ou si peutestre celle entremise aura moins bien reussi que la voie directe de la poste dont je me suis servi auparavant. J'espere du moins que ce n'est pas vostre indisposition qui est cause de ce retardement, car j'en serois incomparablement plus fasché que de la perte de ma lettre. J'y repondis à tous les articles de la vostre du $\frac{20}{30}$ Fevrier. Je vous remontray la necessité du chifre pour pouvoir connoitre, ce qu'un chacun auroit trouvé au sujet du Probleme de Mr. Bernoulli, et j'adjoutay mon chifre second, contenant quelque chose de plus que le premier; auquel second je m'apperçus, incontinent apres, que j'avois laissé glisser deux fautes, l'une au nomb. 5, qui finit pas r c i v a c c e c d, où au lieu des lettres r c i v, il ne faut que a. L'autre à l'article premier, qui n'est pas nombré, où j'avois oublié d'adjouter à la fin ces lettres d a i f e c p. Ce n'estoit icy qu'une omission, et l'autre un abus d'avoir pris une lettre pour une autre dans le calcul Algebraique. Et je corrigeay l'un et l'autre dans un pareil chifre que j'envoiay le jour d'apres à un autre de mes amis. J'y ay encore adjouté depuis à la fin ce que contienent ces lettres v d d c g a a i p c p, et si je voulois resver d'avantage à cette question, j'y ferois peut estre encore de nouvelles decouvertes, ne pouvant pas m'assurer qu'il n'y ait plus rien à trouver.

Mr. Fatio est encore icy, et m'a communiqué sa methode au Probleme des Tangentes renversé, à laquelle il adjoute de jour en jour quelque chose à l'occasion des difficultez et des doutes que je luy propose. Cette speculation a une grande étendue et nous fournira encore pour longtemps matiere d'exercice. Il faudra voir s'il y aura moyen demesler cette partie où il y a des racines composées à la soutangente donnée, où vous m'avez fait voir que vous estes bien avancé, et qui me paroit la plus considerable. Mais la quantité d'autres points qu'il y a à resoudre, nous a empesché jusqu'icy d'entreprendre cette recherche.

Je ne scay, si vous aurez vu la Theorie de la Pesanteur de Mr. Varignon*), qui ne me satisfait point du tout. Item les Quae-

*) Nouvelles conjectures sur la pesanteur, Paris 1690.

stiones Alnetanae de Mr. Huet, Evesque d'Avranches, où il y a beaucoup d'erudition, et non pas tout à fait autant de solidité de raisonnement. Il traite de statuendis limitibus Rationis et Fidei, matiere, comme vous scavez, tres difficile. Je vous supplie de faire response à celle cy et de me croire inviolablement etc.

P. S. Je n'ay remarqué que depuis fort peu le Paralogisme de Mr. de Tschirnhaus, là où il propose dans les Acta de l'an 1682 sa fausse construction de la courbe par reflexion du miroir concave. Il paroit clairement qu'en ce temps là il ne connoissoit pas encore cette ligne, ni la maniere generale, dont il s'y vante, pour determiner ces lignes dans d'autres figures, et il est fort vraisemblable qu'il n'a appris la veritable construction que par ce que j'en ay donné dans mon Traité de la Lumiere.

XXVIII.

Leibniz an Huygens.

A Hannover ce $\frac{10}{20}$ d'Avril 1691.

Je suis bien aise que ma solutiou de vos Problemes vous a satisfait. Vous doutés de ce que j'avois dit, qu'il y a plusieurs lignes qui puissent donner la soutangente $yy\sqrt{aa-xx}:ax$, et meme cela vous paroist impossible. En voicy pourtant une, dont l'equation est $xx = 2yy - \frac{1}{4aa}y^4 - 3aa$. Et tant que yy sera moindre que 4aa, la valeur de la soutangente sera affirmative et donnera $yy\sqrt{aa-xx}:ax$, mais lorsqu'yy deviendra plus grande que 4aa, alors $yy\sqrt{aa-xx}:ax$ sera une grandeur negative ou moindre que rien, et doit estre prise en sens contraire. Pour ce qui est de $aaxx = a^4 - y^4$, que je vous avois envoyé, je voy que dans mes brouillons il y a $aaxx = a^4 - \frac{y^4}{4}$ (c'est à dire $4aaxx = 4a^4 - y^4$), à quoy je n'avois pas pris garde en vous écrivant. Il est vray qu'alors $yy\sqrt{aa-xx}:ax$ devient une grandeur negative, mais j'ay deja marqué cela n'empeche point qu'elle ne satisfasse. Pourtant, si vous n'en voulés point, la precedente suffit, outre la premiere, marquée dans la lettre passée.

Vostre construction de la ligne qui donne 8 me plaist fort à cause de sa simplicité. Considerés s'il vous plaist, Monsieur, si contre vostre

instance des deux portions égales de parabole sur une meme base, Monsieur Newton, pour soutenir l'impossibilité de la quadrature des ovales, ne pourroit repondre qu'une telle ovale seroit fausse et non pas composée d'une même ligne recourante, comme il semble que son raisonnement demande, puisqu'une parabole continuée ne tombe pas dans l'autre Mais vostre ligne qui fait 8 est veritablement recourante, et son raisonnement y est applicable, quoyqu'elle n'ait pas justement la forme d'une ovale, et selon luy, elle ne devroit pas estre generalement quadrable. Il seroit bon de considerer son raisonnement en luy même, pour voir où gist le manquement. Quant au cercle et à l'ellipse, l'impossibilité de leur quadrature generale est assez demonstrée, mais je n'ay pas encore vu, qu'on aye donné aucune demonstration pour prouver que le cercle entier ou quelque portion determinée n'est pas quadrable.

Je n'avois pas fait attention à l'endroit de vostre precedente, où vous aviés parlé des calculs sur la resistence du milieu. Mais quand j'y aurois pris garde, je n'estois pas en estat d'entrer assés là dedans, estant extremement distrait et occupé à des matieres qui en sont trop éloignées et pour lesquelles je suis extremement pressé. Et le plus grand mal est que je commence à avoir les yeux incommodés.

C'est la même raison qui m'a fait tant tarder à mettre au net ce que j'ay sur la ligne de la chaine. Mr. Bernoulli a déja envoyé sa solution à Mrs. de Leipzig, qui en ont averti le public, quoyqu'ils n'ayent pas encor mis sa solution dans leur Actes. Ils m'en ont averti aussi, et je leur ay écrit que vous en aviés aussi la solution, et que je scaurois de vous, si vous la voudriés envoyer pour estre publiée dans leur Actes avec les autres. Comme je n'écris pas immediatement à Mr. Bernoulli, et que d'ailleurs il est à couvert de tout soubçon, ayant déja envoyé sa solution, je ne croy pas qu'il soit necessaire de luy envoyer un chifre. Et comme le terme est expiré en effect, parceque j'avois promis seulement d'attendre jusqu'à la fin de l'année précédente, Mrs. de Leipzig m'ont sommé d'envoyer ce que j'ay sur ce probleme pour ne pas trop retarder l'edition de ce que Mr. Bernoulli leur a envoyé. C'est donc ce que je dois faire bien-tost; et il depend de vous, Monsieur, comment vous en voudrés user. En cas que vous voulussiés l'envoyer à Mrs. de Leipzig, il n'y a pas lieu de douter qu'ils en usent fidelement, comme je croy qu'ils ont fait à l'egard de celle de Mr. Bernoulli, dont je n'ay rien veu, et j'aurois esté faché de la voir, pour les raisons que vous avés marquées.

Je croy qu'il sera bien difficile de trouver la regle de la declinaison de l'aimant, mais je ne voy pas pourquoy vous jugés qu'il n'y en

a point, si ce n'est qu'on y trouve des sauts, c'est à dire qu'il y ait une grande difference de declinaison entre des lieux ou des temps, dont la difference n'est pas grande. Je souhaitte d'apprendre si les observations ont fait voir cela.

On avoit publié en Angleterre un petit livre sur le ressort, qui est je crois de Mr. Hook, mais il me semble que j'y trouvay quelque difficulté. Je vous supplie de me dire quelles sont les experiences que vous dites d'avoir esté faites sur cette matiere. Je m'etonne de ne vous avoir pas dit que j'ay admiré vostre explication de la refraction, puisque je l'ay écrit à d'autres. Mr. Meier, Theologien de Breme, est fort scavant et fort honnete, et qui fait gloire d'avoir receu des faveurs de feu Mr. vostre pere. Je crois que Mr. vostre frere fait tousjours la charge de secretaire d'Estat auprès du Roy de la grande Bretagne, comme auprès du prince d'Orange. Ainsi il doit estre bien occupé. C'est pourquoy je ne scay si ce seroit une demande civile de vous supplier de voir si par sa faveur on pourroit disposer quelque sçavant Anglais versé dans les manuscripts et chartres et ayant accès aux Archives, de nous fournir quelques diplomes ou particularités non vulgaires concernant Henry Duc de Saxe (de la maison Bronsvic) gendre de Henry II, Roy d'Angleterre, et touchant les enfans de ce Duc, parmy lesquels estoit Otton Duc de York et Conte du Poictou, depuis Empereur IVe de ce nom. En tout cas j'espere que par vostre intercession il aura la bonté de me pardonner cette liberté et d'agreer mes respects à vostre exemple. Je suis etc.

XXIX.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 5 Maj. 1691.

J'ay reconnu qu'il est vray ce que vous me mandez de vos courbes qui satisfont à la mesme construction de soutangente, et je tombe d'accord que la chose est possible. Je devois bien avoir remarqué qu'il y a du moins trois courbes qui satisfont à une soutangente sans racine, sçavoir une sans quantité connue, une autre avec une telle quantité affirmative et la troisieme avec une negative. Mais comme vous vous estes servi du mot de plusieurs, il semble que ce nombre de trois courbes ne vous borne point, du moins dans les soutangentes avec racine.

Mr. Fatio au reste, voiant combien le probleme renversé des Tangentes est important dans ce cas où il y entre des racines composées dans la soutangente donnée, et y aiant, comme je crois, trouvé plus de difficulté qu'il n'avoit pensé, veut bien que l'echange se fasse de vostre methode en cela, contre la siene, dont il a resolu mes problemes des soutangentes et plusieurs autres, ainsi que vous l'aviez souhaité, de sorte, Monsieur, qu'il ne tiendra qu'à vous que le traité s'execute, duquel je seray garand, et si tost que j'auray receu l'exposition de vostre methode, je vous feray avoir celle de Mr. Fatio, qui en verité est tres belle. Je vous prie d'estre clair en ce que vous nous donnerez, et de ne pas supposer que nous entendions vostre calculus differentialis.

Je vous prie d'envoier la lettre cy jointe à Messieurs les autheurs des Acta de Leipsich. Elle contient le resultat de mes meditations sur la Chaine, et je vous l'envoie fermée expres, croiant que vous ne voudriez pas voir mes decouvertes devant que d'avoir envoié les vostres, ainsi que vous l'avez tesmoigné à l'egard de celles de Mr. Bernoully, que si vous les avez desia envoiées, vous verrez les mienes dans peu avec toutes les autres. Je ne crois pas, en considerant ce que vous m'avez mandé cy devant, que j'aye rien trouvé touchant ce probleme que vous n'ayez de mesme.

Je ne vois pas qu'on puisse accorder sa proposition pag. 105 à Mr. Newton, parceque ne considerant aucunement la nature de ce qu'il appelle Ovale, mais seulement que c'est une ligne fermée tout au tour, il n'exclud pas mesme le quarré ou le triangle.

J'ay vu autrefois le traité de Hooke touchant le ressort, et j'y ay remarqué quelque paralogisme, que je pourrois trouver parmi mes papiers. L'experience principale qu'on a faite est que lorsque les forces, dont un Ressort est comprimé, sont accrues d'accessions egales, aussi les espaces de son etendue diminuent egalement. Ce que l'on voit bien precisement observé quand les compressions sont legeres, et ne violentent pas le ressort jusqu'au bout. Mais dans le ressort de l'air la proportion reussit tousjours parfaitement, dont il y a des experiences dans les livres de Mr. Boyle.

Pour ce qui est de la declinaison de l'aiguille aimantée, ce qui me persuade plus qu'autre chose qu'on n'y sçaurait trouver de regle, c'est que je sçay qu'il y en a eu qui s'en sont enquis par beaucoup d'experiences, esperant de parvenir par ce moien au secret des Longitudes, mais sans succes.

J'ay escrit à mon frere en Angleterre touchant la recherche des Archives que vous demandez, quoyque je doute s'il trouvera des gens qui s'en veuillent donner la peine parmy cette nation assez paresseuse.

Je suis extremement fasché de vostre incommodité aux yeux, qui fait que je vous demande avec scrupule la response à cellecy, et cependant je seray fort aise d'apprendre si vous demeurez d'accord du trocq que je vous ay proposé. Je suis de tout mon coeur etc.

XXX.

Leibniz an Huygens.

A Hannover ce $\frac{12}{22}$ de May 1691.

Il y a quatre semaines que je suis hors d'Hanover, ayant esté à Hildesheim, Wolfenbutel, puis à Zel, d'où je suis retourné à Wolfenbutel, et y ay trouvé vostre lettre, qu'on m'avoit envoyée suivant l'ordre que j'avois donné. De Zel j'ay envoyé vostre incluse à Mrs. de Leipzig avec ma solution, et il sera curieux de comparer nos solutions et celle de Mr. Bernoulli. Je n'ay pas encor repondu à vostre precedente, parceque celle que j'avois écrite avant que de la recevoir, et à laquelle repond vostre derniere, y avoit satisfait en partie.

Quand j'auray respiré un peu des distractions du voyage dont les recherches dans les archives et bibliotheques m'ont imposé la necessité, j'envoyeray ma methode en echange de celle de Mr. Fatio.

Ce que j'ay vu de la cause de la pesanteur proposée par Mr. Varignon*), ne me satisfait pas non plus. C'est comme s'il disoit, qu'une riviere avec la meme rapidité a plus de force quand elle est plus longue, au lieu qu'à mon avis il ne s'agit que de l'endroit où le fluide opere.

Tout ce que donne Mr. Huet est plein d'erudition; mais la matiere de concordia Rationis et Fidei est bien delicate, et il est difficile de satisfaire en meme temps à la verité et à l'opinion, encor plus que de satisfaire ensemble à la foy et à la raison. J'avois esperé que quelque habile Cartesien repondroit à la censure de Mr. l'Eveque d'Avranches, mais ceux que j'ay vu rampent bien bas à mon avis et ne disent que des choses vulgaires, Peterman à Leipzig, Sulling à Breme et Schotanus chez vous. Il me semble que les Cartesiens ont fort dechû et qu'ils n'ont pas trop d'habiles gens.

Ce que vous avés remarqué, Monsieur, de la construction de la

---

*) Nouvelles conjectures sur la pesanteur. Paris 1690.

courbe faite par reflexion du miroir concave, donnée depuis peu par Mr. Tschirnhaus paroist fort vraisemblable. Car il a coutume d'aller un peu viste, ainsi il se peut qu'il n'ait pas connu au commencement la veritable construction. Dans les Actes de l'an 1682 il nous propose une methode generale d'oster les termes moyens des equations. Elle l'a trompé, parce qu'elle reussit dans le 3e degré; s'il en avoit voulu faire l'essay dans le cinquieme, qui n'est pas encore donné, il auroit trouvé la difficulté. Je suis avec zele etc.

XXXI.

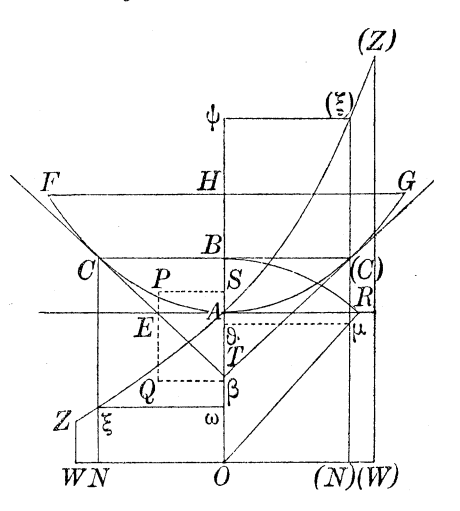
Leibniz an Huygens.

A Hanover ce $\frac{14}{24}$ de Juillet 1691.

Il y a plusieurs semaines, que je vous ay écrit de Wolfenbutel, que j'y avois receu votre lettre avec la solution de la ligne catenaire enfermée dans une lettre pour Mrs. de Leipzig, et que je n'avois pas manqué de la leur faire tenir. Depuis j'ay attendu à vous écrire de nouveau jusqu'à ce que j'ay receu le tout imprimé dans leur mois de Juin, où vous trouverés, Monsieur, vostre solution avec celle de Mr. Bernoulli et la mienne. J'ay pris plaisir de voir qu'on s'est rencontré. Cela nous asseure de ne nous estre pas mépris au moins dans le fonds; il est vray que je n'ay pas eu le loisir de faire une comparaison exacte, neantmoins ayant vu, que plusieurs conclusions s'accordoient, j'en juge autant des autres, ou s'il y a quelque faute (quoyque je n'en aye point remarqué) il ne sera pas difficile de la redresser. J'ay aussi cherché quelques uns de vos cas particuliers par mon calcul, et il m'est venu la meme chose. Ainsi je m'imagine qu'il y a de l'accord. J'espere que Mr. Bernoulli fera une plus exacte comparaison; et comme il employe ma methode, je prends part à ce qu'il a fait. Luy et moy nous avons reduit le probleme à la quadrature de l'Hyperbole, nous avons donné tous deux non seulement les tangentes et l'extension de la courbe, mais aussi le centre de gravité de la courbe, et moy j'y ay adjouté le centre de gravité de l'espace. Nous avons donné tous trois les tangentes et l'etendue de la courbe. Mr. Bernoulli s'est rencontré avec vous, Monsieur, à penser à la courbe dont l'evolution sert à descrire la ligne catenaire, et il a remarqué là dessus de fort jolies

choses. De sorte qu'il me semble qu'il a tres bien fait. Cependant il estoit bien eloigné, il y a deux ou trois ans, de se promettre quelque chose de cette nature, avant qu'il s'est façonné à mon calcul, comme il avoue luy même.

Avec tout cela ses constructions sont fort differentes des miennes. Car il se contente de supposer la quadrature d'Hyperbole ou l'extension de la courbe parabolique, et moy j'ay reduit le tout aux logarithmes, tant parce qu'ainsi tout vient d'une maniere tres simple et tres naturelle (tellement que la courbe catenaire semble estre faite pour donner les logarithmes) que parce qu'ainsi je puis trouver par la Geometrie ordinaire une infinité de points veritables, ne supposant qu'une seule proportion constante une fois pour toutes, qu'on ne sçauroit donner jusqu'icy geometriquement que par l'etendue d'une courbe, ou quelque chose de semblable, au lieu qu'autrement on est obligé à chaque point de la courbe qu'on demande de recourir aux voyes extraordinaires. Ne sçachant point, Monsieur, si vous avés deja receu le mois de Juin de Leipzig, je mettray icy l'abregé de mon discours en peu de mots. FCA(C)G la catenaire, et ZξA(ξ)(Z) la logarithme. On prend AO et ZW en raison S et K, constante et perpetuelle, une fois pour toutes les lignes catenaires et pour tous leur points. Faisant OW = O(W) = AO, et puis entre AO et WZ, item entre AO et (W)(Z) (supposant (W)(Z), AO et WZ en progression geometrique continuelle) on met pour ordonnées comme Nξ ou (N)(ξ) autant de moyennes proportionelles qu'on veut pour decrire la courbe logarithmique ZA(ξ)(Z). Or, posant ON et O(N) egales, NC ou OB ou OR est moyenne arithmetique entre Nξ et (N)(ξ) (dont la moyenne geometrique est AO parametre de la catenaire). Ainsi la courbe catenaire se construit fort bien par les logarithmes, et si elle se suppose construite par le moyen d'une chainette, elle sert à donner les logarithmes sans calcul, ex dato numero, ou bien numeros ex dato logarithmo. Voicy le reste des proprietés. Je suppose OR = OB et que G, P, Q sont les centres de gravité de CA(C), AC, AONCA. OR — AR = Nξ. OR + AR = (N)(ξ). Triangula OAR et CBT sunt similia (ou bien EAT), AR = AC, $\psi\omega$ = CA(C) = bis AC. Rectang. RAO = Spat. AONCA;



$O\vartheta : OA :: BC : AR$, $O\vartheta + OB =$ bis $OG =$ quater $O\beta$; et $AE = GP = \beta Q$.

Je n'ay pas expliqué quelle doit estre la proportion de K à S ou de WZ à OA; mais vous jugerés aisement, Monsieur, qu'AO doit estre egale à la soustangentiale (comme vous l'appellés) de la logarithmique, et que par consequent, posant $OW = AO$, la raison de AO à WZ est toujours la même et determinée. Ainsi toutes les logarithmiques aussi bien que toutes les catenaires sont semblables ou d'une mesme espece.

J'ay donné encor quelque chose dans le mois precedente, où j'ay redressé quelques fautes de mon vieux essay de resistentia medii; j'ay aussi rendu justice à vôtre series pour l'Hyperbole qu'on a eu tort de dire la même avec celle que j'avois donnée autres fois. Je me suis aussi servi de l'occasion pour expliquer la ligne loxodromique, ou des rumbes par les logarithmes, ce que j'avois trouvé il y a plusieurs années. Mais la catenaire m'en avoit fait ressouvenir. Aussi scait-on (ce me semble) que la chose se reduit à la somme des secantes appliquées à l'arc dont vous avés remarqué, Monsieur, dans votre solution que la catenaire depend aussi. Mr. Bernoulli y a joint aussi dans ce dernier mois la consideration de la Loxodromique. Mais il ne s'estoit pas apperçu, que la Loxodromique se reduit à la quadrature de l'Hyperbole, ou aux logarithmes ou à la catenaire.

Je voulois écrire il y a plus de trois semaines, pour envoyer ma solution que Mr. Fatio demande. Mais j'ay trouvé que vos lettres estoient restées à Wolfenbutel. Car comme j'y vay souvent, j'y ay un logis, où je laisse plusieurs papiers, mais les vostres y estoient restés par megarde. Et je n'ay pas voulu me hazarder sur ma memoire. Ainsi je ne puis satisfaire à ma promesse que dans quelques semaines, quand je serai à Wolfenbutel. Cependant je suis avec ardeur etc.

Beilage.

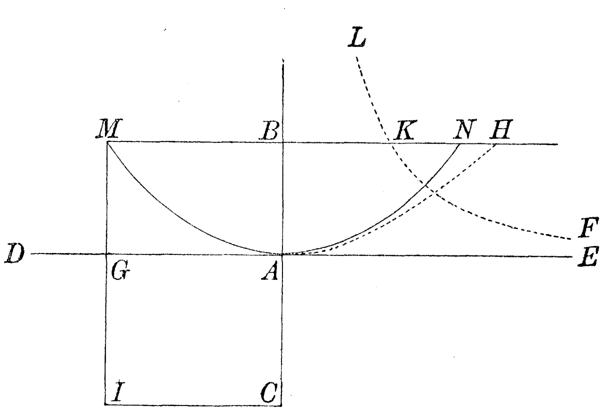
Der Vergleichung wegen folgen hier die Auflösungen des Problems der Kettenlinie von Joh. Bernoulli und Huygens.

Solutio Problematis Funicularis, exhibita a Johanne Bernoulli, Basil. Med. Cand.

(Act. Erudit. Lips. an. 1691.)

Annus fere est, cum inter sermocinandum cum Cl. Fratre mentio forte incidisset de Natura Curvae, quam funis inter duo puncta fixa libere suspensus format. Mirabamur rem omnium oculis et manibus

quotidie expositam nullius hucusque attentionem in se concitasse. Problema videbatur eximium et utile, at tum ob praevisam difficultatem tangere noluimus; statuimus itaque illud publice Eruditis proponere, visuri num qui vadum tentare auderent: nesciebamus enim, quod jam inde a Galilaei temporibus inter Geometras agitatum fuisset. Interea dignum censuit nodum hunc, cui solvendo se accingeret summus Geometra Leibnitius, significavitque non multo post se clave sua aditus problematis feliciter reserasse, concesso tamen et aliis tempore, intra quod si nemo solveret, ipse solutionem suam publicaturus esset. Id animum addidit, ut problema denuo aggrederer, quod eo quidem cum successu factum, ut brevi et ante termini a Viro Cl. positi exitum ejus solutionem omnimodam et plenariam, qualem antea ne sperare quidem ausus fuissem, invenerim. Reperi autem Curvam nostram Funiculariam non esse Geometricam, sed ex earum censu, quae Mechanicae dicuntur, utpote cujus natura determinata aequatione Algebraica exprimi nequit, nec nisi per relationem curvae ad rectam, vel spatii curvilinei ad rectilineum habetur, sic ut ad illam describendam alterius curvae rectificatio vel curvilinei quadratura supponatur, ut ex sequentibus Constructionibus liquet.

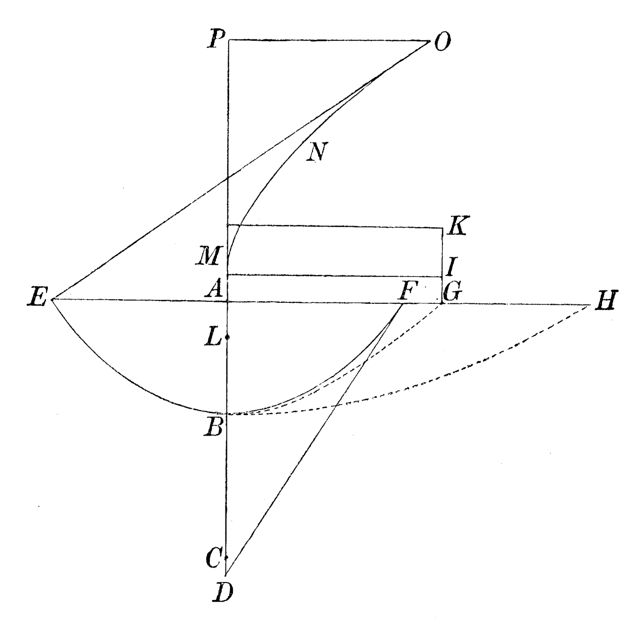


Construct. I. Ductis normalibus CB, DE sese secantibus in A, centroque C ubivis sumpto in axe CB, et vertice A descripta Hyperbola aequilatera AH, construatur curva LKF, quae talis sit ut ubique CA sit media proportionalis inter BH et BK; fiat rectangulum CG aequale spatio EABKF, erit productis IG, HB punctum concursus M in Curva Funicularia MAN.

Construct. II. Descripta ut prius ad axem BA Hyperbola aequilatera BG, construatur ad eundem axem Parabola BH, cujus latus rectum aequetur quadruplo lateris recti vel transversi Hyperbolae, ordinatimque applicata HA producatur ad E, ita ut recta GE sit aequalis lineae Parabolicae BH; dico punctum E esse in Curva Funicularia EBF.

Ex his patet, Curvae hujus EBF naturam per aequationem Geometricam haberi non posse, nisi simul rectificatio lineae Parabolicae

detur. Hujus autem et praecedentis Constructionis demonstrationem lubens omitto, ne Celeberrimo Viro primae inventionis palmam vel praeripiam, vel inventa sua super hac materia plane supprimendi ansam praebeam: sufficiet hic, si notabiliores hujus Curvae proprietates addidero:



1. Ducta tangente FD, erit AF · AD :: BC · BF curvam.

2. AE vel AF aequatur curvae Parabolicae BH, dempta recta AG.

3. Curva BE vel BF aequalis est rectae AG, i. e. portiones curvae funiculariae ad axem applicatae conficiunt Hyperbolam aequilateram: insignis est hujus Curvae proprietas.

4. Spatium Funicularium BAE vel BAF est aequale rectangulo sub BA et AF, diminuto rectangulo sub CB et FG.

5. Curva MNO, ex cujus evolutione describitur Funicularia BE, est tertia proportialis ad CB et AG.

6. Recta vero evolvens EO est tertia proportionalis ad CB et CA.

7. Recta BM usque ad principium curvae MNO sumta aequatur ipsi CB.

8. MP est dupla ipsius BA.

9. Rectangulum sub CB et PO duplum est spatii hyperbolici ABG.

10. Recta CP bisecta est in puncto A.

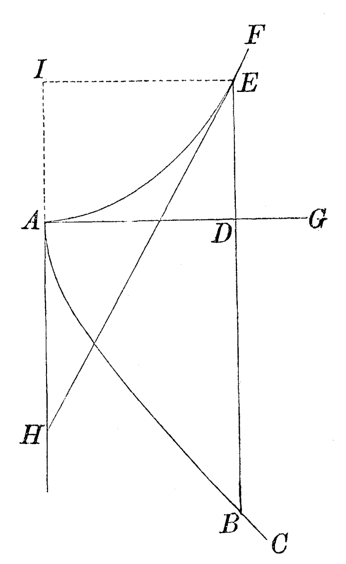
11. Curva EB est ad curvam MNO, ut recta CB ad rectam AG.

12. Si ad AG applicentur duo Rectangula AI, AK, quorum unum AI ei quod sub semilatere transverso CB et recta FG comprehenditur rectangulo, alterum AK quod ipsi spatio Hyperbolico BGA aequatur, et differentiae latitudinum KI sumatur in axe a vertice B aequalis BL, erit punctum L centrum gravitatis curvae Funiculariae EBF.

13. Si super EF infinitae intelligantur descriptae curvae ipsi Fu-

nicularias EBF aequales, illaeque in rectas extendantur, et in singulis singulae extensae punctis applicentur rectae ipsis respective distantiis a linea EF aequales, erit omnium spatiorum quae sic efficiuntur illud quod a Funicularia gignitur maximum.

Coepit Hon. Frater speculationem hanc extendere etiam ad funes inaequaliter crassos, quorum crassities ad longitudinem relationem obtinet aequatione algebraica exprimibilem, notatque unum casum, quo problema per Curvam simplicem Mechanicam solvi possit, nempe si supponatur Figura Curvilinea ABDEG, cujus applicata GE sit reciproce in dimidiata ratione abscisae AG, eaque sit in omnibus suis applicatis flexilis, hoc est, si concipiatur funis AG gravatus in singulis suis punctis respectivis rectis · GE, vel (quod tantundem est) differentiis applicatarum GH in Parabola AHI, aut denique portiunculis curvae cycloidalis AHI (cujus vertex A) isque sic gravatus suspendi intelligatur, ita ut punctum A sit omnium infimum (quod fit, ubi connexum habuerit a puncto A distantiis aequaliter gravatum): tum jubet ad axem AG construere Hyperbolam aequilateram ABC cujus vertex A, applicatamque BD producere ad E, ita ut rectangulum sub semilatere recto vel transverso et linea DE sit aequale spatio ADB, ostenditque punctum E esse ad curvam quaesitam AEF, quam funis dicta ratione gravatus format, ipsam vero curvam AE esse tertiam proportionalem ad rectum vel transversum latus Hyperbolae et applicatam ejus DB; tangentem EH haberi sumpta HI quarta proportionali ad semilatus rectum, abscissam AD et applicatam DB etc. Reperi autem, quod memorabile est, curvam hanc AEF illam ipsam esse, ex cujus evolutione altera BE, quam uniformis crassitiei funis format, describitur, adeoque eandem cum curva MNO.



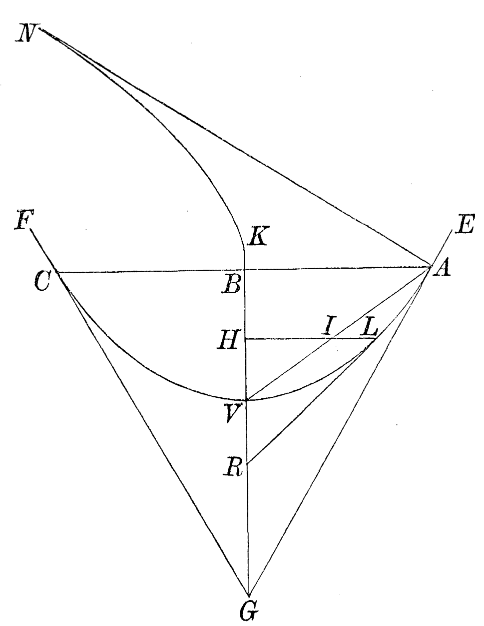
Notare convenit, quod si quis experimentis haec examinare instituat, catenulam prae fune seligere debeat, quem ob nimiam cum levitatem tum rigiditatem ad id ineptum deprehendimus. Caeterum qui

materiam hanc perficere et ampliare volet, poterit investigare naturam curvae, quam refert funis in hypothesi a Terrae centro distantiae finitae, vel si supponatur insuper a proprio pondere extensibilis, aut quocunque alio modo gravatus: vel etiam vice versa qualiter illum gravare conveniat, ut referat lineam Parabolicam, Hyperbolicam, Circularem aliamve quamcunque datam curvam, res enim omnino in potestate est.

Christiani Hugenii, Dynastae in Zeelhem, solutio ejusdem Problematis.

Si Catena CVA suspensa sit ex filis FC, EA utrinque annexis ac gravitate carentibus, ita ut capita C et A sint pari altitudine, deturque angulus inclinationis filorum productorum CGA et catenae totius positus, cujus vertex sit V, axis VB,

1. licebit hinc invenire tangentem in dato quovis catenae puncto. Velut si punctum datum sit L, unde ducta applicata LH dividat aequaliter axem BV. Jam si angulus CGA sit 60⁰, erit inclinanda a puncto A ad axem recta AIV aequalis $\frac{3}{2}$AB, cui ducta parallela LR tanget curvam in puncto L. Item si latera GB, BA, AG sint partium 3, 4, 5, erit AIV ponenda partium $4\frac{1}{2}$.



2. Invenitur porro et recta linea catenae aequalis, vel datae cuilibet ejus portioni. Semper enim dato angulo CGA, data erit ratio axis BV ad curvam VA. Velut si latera GB, BA, AG sint ut 3, 4, 5, erit curva VA tripla axis VB.

3. Item definitur radius curvitatis in vertice V, hoc est semidiameter circuli maximi, qui per verticem hunc descriptus totus intra curvam cadat. Nam si angulus CGA sit 60⁰, erit radius curvitatis ipsi axi BV aequalis. Si vero angulus CGA sit rectus, erit radius curvitatis aequalis curvae VA.

4. Poterit et circulus aequalis inveniri supenficiei conoidis ex revo-

lutione catenae circa axem suum. Ita si angulus CGA sit 60^0, erit superficies conoidis ex catena CVA genita aequalis circulo, cujus radius possit duplum rectangulum BVG.

5. Inveniuntur etiam puncta quotlibet curvae KN, cujus evolutione, una cum recta KV, radio curvitatis in vertice, curva VA describitur, atque evolutae ipsius KN longitudo. Veluti si angulus CGA fuerit 60^0, erit KN tripla axis BV. Si vero latera GB, BA, AG sint ut 3, 4, 5, erit illa $\frac{9}{4}$ axis BV.

6. Praeterea spatii NKVAN quadratura datur. Posito enim angulo CGA 60^0, erit spatium illud aequale rectangulo ex axe BV et ea quae potest triplum quadratum ejusdem BV. Si vero latera GB, BA, AG sint ut 3, 4, 5, erit idem spatium aequale septuplo quadrato BV cum parte octava.

7. Porro puncta quotlibet catenae inveniri possunt, posita quadratura curvae alterius harum : $xxyy = a^4 - aayy$ vel $xxyy = 4a^4 - x^4$, vel etiam data distantia centri gravitatis ab axe, in portionibus planis, quas abscindunt sectae axi parallelae in curva harum priore. Quadratura autem hujus curvae pendet a summis secantium arcuum per minima aequaliter crescentium, quae summae ex Tabulis sinuum egregio quodam adhibito compendio inveniuntur quamlibet proxime. Hinc ex. gr. inventum, quod si angulus CGA sit rectus, et ponatur axis BV partium 10000, erit BA 21279, non una minus. Curva autem VA per superius indicata cognoscitur hic esse partium 24142, non una minus.

In his omnibus non nisi ad casus singulares solutiones problematum dedi, vitandae prolixitatis studio, et quoniam non dubito quin regulas universales Viri docti affatim sint exhibituri. Quod si tamen aliquae ex nostris requirentur, eas lubenter mittam. Ac jam pridem omnes apud clarissimum Virum G. G. Leibnitium involucro quodam obtectas deposui.

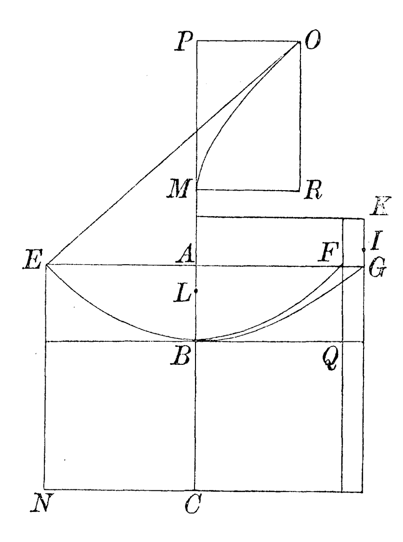
XXXII.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 1 Sept. 1691.

Peu de jours apres que j'eus receu vostre lettre du 24. Jul. l'on m'apporta les Acta de Leipsich de May et Juin, où je vis avec bien du plaisir outre vos inventions touchant la Catenaria, lesquelles vous

veniez de me communiquer, celles de Mr. Jo. Bernouilly. Je vous admiray tous deux, et vous, Monsieur, surtout, d'avoir si bien reussi à decouvrir les proprietez de cette Courbe, et ayant examiné vos constructions et vos Theoremes, je trouvay que tout quadroit ensemble, comme aussi avec ce que j'ay donné en ce que nous avons de commun et qu'il n'y avoit aucune erreur. Je consideray en suite pourquoy plusieurs de vos decouvertes m'estoient échappées, et je jugeay que ce devoit estre un effet de votre nouvelle façon de calculer, qui vous offre, à ce qu'il semble, des veritez, que vous n'avez pas mesme cherchées, car je me souviens que dans une de vos lettres precedentes, vous m'aviez dit, en parlant de ce que vous aviez trouvé touchant la Catenaria, que le calcul vous offroit cela comme de soy mesme, ce qui certainement est fort beau. Pour moy je puis dire que j'ay trouvé tout ce que j'ay cherché et plus, mais je n'ay point cherché ni vostre dimension de l'espace ni les deux centres de gravité, n'ayant pas espéré qu'ils fussent trouvables. Ainsi ils me sont echappez, quoyque j'en aye esté fort pres. Car j'ay assez reconnu, en examinant vos Theoremes là dessus, par quelle voye j'y aurois pu parvenir et que ces Theoremes ont une mesme origine. J'ay aussi remarqué en passant que Mr. Bernouilly, pour avoir le centre de gravité L de la courbe EBF, au lieu qu'il prend BL égale à IK, n'avoit qu'à prendre AL égale à GK, et qu'ainsi le rectangle de GA, AL est tousjours égal à l'espace hyperbolique BGA. Par où il auroit encore facilement trouvé le centre de gravité de l'espace EBF, ou, qui vaut autant, de vostre espace AONC.



Ses propositions 1, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sont en partie les mesmes et en partie aisées à deduire des choses que j'avois trouvées, en estant comme des corollaires, quoyqu'il en ait de fort jolies, dont peut estre je ne me servis jamais avisé. Pour ce qui est de la surface du Conoide, je vois qu'il n'en dit rien, ni vous, Monsieur, touchant la courbe dont la Catenaria s'engendre par evolution, apparemment parce que vous n'y avez pas songé. Apres ma dimension de l'espace BMOE, et la vostre de l'espace BEA dans la 2e fig. de Mr. Bernouilly, l'on peut aussi trouver celle de l'espace MOR, que la courbe MO retranche du rectangle MPOR, lequel espace

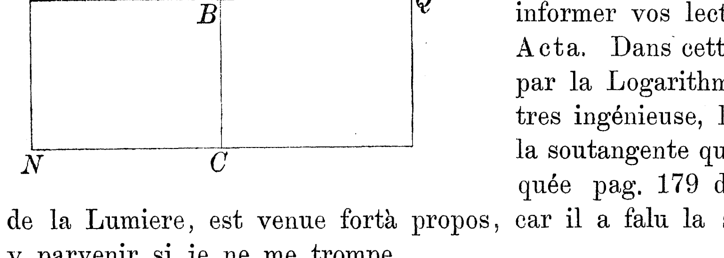
devient egal au rectangle FC, lorsque BA est egal à BM ou BC, mais qu'a-t-on à faire, direz vous, de chercher si avant!

J'avois fait tout cet examen, et les remarques dont je viens de parler, sans beaucoup de peine, et dès les premiers jours, mais je n'ay pu trouver la Reduction de la construction de la Courbe à la quadrature de l'Hyperbole, et c'est ce qui m'a fait differer de vous faire response. Car cette reduction me paroissant fort belle, parce qu'elle donne la maniere de trouver avec facilité des points dans la courbe, j'aurois esté bien aise d'en decouvrir auparavant la methode par ma propre meditation, qui, à dire vray, a esté interrompue par plusieurs affaires et distractions de toute sorte. Enfin je n'y vois point de jour encore, et puis que Mr. Bernouilli, aussi bien que vous, a reussi en ce point, j'en conclus qu'il faut que vostre nouveau calcul vous ait conduit tous deux, ou bien une plus grande connoissance que vous vous estes acquise l'un et l'autre en ce qui est des quadratures et leur relations et dependances mutuelles. J'ay recherché là dessus ce que je me souvenois d'avoir vu dans les oeuvres posthumes de Mr. Fermat, mais ce Traité est imprimé avec tant de fautes, et de plus si obscur, et avec des demonstrations suspectes d'erreur, que je n'en ay pas scu profiter. Vous me ferrez donc tres grand plaisir, Monsieur, si vous me voulez donner quelque lumiere en cecy, ce que peut estre vous pouvez en fort peu de paroles. J'avois reduit cette construction, comme vous scavez, à la dimension de la Courbe $xxyy \infty - aayy + a^4$, et je vois maintenant quel espace hyperbolique est egal à un espace de cette courbe, mais je ne scay pas comment j'aurois pu trouver cela; et il se peut que vostre Reduction est fondée sur autre chose, ce que je seray bien aise d'apprendre. Si Mr. Bernouilly en examinant le raport entre nos inventions (ainsi que vous le souhaitez) vouloit en mesme temps expliquer les fondements de ses decouvertes, il ne seroit pas besoin que vous prissiez la peine de m'instruire, et il m'aideroit par là à entendre vostre *calculus differentialis*, dont je commence avoir grande envie; mais peut estre il nous fera attendre encore longtemps.

Je ne voudrois jamais m'amuser à ces differentes natures de chaines que Mr. Jo. Bernouilli propose, comme devant achever ou pousser plus loin cette speculation. Il y a de certaines lignes courbes que la nature presente souvent à nostre vue, et qu'elle decrit pour ainsi dire elle mesme, lesquelles j'estime dignes d'estre recherchées, et qui d'ordinaire renferment plusieurs proprietez remarquables, comme l'on voit au Cercle, aux Sections coniques, à la Cycloide, aux premieres Paraboloides, et à cette *Catenaria*. Mais d'en forger de nouvelles seulement pour y exercer sa Geometrie, sans y prevoir d'autre utilité, il me semble que

c'est difficiles agitare nugas, et j'ay la mesme opinion de tous les Problemes touchant les nombres. Calculis ludimus, in supervacuis subtilitas teritur, dit quelque part Seneque, en parlant de certaines disputes frivoles des philosophes grecs.

Pour ce qui est de la courbure du Ressort, dont l'autre Mr. Bernouilli fait mention*), elle peut meriter quelque attention, estant encore une de ces lignes que la nature decrit, quoyque je doute fort si on trouvera des Principes aussi surs que ceux qui servent à la speculation de la Chainette. Il parle outre cela de la courbe que produit une voile tendue par le vent, comme estant d'une meditation tres sublime. En quoy je veux croire que je n'entens pas ce qu'il veut dire, parce que cette courbure en arc de cercle, qu'il donne à une partie de la voile, me paroist trop absurde (en l'intrepretant simplement) pour qu'il se puisse estre trompé si grossierement.



Voicy à peu pres la fig. 2[e] de Mr. Bernouilly à laquelle se rapportent les deux remarques precedentes. Vous avez fort bien fait de m'advertir dans vostre lettre que BC, ou bien AO dans vostre figure, doit estre la soutangente de la Logarithmique, car j'aurois eu de la peine à le deviner et il me semble que vous en deviez informer vos lecteurs dans les Acta. Dans cette construction par la Logarithmique, qui est tres ingénieuse, la proprieté de la soutangente que j'ay remarquée pag. 179 de mon Traité de la Lumiere, est venue fortà propos, car il a falu la supposer pour y parvenir si je ne me trompe.

J'espere que vous aurez trouvé du temps pour achever ce que vous m'avez promis touchant les Tangentes, et je l'attens avec impa-

*) Jacob Bernoulli hatte am Schluß der Abhandlung: Specimen alterum Calculi differentialis in dimetienda Spirali Logarithmica, Loxodromiis Nautarum et Areis Triangulorum Sphaericorum etc. (Act. Erudit. Lips. an. 1691) ein „Additamentum ad Problema Funicularium" hinzugefügt, in dem er verschiedene andere Curven, welche die Natur darbietet, zur Sprache bringt.

tience; mais je ne souhaite pas moins d'apprendre la Reduction dont je vous ay parlé, et dont je vous auray l'obligation toute entiere. Je suis avec infiniment d'estime etc.

P. S. Je ne scay pas pourquoy ces Mrs. de Leipsich m'ont donné cette fois le titre de Dynasta in Zulichem au lieu de Zeelhem, qu'ils ont mis cy devant et qui estoit comme il faut. On pourroit croire qu'ils parlent de deux Christiani Hugenii; vous pouvez par occasion, Monsieur, les detromper.

XXXIII.

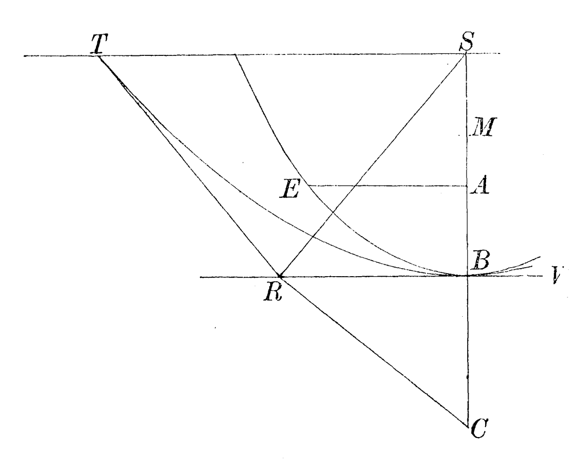
Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 4 Septembre 1691.

Il y a 3 jours que je donnay l'honneur de vous escrire une assez longue lettre. A peine une demie heure apres que je l'eus envoiée à la poste, je trouvay avec plaisir ce que jusques là je n'avois pu penetrer, sçavoir la Reduction de la Construction de la Catenaria à la quadrature de l'Hyperbole, de sorte que je souhaitois fort de faire revenir ma lettre pour y adjouter cela, mais comme je demeure icy à ma maison de campagne, à une lieue de la Haye, le courier auroit esté parti devant que j'eusse pu contremander celuy que j'en avois chargé. Je n'ay donc pu m'empecher de vous escrire cette autre, non seulement pour vous epargner la peine de me montrer ce qui en cecy m'avoit semblé trop difficile, comme je vous en avois prié, mais aussi pour vous faire voir la Construction qui m'est venue, afin que je puisse sçavoir si je n'ay pas tenu la mesme route, que vous, Monsieur, dans cette recherche; ce que je croiray estre ainsi, si apprens que vous ayez rencontré la mesme construction, devant que d'aller à la vostre par les Logarithmes. C'est une merveille comment quelque fois en un clin d'oeil on s'apperçoit de ce qu'on n'a sçu voir auparavant quoyqu'en estant fort proche.

J'avoue qu'il y a eu du hazard et du bonheur à mon égard, et c'estoit beaucoup de sçavoir que la chose estoit possible: c'est pourquoy j'estimeray d'autant plus vostre methode, si elle vous a conduit d'abord à faire cette decouverte, aussi bien que Mr. Bernoulli, sans que vous sçussiez rien l'un de l'autre quant à ce point de recherche. Ma construction est telle. Que CS, RV se coupent à angles droits en B, qui

soit le sommet de la Chainette, BC le parametre, à qui soit prise egale BM. Pour trouver la longueur de quelque appliquée AE à un point A de l'axe, il faut mettre CR egale à CA, et sur CR mener la perpendiculaire RS, qui rencontre l'axe en S. Puis appliquer ST à angles droits à l'axe RS de la parabole BT, dont le sommet soit B, le foier M. Alors, si de la courbe parabolique BT on oste la droite RS, ou bien RT, qui est tangente de la parabole en T, le reste sera egal à appliquée AE. Cette construction differe beaucoup de celle de Mr. Bernoully, sans que je me puisse imaginer pourtant, par quelle autre voie la siene a esté trouvée, hors celle que j'ay suivie.



Ce seroit une belle chose qu'une methode pour connoistre, quand l'Equation d'une Courbe est donnée, si sa dimension se peut reduire à celle de l'Hyperbole ou du Cercle, et j'avois cru que vous et Mr. Bernoully aviez eu quelque telle invention. C'est ce qui m'a fait bien du chemin en vain, sans m'appercevoir du veritable, qui est fort beau et sans beaucoup de detour, comme je crois que vous le scavez fort bien. Avant hier me vint voir icy le Sr. Weigelius, professeur à Jena, qui m'entretint de ses grands desseins pour l'avancement des sciences, et qui paroit extremement satisfait de certaines demonstrations qu'il pretend avoir de l'Existence de Dieu et de la Providence. Je l'iray voir à la Haye, où il dit avoir un coussin rempli de ressorts, et d'autres curiositez qu'il veut me montrer. Il dit qu'il a l'honneur de vous connoitre depuis le temps que vous estudiez en Mathematiques sous luy. J'aimerois bien mieux voir icy son disciple, à qui je suis etc

P. S. Devant que de fermer cette lettre, j'ay consideré les paroles de Mr. Bernoulli, dans ce qu'il a donné dans les Acta touchant la Catenaria, où il dit: Hujus autem et praecedentis constructionis demonstrationem lubens omitto, ne celeberrimo viro primae inventionis palmam vel praeripiam, vel inventa sua super hac materia plane supprimendi ansam praebeam. D'où il semble qu'il avoit envoié ses decouvertes à Mrs. de Leipsich pour vous estre communiquées. Car si son intention eust esté qu'elles fussent tenues

secrettes, jusqu'à la publication generale, comment vous pouvoit il praeripere palmam primae inventionis (de quoy il a cru se garder en ne decouvrant pas ses deux demonstrations) ou vous donner sujet de supprimer vos inventions. Je veux croire pourtant, puisque vous m'en assurez, Monsieur, que vous n'avez point vu la construction de Mr. Bernouilli, devant que de donner la vostre; mais il se pourroit qu'il seroit venu à vostre connaissance (puisque le memoire de Mr. Bernouilli estoit à Leipsich depuis le mois de Decembre et qu'il n'en avoit pas recommandé le secret) qu'il l'avoit reduite à la quadrature de hyperbole; ce qui me paroist d'autant plus vraisemblable, que l'invention de cette construction ne semble pas dependre de vostre methode, mais d'une remarque particuliere qui ne s'offre pas facilement d'elle mesme. Il est vray aussi que lorsqu'au mois d'Octobre 1690 vous me racontastes sommairement vos decouvertes touchant cette courbe, vous adjoutiez supposita ejus constructione, de sorte que vous n'aviez pas encore alors cette construction. Vous auriez pu prevenir tous ces doutes, qui en tout cas ne vous peuvent pas faire grand tort, en donnant vos inventions sous la couverture du chifre, comme je vous l'avois conseillé plus d'une fois.

XXXIV.

Leibniz an Huygens.

Bronsvic $\frac{11}{21}$ Septembre 1691.

J'ay receu vos deux lettres du 1 et du 4 Septembre qui m'ont rejoui par les bonnes nouvelles de vostre santé, où je m'interesse beaucoup. Je suis bien aise aussi d'apprendre par l'examen que vous avés fait, que nos solutions s'accordent. Je n'avois pas songé à la courbe, qui par son evolution peut produire la chainette. Cependant je voy qu'il est bon d'y songer dans les rencontres. Je ne scay, Monsieur, si vous avés remarqué un petit discours de Angulo Contactus et Osculi*), que j'avois mis dans les actes de Leipzig mois de Juin 1686, où je considere, que la direction de la courbe se doit exprimer par la droite qui la touche, parceque la droite a par tout la même direction.

---

*) Meditatio nova de natura Anguli contactus et osculi, horumque usu in practica Mathesi ad figuras faciliores succedaneas difficilioribus substituendas (Act. Erudit. Lips. an. 1686).

Et la droite qui touche ne fait avec la courbe qu'un angle de contact, qui est moindre que tout angle de droite à droite. Mais la courbure ou flexion de la courbe en chaque point se doit exprimer par le cercle qui l'y touche le plus exactement, ou qui la baise, car le cercle a par tout la même courbure; et le cercle qui baise ne fait avec la courbe qu'angulum osculi, comme je l'appelle, qui est moindre que tout angle de contact de cercle à cercle. Et ce cercle sera la mesure de la courbure. Ce qui s'accorde avec ce que vous dites, Monsieur, du Rayon de la curvité. C'est pourquoy on fait bien de considerer cecy en examinant les courbes, et les centres des cercles mesurans la courbure tombent dans vôtre generatrice par evolution. Il seroit peut estre bon de continuer la progression et d'examiner quelle courbe seroit la plus propre à estre la mesure de l'osculation du second degré. Il est vray qu'on ne trouvera point d'autres courbes uniformes. Cependant comme deux contacts coincidans font l'osculation, on pourroit encore considerer la coincidence de trois contacts et même de 4 contacts, ou de deux osculations etc. Je suis bien aise que par vos decouvertes jointes aux nostres, nous avons la quadrature de la generatrice de la chainette.

Il est vray, Monsieur, comme vous jugés fort bien, que ce qu'il y a de meilleur et de plus commode dans mon nouveau calcul, c'est qu'il offre des verités par une espece d'analyse, et sans aucun effort d'imagination, qui souvent ne reussit que par hazard, et il nous donne sur Archimede tous les avantages que Viete et des Cartes nous avoient donnés sur Apollonius. J'avoue que je ne l'ay pas encor portée à sa perfection et je ne scay si d'autres occupations me la permettront. Cependant je ne croy pas que jusqu'icy on ait esté en meilleur chemin, ny plus avant. Depuis que vous avés trouvé vous même la reduction de la Catenaire à la quadrature de l'Hyperbole, vous avés eu quelque raison, Monsieur, de croire, qu j'y pouvois être arrivé aussi par une semblable remarque particuliere. Et même vôtre soubçon est allé un peu trop avant, jusqu'à me faire une petite querelle. Mais je n'ay pas trouvé necessaire de m'en emouvoir. Vous sçaurés, Monsieur, que Mrs. de Leipzig ont gardé à Mr. Bernoully une entiere fidelité, et bien loin de me decouvrir sa solution, ils ne m'ont pas même mandé qu'elle procedoit par la quadrature de l'Hyperbole. Je ne sçay s'il leur a recommandé le secret, mais ils sont bien jugé qu'ils le luy devoient, et c'est moy qui le leur ay recommandé moy même, de peur que Mr. Tschirnhaus n'en sçut quelque chose, car lorsque j'avois proposé le probleme, je l'avois eu en vue, à cause des grands bruits qu'il faisoit de ses methodes. Mais si vous ne nous voulés pas croire, ny ces Mrs. de

Leipzig, ny moy, sur notre parole, j'ay en main une preuve, aussi bonne qu'auroit pû estre le chifre que vous m'aviés conseillé à la fin, et dont je me suis dispensé par paresse et par distraction, ne le jugeant plus necessaire. Elle ne vous permettra point de douter que j'aye sçu la reduction à la quadrature de l'Hyperbole avant l'arrivée de la solution de Mr. Bernoulli à Leipzig. C'est que je l'ay mandée à un amy de Florence*) dans une de mes lettres du 26 d'Octobre ou du 9 de Novembre, car il repond à la fois à ces deux, et je ne me souviens pas dans laquelle j'ay touché ce point, et il m'y promet là dessus le silence que je luy avois recommandé. Il me semble aussi, que vous pervertissés un peu le sens des paroles de Mr. Bernoulli. Et je croy que vous voulés railler. Je pense, que le terme que j'avois donné pour la solution expirant avec l'année, il s'imagina que la mienne seroit bientost, ou pourroit estre déja entre les mains de Mrs. de Leipzig, pour estre imprimée, et qu'en ce cas, ils ne feroient peut estre pas difficulté de me communiquer la sienne, ny moy de la voir et qu'elle me pourroit rebuter, s'il m'ostoit la matiere de dire quelque chose de nouveau et s'il me ravissoit jusqu'aux demonstrations. Mais cette apprehension n'estoit pas necessaire. D'ailleurs je ne me pressois pas lors même que je sçus que la solution de Mr. Bernoully estoit arrivée, parceque je voulus encor donner du temps à des sçavans hors de l'Allemagne d'y essayer leur Analyse. Car j'ay ecrit pour ce sujet en France et en Italie, mais sans en rien tirer. Pour vous dire la verité, je n'avois pas crû que Mr. Bernoully auroit reduit le probleme à la quadrature de l'Hyperbole, et je ne l'ay scû que lorsque j'ay vu sa solution imprimée, et j'ay trouvé qu'il avoit surpassé mon attente. Je ne sçay pas bien comment il est arrivé à cette reduction, et je veux bien croire que c'estoit par une remarque particuliere, mais que l'usage de nostre calcul luy avoit peut estre rendue aisée. Car s'il l'avoit obtenue par une voye plus generale, il n'auroit pas ignoré que la construction de la ligne des Rhumbes ou la loxodromique depend de cette même quadrature de l'Hyperbole et de la même façon; car il s'est contenté de la construire par une quadrature plus composée dans les Actes du mois de Juin dernier pag. 284. 285. Au lieu que je l'ay reduite à la quadrature de l'Hyperbole, Actes du mois d'Avril p. 181. Ce que j'y dis suffit aussi pour donner la reduction de la Chainette, quoyque je l'aye dissimulé, car j'y dis expressement que la ligne des Rhumbes se construit par la somme des secantes, et je crois que Snellius l'avoit déja remarqué. Or j'y monstre, comment cette somme

*) Freiherr von Bodenhausen, der unter dem Namen eines Abbé Bodenus als Erzieher des Erbprinzen am toskanischen Hofe lebte.

des secantes se reduit à la somme de l'Hyperbole et j'en donne le fondement. Et vous sçavés que cette même somme des secantes sert aussi pour la chainette. Il y a plus de 10 ans que j'ay trouvé la construction de la loxodromique, mais la recherche de la chainette m'en fit ressouvenir. Vous parlés, Monsieur, dans votre solution d'une maniere fort bonne de trouver les sommes des secantes par les Tables. Est il permis de l'apprendre? Cependant je vous avoueray bien que ce n'est pas par la voye de la figure, suivant ce que je dis p. 181, que je suis arrivé à la reduction de la loxodromique ou de la chainette, quoyque j'aye esté bien aise de m'en servir pour les autres.

Vous vous souviendrés peut être, Monsieur, de mes lettres, où je recommande les expressions exponentiales, ou (qui est la meme chose) logarithmiques. Vous en voyés maintenant l'usage dans la chainette, car c'est ainsi qu'on donne des veritables points des lignes transcendantes. Et je croy que c'est ultimum quod in illis humano ingenio praestari potest. Il est vray que ce n'est pas tousjours si aisement. Cependant icy le calcul m'a mené tout d'un coup à la consideration des Logarithmes, sans que j'ay eu besoin d'y aller par detour. Ce que j'avois dit que je faisois dans la courbe, supposita ejus constructione, ne vous doit point troubler. Je le diray bien encor, comme si je disois que ducere minimam ex puncto dato ad parabolam est un probleme resolu le plus absolument, suivant le style des anciens, mais supposita parabolae constructione. Car alors on n'a besoin que de la regle et du compas. Quoyque j'aye la construction de la chainette aussi bonne qu'il est possible d'avoir, ce n'est pas tout à fait suivant la Geometrie ordinaire. Voudriés vous que j'eusse dit en vous écrivant suppositis logarithmis et supposita quadratura Hyperbolae, ou quelque chose de semblable? En parlant comme j'ay fait, je me tenois dans la generalité et je ne voulois pas faire penser que j'avois quelque chose de plus qu'on n'auroit pû attendre. Mais c'est assés de ce procès.

Vous avés raison d'estimer la methode de reduire les quadratures à celles de l'Hyperbole ou du cercle quand cela se peut. J'ay quelque chose là dessus, et ce que j'estime beaucoup là dedans, c'est qu'une même methode me mene à une solution absolue, ou au cercle ou à l'Hyperbole, selon la nature de la chose. Mais je n'ay pas encor passé certains limites. Il me faudrait de l'assistance, car je suis rebuté des calculs. Je souhaitterois aussi de pouvoir tousjours reduire les quadratures aux dimensions des lignes courbes, ce que je tiens plus simple. Avés-vous peut-estre pensé à ce point, Monsieur?

Lorsque j'ay donné mon calcul Octob. 1684, j'ay aussi remarqué

p. 473 que la soutangente de la logarithmique est constante. Je l'avois même deja mis dans mon traité de la quadrature Arithmetique, où je m'en servois à la quadrature de l'espace de la Logarithmiqué. Mais j'ay quitté la pensée de publier ce traité.

A l'egard des lignes de Mr. Bernoulli, vous avés raison, Monsieur, de ne pas approuver qu'on s'amuse à rechercher des lignes forgées à plaisir. J'y adjoute pourtant une limitation: si ce n'est que cela puisse servir à perfectionner l'art d'inventer. C'est pourquoy je ne desapprouve pas que des personnes qui ont du loisir et de l'inclination, et surtout des jeunes gens, s'y exercent. Et c'est pour cela que je ne veux pas décourager non plus ceux qui s'exercent dans les nombres, parceque c'est encore en cela que je trouve l'Analyse imparfaite. Je souhaitte que nous puissions encor dans ce siecle porter l'analyse des nombres et des lignes à sa perfection, au moins quant au principal, ut hac cura genus humanum absolvamus, afin que doresnavant on tourne toute la subtilité de l'esprit humain à la physique. Je croy qu'on pourroit voir ce souhait accompli, si quelques personnes propres à cela s'entendoient. Du reste je n'ay pas entendu non plus ce que Mr. Bernoulli veut dire avec son arc de cercle dans la voile. Les occupations que j'ay m'ont fait resistent à la tentation de penser aux choses qu'il propose. Si M. Fatio le veut, nous envoyerons à Mr. Meyer à Breme nos methodes promises pour les Tangentes, afin qu'il en fasse l'echange quand il les aura receues toutes deux.

Je remarque plusieurs fautes d'impression dans mon discours sur la loxodromie, actes de Leipzig du mois d'Avril p. 181. Car ligne 12, au lieu de ${}_1l_2l$ il faut mettre ${}_1l_3l$, et ligne 20 au lieu de ${}_1l_2l$ il faut mettre ${}_1l_1d$; et ligne 25 au lieu de ${}_1d_3l$ il faut mettre ${}_2l_3l$, et pag. 182 ligne 20 j'ay manqué moy même par inadvertance, mettant $\frac{e}{1}+\frac{e^3}{3}+\frac{e^5}{5}$ etc. au lieu de mettre comme j'avois deja mis auparavant $\frac{e-(e)}{1}+\frac{e^3-(e)^3}{3}+\frac{e^5-(e)^5}{5}$ etc. ce que le discours fait assez voir. Je remarque cela afin que si vous vouliés daigner de lire ces choses, vous n'en soyés point arresté. Je crois d'avoir deja indiqué quelque chose dans ma precedente touchant ce rapport de la loxodromique à la chainette. Du moins puisque vous aviés reduit la chainette à la somme des sécantes selon les arcs dans votre solution, et que j'avois reduit cette somme aux logarithmes, dans les actes d'avril 1691, vous y pouviez déja voir le rapport de la chainette à la quadrature de l'Hyperpole. L'equation de la courbe auxiliaire (selon vous) estant $xxyy=a^4-aayy$, je ne sçais comment vous vient $xxyy=4a^4-x^4$, la

quadrature, ou $\int xdy$ est la somme des tangentes, selon les sinus de complement, laquelle se trouve égale à la difference entre la somme des secantes selon les arcs et la somme des sinus de complement selon les arcs. Or cette derniere somme est trouvable absolument, donc la quadrature à laquelle vous reduisés la chainette, depend de la somme des secantes selon les arcs, que j'ay reduite aux logarithmes. Et pour appliquer vostre equation à la chainette, x estant la longueur de la chainette depuis le sommet, la somme des y (selon les x) sera l'ordonnée de la chainette, a estant l'unité ou le parametre. C'est ainsi que la quadrature de vostre courbe donne la chainette. Je ne sçay si j'ay deviná vos raisonnemens. Je suis avec zele etc.

XXXV.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 16 Novembre 1691.

Je me suis ces deux derniers mois abstenu de l'etude et du travail, ayant de la peine à conserver ma santé dans un temps où une infinité de monde dans ce pais est tombée malade. C'est ce qui est cause que je repons si tarde à vostre derniere lettre du $\frac{11}{21}$ Sept. Je m'en vais maintenant le faire par ordre pour ne rien oublier; mais auparavant je vous remercieray d'avoir reparé l'erreur de Mrs. de Leipsich, touchant ma Progression dans l'Hyperbole, et surtout de l'honneur que vous m'avez fait dans les Acta de Sept. dernier en publiant que mes escrits autrefois vous ont esté de quelque utilité.

Vous me parlez, à propos de la courbure de la Chaine, de vostre discours de Angulo Contactus et Osculi. Vous pouvez bien croire qu'en ce lisant je ne trouvay pas cette consideration nouvelle, parce que ces sortes de contact entrent naturellement dans mes Evolutions des Lignes courbes. Je me souviens aussi que longtemps devant que de publier ce Traité j'avois communiqué à van Schooten quelque remarque là dessus, sçavoir de la circonference, qui coupant une parabole, semble la toucher au mesme point, c'est à dire que dans la parabole comme aussi dans les autres sections coniques il n'y a que le point du sommet où une circonference la puisse baiser; cela arrive

encore en plusieurs cas d'autres lignes courbes, quoyqu'il me semble que vous n'en avez rien dit.

Puisque j'ay bien jugé en quoy doit consister l'avantage que donne vostre nouveau calcul, je souhaiterois fort de voir comment il vous a fait trouver directement et sans effort d'imagination l'ἀπαγωγὴ de la Construction de la Chainette à la quadrature de l'Hyperbole ou aux Logarithmes. En effet vous devez donner au public l'exemple de vostre methode, afin qu'on voie de plus en plus son utilité et que les geometres puissent profiter de nostre exercitation. Pour moy si je trouve en suite que j'aye quelque chose de different dans mes recherches et qui merite d'estre sçu, je le publieray aussi tres volontiers. Cela sera peu, mais il y aura pourtant une maniere fort belle pour parvenir à la construction de la Courbe, et que je sçay estre differente de la vostre par les choses que vous me mandez, comme aussi differente de celle de Mr. Bernoully, par ce que je conjecture de son esprit inseré aux Acta.

Pour ce qui est du doute que j'avois proposé, je me tiens plus que satisfait apres avoir vu vostre exacte justification. Il est vray que quand j'ay lu ces mots de querelle et d'avoir perverti le sens des paroles de Mr. Bernoulli, j'ay dit bona verba, car en effet j'y estois allé de bonne foy, et le soupçon qui m'estoit resté estoit de trop peu d'importance pour que vous usassiez de tels termes en le refutant. Quand je vous en parlay, c'estoit que j'aurois esté bien aise que vous eussiez esté aussi peu clairvoiant que moy, dans cette question. Socium tarditatis meae quaerebam. Ce que vous me dites de n'avoir rien pu tirer de France ni d'Italie sur ce probleme, peut servir à me consoler, et marque qu'il n'est pas des plus faciles.

Ce n'est pas le jeune Bernoulli, mais l'ainé qui a travaillé de la Ligne Loxodromique, et j'ay trouvé etrange qu'apres que vous eussiez donné la bonne Construction pour trouver la longitude par la quadrature de l'Hyperbole, il se soit avisé trois mois apres, d'en donner une qui demande la dimension d'un espace inconnu et qui comprend une etendue infinie; cela s'appelle expliquer ignotum per ignotius.

J'ay regardé dans le Tiphys Batavus de Snellius, depuis que vous m'en avez averti, comment il demontre par des propositions aisées que cette invention des longitudes, scavoir quand la latitude et l'angle loxodromique est donné, depend de la somme des secantes. Il n'est pas allé plus loin; mais scaviez vous, Monsieur, que Jac. Gregorius dans ses Exercitations geometriques a reduit cette somme à l'espace qui chez vous est VMCA, et qu'il a egalé cet espace à un espace hyperbolique? Je crois certainement que vous ne vous en estes point souvenu, non plus que moy, car j'aurois pu par là achever de

trouver la construction de la Chainette, et plus facilement que par vostre calcul sur la Loxodromique, que je n'entendois pas, et que je n'ay demeslé que longtemps apres. Il paroit par un passage dans les notes de Albert Girard sur Stevin, qu'il doit avoir sçu la solution de cette mesme question des longitudes, car il parle de la difference entre la methode de Snellius par la Table des sommes des secantes et la methode parfaite, qu'il dit estre beaucoup plus courte; et il propose là dessus ce probleme, dont il promet la solution: scavoir quand l'angle loxodromique est donné de 89 degrés, combien de tours entiers et de degrez de longitude par dessus fera un vaisseau, en partant d'un point sous l'Equateur, pour arriver à la latitude de 89 degrez, et combien le point où il entrera dans ce parallele sera distant du lieu de son depart, le tout sans Tables. Je l'ay calculé par plaisir et j'y trouve 43 tours 85⁰ 57′. On ne connoissoit pas en ce temps là la quadrature de l'Hyperbole; mais ce Girard avoit penetré bien avant en plusieurs matieres de Geometrie, comme je vois par quelques endroits de ces mêmes notes. Il se trompe pourtant au commentaire sur la Statique par cordages, au sujet de la courbure de la ligne qui plie par son poids, la quelle courbure il pretend estre parabolique, et qu'il en a la demonstration.

Ma maniere pour trouver les sommes des secantes, que vous voulez scavoir, est telle. J'ajoute ensemble les secantes des arcs croissant par degrez entiers, ou par demi-degrez, jusques à l'angle donné. De leur somme je soustrais la moitié de l'exces dont la plus grande de ces secantes surpasse le rayon. Alors le reste aura à la somme d'autant de rayons fort pres la mesme raison (toutefois un peu plus grande) que la somme du nombre infini de secantes comprises dans l'angle donné, à la somme d'un pareil nombre de rayons. Par exemple au rayon 10000 la somme des secantes par demi-degrez jusques à 45 degrez inclusivement est 1012061, d'où j'oste 2071, moitié de l'exces de la secante de 45⁰ par dessus le rayon, reste 1009990, qui aura à la somme de 90 rayons, qui fait 900000, un peu plus grande raison que le nombre infini des secantes à pareil nombre de rayons. Je trouve aussi un terme mineur qui est 1009976, et qui est plus près du vray, mais il y a une regle de trois à faire. Suivant la Table de Snellius la somme des secantes jusqu'à 45 degrez par minutes est 30297320, quand le rayon est 10000. Il l'a posé de 10000000, pour faire le calcul de la somme plus juste, mais apres il a retranché 3 chifres. Or je trouve par ma regle que sa Table est fautive, car non seulement la raison de la somme de Secantes 30297320 à autant de rayons, qui font 27000000, mais aussi la raison de 30297320 moins 2071 à

27000000 devroit estre plus grande que celle des secantes infinies à autant de rayons. Laquelle par la regle parfaite des Logarithmes je trouve estre comme de 30299392 à 27000000. Donc la somme de Snellius est trop petite, et devroit avoir esté 30301463, scavoir 30299392 plus 2071. En supputant selon ma regle et par demidegrez, je trouve 30299700 pour le terme majeur, et 30299295 pour le mineur, ce qui confirme mon calcul, quoyque Snellius dit qu'il a fait le sien deux fois. Il y a peut-estre quelque faute dans la Table des Secantes. J'ay la demonstration de ma Regle, mais cecy est desia trop long. De quoy au reste peut servir le calcul de ces sommes, ou leur Table, puisque par les logarithmes les Problemes se resolvent beaucoup plus parfaitement.

Ce sera quelque chose de fort beau que vostre reduction des quadratures à celle du Cercle ou de l'Hyperbole, quand cela est possible, et j'espere que vous nous la communiquerez que vous l'aurez perfectionnée, ou quand mesme il y manqueroit quelque chose. J'aimerois bien aussi de pouvoir reduire les dimensions des espaces inconnus à la mesure de quelque ligne courbe quand ces deux quadratures n'ont point de lieu, mais je le crois le plus souvent tres difficile.

Vous aviez remarqué que la soutangente de la Logarithmique est constante, mais non pas que je sçache, qu'elle representoit le quarré de l'Hyperbole.

Il me tarde de voir ce que produira Mr. Bernouilli l'ainé touchant la courbure du ressort. Je n'ay pas osé esperer qu'on y aboutist à rien de clair ni d'elegant; c'est pourquoy je n'ay rien tenté. Dans la recherche des nombres le plus utile seroit de s'arrester aux Theoremes, dout il y en a des beaux, et qui peuvent servir dans des rencontres. Un nommé Rolle de l'Academie des Sciences à Paris a fait imprimer quelque traité en cette matiere, que je tacheray d'avoir, car on dit qu'il est fort habile.

Vous croiez, à ce qu'il semble, qu'il ne seroit pas extremement difficile d'achever de tout point la Science des Lignes et des Nombres. En quoy je ne suis pas jusqu'icy de vostre avis, ni mesme qu'il seroit à souhaiter qu'il ne restast plus rien à chercher en matiere de Geometrie. Mais cette etude ne doit pas nous empescher de travailler à la physique, pour laquelle je crois que nous scavons assez, et plus de geometrie qu'il n'est besoin; mais il faudroit raisonner avec methode sur les experiences, et en amasser de nouvelles, à peu pres suivant le projet de Verulamius.

J'attendois depuis longtemps, selon ce que vous aviez promis, vostre methode pour les Tangentes, et je vois avec deplaisir que vous

prenez à cette heure des precautions, comme doutant que je ne tiene pas ma parole. Mais quand nous envoierions en mesme temps nos escrits à Mr. Meier, comment serez vous assuré que j'auray dressé le mien de bonne foy? Si vous fuiez peut estre le travail, j'ay encore plus de raison de l'apprehender. Car Mr. Fatio, en partant il y a deux mois pour l'Angleterre, a repris la longue lettre où il m'avoit expliqué son invention; cette lettre aiant esté si fort changée et repetassée depuis que nous avions travaillé ensemble sur cette matiere, qu'elle estoit devenue tout autre. Ainsi je n'ay plus que les solutions des questions que nous nous proposames, et il faudra que de là je tire la regle. Il faut donc s'il vous plait m'exciter par vostre exemple et m'envoier sans defiance ce que vous avez promis, ou laissons là nostre marché.

Vous aurez vu ce que M. Bernoulli a annoncé dans le mois de Jul. de la part de son frere, qui auroit trouvé qu'outre ma Cyloide il y a une infinité de courbes qui servent aux reciprocations isochrones. Je n'y vois pas d'impossibilité, mais je ne sçaurois croire qu'il nous construise aucune de ces courbes, si ce n'est peut estre par des espaces d'etendue infinie et inconnue, ce qui vaut autant que rien. Je le tiens cependant fort habile ce frere, et il me revient mieux que son ainé, qui est grandement obstiné à soutenir ce qu'il a une fois avancé. Temoin ce dernier escrit du mois de Jul., où il nous voudroit faire accroire que sa demonstration du Centre d'Oscillation (qui apres tout ne regarde que des poids enfilez en ligne droite) est plus evidente que la miene. Je vous en fais juge et demeure de tout mon coeur etc.

XXXVI.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 1 Janvier 1692.

Vous aurez receu sans doute ma lettre du 16 Novembre, puisque Mr. Meier m'a mandé qu'elle avoit passé par ses mains. J'ay attendu jusqu'icy vostre response, mais songeant que vous attendez peut-estre ce que j'auray à dire touchant vostre Escrit*) qu'il m'a envoié, je ne veux pas laisser une plus longne interruption à nostre correspondance, dont je tire du plaisir et de l'avantage. Vous scaurez donc touchant

*) Siehe die Beilage.

cet Escrit que j'ay eu de la peine d'abord à l'entendre, estant encore peu accoutumé à vostre maniere de calcul, et ne demeslant pas assez bien les constructions qui resultent de vos solutions. Pourtant y estant retourné avec plus de loisir j'en suis venu à bout. Mais qu'ay je trouvé? J'ay vu qu'en reduisant le Probleme renversé des Tangentes aux quadratures, vostre methode ne me donnoit pas ce que j'en esperois d'avantage, qui estoit de m'en pouvoir servir pour trouver les quadratures. Je sçavois fort bien celle de la Courbe que vous expliquez et demontrez, et comment par la on pouvoit construire la courbe dont la soutangente est $yy\sqrt{aa-xx}:ax$, mais je croiois que par vostre methode on trouveroit cette courbe independamment, et par elle la quadrature de l'autre, ce qui n'est point. J'ay vu de plus, en essaiant vostre methode sur plusieurs courbes connues, feignant qu'elles ne le fussent point, mais seulement les proprietez de leurs tangentes, que toujours j'estois reduit à des quadratures impossibles, comme de l'Hyperbole ou du Cercle et autres, au lieu que par la methode de Mr. Fatio l'on trouve l'Equation de la ligne cherchée sans aucune necessité d'en quadrer d'autres. Vous n'enseignez donc pas à discerner si la ligne cherchée est geometrique ou non, et s'il faut ces quadratures de l'Hyperbole et autres pour la construire. Par exemple, si la soutangente est $\frac{aax}{aa+yy}$, la construction de la courbe se reduit par vostre methode à la quadrature de l'Hyperbole et à celle de la courbe $z \propto \frac{a^4}{y^3+aay}$. Et de mesme si la soutangente est $\frac{bx+xx}{2b+x}$, vous viendrez derechef à la quadrature de l'Hyperbole et à celle d'une autre courbe, au lieu que Mr. Fatio n'a besoin d'aucune. On ne tient donc rien par vostre methode, si on ne sçait trouver les quadratures quand elles sont possibles, et connoitre quand elles sont impossibles, en quoy je scay par experience que vous avez quelque chose de beau, et cela paroit dans l'exemple que vous avez mis à la fin, où vous quadrez la courbe $aaxx+xxyy-aayy \propto 0$. Je l'avois aussi trouvée, comme j'ay dit, mais c'avoit esté par rencontre, et mesme par cette quadrature que je donnay à Mr. Fatio, il trouva l'equation de la courbe à qui elle convenoit. Considerant tout ce que je viens de dire, et voiant de plus, Monsieur, que vous appellez cette methode qui reduit aux quadratures la meilleure des vostres pour ce probleme, il m'est aisé de conclure que vous ne m'en avez envoié qu'une petite partie, vous reservant d'y joindre par apres le reste, et qui fait presque le tout. Si je pouvois en faire de mesme en ce qui est de la methode de Mr. Fatio, je vous imiterois, mais elle

est telle que vous en decouvrant unc partie, ce seroit vous apprendre tout. Resolvez vous donc je vous prie à m'envoyer cette principale partie, afin que Mr. Fatio ne puisse pas me reprocher d'avoir trocqué *χρύσεα χαλκείων,* car vous voiez bien apres tout que je ne suis pas seul maitre de la chose.

En etudiant les exemples que vous donnez de vostre reduction, je me suis rendu vostre maniere de calcul un peu plus familiere qu'elle ne m'estoit, et je la trouve excellente pour representer avec facilité et clarté ces summas minimorum qui servent en beaucoup d'occasions. Mais je ne vois pas encore en considerant vostre equation de la Cycloide, de quel secours elle seroit pour en deduire omnia circa Cycloidem inventa, comme vous dites. Car quand ce ne seroit que pour trouver l'espace compris de cette ligne et sa base, ne faudroit il pas emploier à peu pres les mesmes biais dont on s'est servi pour cette dimension. Et s'il faloit trouver le centre de gravité de la demie Cycloide, vostre calcul vous y meneroit sans ces profondes speculations de Mrs. Pascal ou Wallis? Vos expressions pourroient estre plus courtes, mais pour l'invention je crois qu'il faudroit passer à peu pres par les mesmes chemins. Si cela est autrement, vous me ferez plaisir de me detromper, afin que j'aye toute la bonne opinion de vostre calculus differentialis qu'il merite.

Si vous lisez l'Histoire des Ouvrages des Scavants qu'on publie icy de 3 en 3 mois, vous y trouverez quelque chose de moy en matiere de Musique, et qui regarde un nouveau systeme des Tons. Si Mrs. de Leipsich avoient envie de le mettre dans leurs Acta, je pourrois y adjouter encore quelques nouvelles considerations.

Je vous souhaite l'année nouvelle heureuse et suis etc.

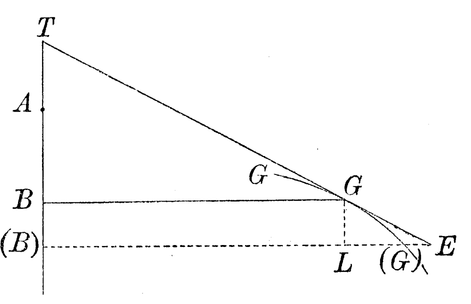
Beilage.

Methodus, qua innumerarum linearum constructio ex data proprietate tangentium, seu aequatio inter abscissam et ordinatam ex dato valore subtangentialis, exhibetur.

Ex omnibus quae nobis inquirenda restant in Geometria, nihil est majoris momenti, quam Methodus Tangentium Inversa, seu data tangentium lineae curvae proprietate, ipsam lineae constructionem posse invenire. Nam in applicatione Geometriae ad Physicam saepissime contingit, ut linea ex tangentium proprietate noscatur, unde constructio ejus aliaeque proprietates investigari debent. Datur autem constructio lineae, quoties datur aequatio exprimens relationem inter AB abscissam in directrice inde a puncto fixo A, et BG ordinatim applicatam, normalem

ad directricem; ita enim cuicunque puncto rectae directricis B assignari potest respondens punctum curvae G(G).

Porro data proprietate tangentium lineae curvae quaesitae, solet dari vel haberi aequatio exprimens relationem inter BT subtangentialem et AB vel BG abscissam vel ordinatam, aut ambas simul. Vocemus autem subtangentialem ipsam BT, partem axis cadentem inter ordinatam BG et tangentem GT. Itaque, si AB vocetur x et BG y, et BT t, res redibit ad aequationem, quam ex indeterminatis solae ingredientur x, y, t. Quo facto, quaeritur aequatio, quam, sublata t, duae tantum indeterminatae x et y ingrediantur. Ita ex data proprietate tangentium habebitur curvae constructio.



Ex aequationibus autem illis, quae exprimunt relationem ipsius t ad reliquas, eligamus illas simpliciores, in quibus valor ipsius t per x et y habetur pure, ut si $t = aa : x$, vel $t = ax : y$, vel $t = y\sqrt{aa - xx}$, vel $t = yy\sqrt{aa - xx} : ax$, aliisque modis infinitis. Itaque id nunc agitur ut ex dato valore subtangentialis per abscissam vel ordinatam vel ambas detur aequatio exprimens relationem inter ordinatam et abscissam.

Habeo autem diversas vias, quibus magnum hoc problema in oblatis casibus aggredior. Sed hanc optimam esse judico (quoties ea uti licet) ut problema tangentium inversum revocetur ad quadraturas. Analysis enim est duorum generum, una per saltum, cum problema propositum resolvimus ad prima usque postulata; altera per gradus, cum problema propositum reducimus ad aliud facilius. Et quia saepe fit, ut prior methodus prolixis nimis calculis indigeat, confugiendum est non raro ad secundam; tametsi enim prior sit absolutior nec aliis indigeat praecognitis, commodior tamen est posterior, quia laborem minuit, jam inventis utendo.

Ut vero intelligatur quomodo persaepe problema tangentium inversum ad quadraturas revocari nullo negotio possit, dicendum est aliquid de quodam calculi genere a me introducto notisque novis in eo adhibitis; ita enim efficio, ut multa primo obtutu appareant, et ipso calculi lusu nascantur, quae alias vi ingenii aut labore imaginationis assequi necesse est. Nec aliam ego causam video, cur cl. Fatius qui jam dudum praeclari ingenii specimina nobis dedit, haeserit ubi irrationales subtangentialis valorem ingrediuntur, velut in casu per celeberrimum Hugenium mihi proposito, ubi $t = yy\sqrt{aa + xx} : ax$, quam quod

hujusmodi expressio non aeque calculo analytico apta est ac mea, per quam ipsius t relatio ad y et x aliquo modo generali exprimitur. Ita enim judico, cum mens humana ad cogitandum notis indigeat, eo posse nos ratiocinari melius, quo magis notae ipsae exprimunt rerum relationes.

Consideravi igitur tam abscissas quam ordinatas habere elementa quaedam momentanea, seu differentias indefinite parvas, et elementum abscissae esse ad elementum ordinatae, ut subtangentialis ad ordinatam. Nam si cogitemus punctum mobile B ex fixo A egrediens percurrere axem AB(B), et adeo abscissas AB nihil aliud esse quam distantias puncti B mobilis a puncto fixo A, patet incrementa abscissarum momentanea B(B) esse ut velocitates, quas punctum B in quovis axis loco aut quovis temporis momento habet, adeoque inassignabilis parvitatis, et similiter se rem habere cum ipsis GL incrementis ordinatarum, seu excessu ordinatae (B)(G) super proxime (id est inassignabili intervallo) praecedentem BG.

Haec incrementa, aut (si contrarium motum fingas) decrementa, vel ut generalius loquamur, elementa ordinatarum vel abscissarum, aut (si malis) differentias inassignabiles (quarum tamen ad alteras omnino assignabilis est ratio) notis designare volui, exprimentibus relationem ad id cujus sunt differentiae; itaque, quia abscissas AB vocavimus x et ordinatas BC y, elementa abscissarum seu differentias minimas B(B) vocabimus dx, et elementa ordinatarum seu differentias minimas GL vocabimus dy. Possemus ipsas dx vel dy peculiaribus exprimere literis ut e, v, vel ut lubet, sed ita non appareret relatio ad x et y, quae tamen ipsis notis expressa plurimum juvat, modumque dedit mihi curvas transcendentes exprimendi per aequationes finitas, non alias adhibendo indefinitas quam x et y et harum affectiones, inter quas non tantum potentias aut (his reciprocas) radices ut x^2, $\sqrt[2]{x}$ etc., sed et differentias et (his reciprocas) summas refero, harumque notas ad supplendum calculum promovendamque ad transcendentes Analysin omnino aptas judico. Et quemadmodum non optime faceret qui pro x^2, x^3 etc. semper vellet adhibere literas e, v ad evitandum hoc notationis genus, licet admoneret se per e et v quadratum aut cubum intelligere, ita similiter praestat saepe dx aut ddx (differentiam aut differentiam differentiarum ipsarum x) adhibere, quam pro ipsis uti literis e aut v vel similibus. Sic cycloidem exprimo per hanc aequationem $y = \sqrt{2x - xx} + \int \overline{dx : \sqrt{2x - xx}}$, posito radium circuli generatoris esse 1, et x esse abscissam in axe inde a vertice, et y esse ordinatam ad axem, et dx esse incrementa abscissarum, et $\int \overline{dx : \sqrt{2x - xx}}$ esse

summam omnium $dx:\sqrt{2x-xx}$ seu quantitatem cujus differentialis est ad differentialem abscissae ut radius ad sinum, quae summa vel quantitas revera est arcus. Et hinc facillimo calculo, sine ullo figurae respectu, derivatur proprietas tangentium cycloidis nota, quae nostro modo expressa sic habet: $dx:dy=\sqrt{2x-xx}:\overline{2-x}$. Caeteraque omnia circa cycloidem inventa, pluraque alia similiter ex tali calculo analytice derivantur.

Sed ut nostrum institutum prosequamur. Producatur (B)(G) dum tangenti TG itidem productae occurrat in E, constat puncta (G) et E haberi posse pro coincidentibus, seu rectam (G)G, quae jungat duo curvae puncta inassignabiliter distantia, productam esse ipsam curvae tangentem. Cum dudum ab aliis explicatum sit, rectam, quae curvam secat in duobus punctis, transire in tangentem eo casu, quo duo sectionis puncta coincidunt. Itaque EL non minus quam (G)L poterit vocari dy, et ob triangula TBG et GLE similia, fiet TB ad BG ut GL ad LE, seu $t:y::dx:dy$, idque ipsum est quod diximus, subtangentialem t esse ad ordinatam y ut dx elementum abscissae ad dy elementum ordinatae; et quia proinde $t:y=dx:dy$, fiet $t=ydx:dy$, qui est generalis valor subtangentialis. Et hunc conjungendo cum speciali valore, quem natura problematis offert, pervenitur ad aequationem differentialem, quam ubi convertere licet in summatricem puram, habetur reductio problematis tangentium inversi ad quadraturas.

Quae reductio ut intelligatur melius, ostendam (quod momenti est maximi) quandocunque proprietas tangentium data exhibet valorem subtangentialis per solam (ex indeterminatis) abscissam vel per solam ordinatam, problema reducitur ad quadraturas. Ponamus enim t dari per x, utique quia $t=ydx:dy$, fiet $dy:y=dx:t$, adeoque $\int\overline{dy:y}=\int\overline{dx:t}$. Jam $\int\overline{dy:y}$ pendet ex quadratura hyperbolae, et $\int\overline{dx:t}$ etiam pendet ex aliqua quadratura, ejus nempe figurae, cujus ordinata est $1:t$, posito nempe pro t poni ejus valorem per x. Itaque res reducta est ad quadraturas. Exempli causa, si esset $t=1:x$, fieret $\int\overline{dy:y}=\int\overline{xdx}=\frac{1}{2}xx$; et ita curva proposita haberetur ex quadratura hyperbola. Si esset $t=1:\sqrt{1-xx}$, fieret $\int\overline{dy:y}=\int\overline{dx\sqrt{1-xx}}$, atque ita curva quaesita haberetur ex supposita quadratura tam circuli quam hyperbolae.

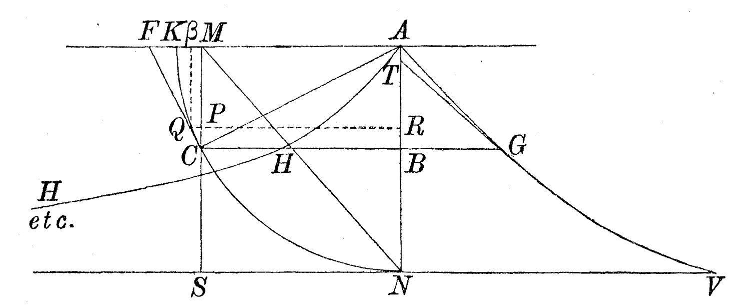
Similiter si t detur per y, quia $t=ydx:dy$, fiet $dx=dy\cdot t:y$ adeoque $x=\int\overline{dy\cdot t:y}$. Quodsi jam ex problemate detur valor ipsius t per y, intelligi poterit cujusnam figurae quadratura sit opus: nam ponamus esse $t=y$, fiet $x=\int dy$, id est $x=y$, et linea quaesita est

recta. Si sit $t = yy$, fiet $x = \int \overline{dy \cdot y}$ seu $x = yy : 2$, et linea quaesita est parabola. Si $t = y^3$, fiet $x = \int \overline{dy : yy}$ seu $x = y^3 : 3$ et linea est parabola cubica. Si t sit constans, verb. gr. si $t = 1$, fiet $x = \int \overline{dy : y}$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura hyperbolae. Si t sit irrationalis, res itidem procedet, nam si ponatur $t = y\sqrt{1 - yy}$, fiet $x = \int \overline{dy\sqrt{1 - yy}}$, adeoque linea quaesita pendet ex quadratura circuli.

Sed si valor ipsius t detur per x et y simul, tunc non semper facile est problema reducere ad quadraturas. Infiniti tamen sunt casus, ubi res procedit. Et generaliter hoc pronuntiari potest: quandocunque valor subtangentialis t est productum ex duabus quantitatibus seu formulis, quarum una datur per solam (indeterminatarum) abscissam x, altera per solam (indeterminatarum) ordinatam y, tunc problema reducitur ad quadraturas. Exempli causa si sit $t = xy$, seu factum ex x in y, fiet $xy = ydx : dy$ seu $dy = dx : x$ seu $y = \int \overline{dx : x}$, quod pendet ex quadratura hyperbolae. Si sit $t = y : x$ seu factum ex y in $1 : x$, fiet $y : x = ydx : dy$ seu $dy = xdx$ seu $y = \int \overline{xdx}$, seu $y = xx : 2$, quae est aequatio ad parabolam. Si sit $t = x : y$ seu factum ex x in $1 : y$, fiet $x : y = ydx : dy$, seu $xdy = yydx$ seu $dy : yy = dx : x$ seu $\int \overline{dy : yy} = \int \overline{dx : x}$, quae datur ex quadratura hyperbolae, nam $\int \overline{dy : yy}$ datur absolute, nihil aliud enim est quam quadratura hyperboloidis secundi gradus. Sic si sit $t = y : \sqrt{1 - xx}$ seu factum ex y in $1 : \sqrt{1 - xx}$, fiet $y : \sqrt{1 - xx} = ydx : dy$, seu fiet $dy = dx\sqrt{1 - xx}$, seu $y = \int \overline{dx\sqrt{1 - xx}}$, quae pendet ex quadratura circuli.

Ad hanc jam classem revocatur et curva mihi proposita, cujus subtangentialis rectae valor praescriptus erat $t = yy\sqrt{aa - xx} : ax$ (1). Nam quia semper est $t = ydx : dy$ (2), fiet $y\sqrt{aa - xx} : ax = dx : dy$ (3) per (1) et (2). Sit $a = 1$ (4). Ergo ex (3) et (4) fit $ydy = xdx : \sqrt{1 - xx}$ (5), et aequationem (5) utrinque summando, quia $\int \overline{ydy} = yy : 2$ (6), fiet per (5) et (6) $yy : 2 = \int \overline{xdx : \sqrt{1 - xx}}$ (7). Id est, opus est tantum ut reperiatur quadratura generalis, seu indefinita, figurae cujus ordinata est $x : \sqrt{1 - xx}$, abscissa existente x. Haec autem quadratura habetur absolute. Nimirum $x : \sqrt{1 - xx}$ vocetur z (8). Jam centro A radio AK, qui sit a vel 1, describatur circulus, in cujus circumferentia sumto arcu NC, et x seu AB sumta in normali ad AK, quae sit arcus sinui aequalis, jungatur radius AC, et tangens arcus CF, ipsi AK productae occurrens in F erit z. Nam ob triangula similia CBA et ACF fiet z seu FC ad AC seu 1 ut AB seu x ad BC seu $\sqrt{1 - xx}$; unde z seu

FC est $x : \sqrt{1-xx}$, ut jubet aequatio (8). Si ergo FC ranslata in BH



ordinatim applicetur ad AB angulo recto, ut fiat linea curva AHH, habebitur figura ABHA, per cujus quadraturam reperietur quaesita y.

Porro ex C in AK agatur normalis CM, ajo rectangulum SMK aequari trilineo ABHA, adeoque infinitum spatium AN etc HA aequari quadrato radii. Quod sic ostendo. Per punctum Q in CF indefinite vicinum ipsi C, agatur in CM et AB normalis QPR et alia $Q\beta$ normalis ad AK; et MC producatur in S, ut sit MS aequ. AK radio; et ob triangula CPQ et ACF similia, fiet AC : CF : : CP : PQ, seu AC in PQ = CF in CP. Jam est AC in PQ = SM in $M\beta$, et CF in CP = HB in BR, ergo SM in $M\beta$ = HB in BR, adeoque et summa omnium rectangulorum SM in $M\beta$, id est rect. SMK aequatur summae omnium rectangulorum HB in BR seu areae ABHA, quod asserebatur. Habetur ergo quadratura proposita.

Hinc jam constructionem lineae quaesitae ita ducemus. Area ABHA seu $\int xdx : \sqrt{1-xx}$ = rect. SMK seu $1-\sqrt{1-xx}$ (9). Ergo ex aeq. (7) per (9) fit $yy : 2 = 1 - \sqrt{1-xx}$ (10), quae aequatio est ad curvam quaesitam. Unde si tollamus irrationalitatem, fiet $y^4 : 4 - yy + 1 = 1 - xx$ (11), et ad supplendos gradus ex lege homogeneorum, pro 1 restituendo a, fiet $y^4 = 4\,aayy - 4\,aaxx$ (12). Constructio autem erit talis. Inter duplam MK et radium AK sumatur media proportionalis, quae erit y quaesita (ex aequ. 10) eique aequalis BG ordinatim applicata ad AB angulo recto dabit curvam AGV quaesitam, cujus ultima ordinata NV aequabitur rectae KN seu lateri quadrati circulo inscripti. Et in hac linea, si sit AB, x et BG, y, et AN, a, tunc subtangentialis BT seu t erit $yy\sqrt{aa-xx} : ax$, ut desiderabatur.*)

---

*) Die Methode Fatio's, von der in diesen Briefen die Rede ist, entwickelt Huygens in einem Briefe an den M. de l'Hospital vom 23. Juli 1693. (Siehe Ch. Hugenii aliorumque seculi XVII virorum celebrium exercitationes mathematicae ed. Uylenbroek. Fasc. I. p, 269 sqq.)

XXXVII.

Leibniz an Huygens.

A Hannover 29 Decembre V. S. 1691.

Vous jugés bien que la lecture de votre lettre me devoit surprendre, aussi n'y manquait-elle pas. Neantmoins je m'avisay qu'il est plus commode de rire de la malice de quelque esprit malin, qui nous veut donner tousjours de quoy contester, que s'en fascher. Et puisque j'espere que vous n'aurés pas encor communiqué à Mr. Fatio, il nous est aisé de sortir d'affaire. Vous et luy vous garderés sa methode, d'où, excepté quelque canon ou abregé, que je pourray bien tirer moy mesme de ma regle generale, quand j'y voudray penser, je ne croy pas de pouvoir apprendre beaucoup; et bien que je n'aye pas gardé la mienne, vous aurés la bonté de ne la point communiquer. Il est vray que vous aurés l'avantage sur moy de garder l'une et l'autre; mais il n'y a pas grand mal, et je vous laisse juger vous même, si vous y avés appris quelque chose qui merite que vous me fassiés quelque autre communication reciproque. Je ne crois pas d'en pouvoir user plus honnêtement; quelque sujet qu'un autre croiroit avoir de se plaindre, j'aime mieux d'estre creancier, que de donner sujet aux autres de se plaindre de moy avec ou sans raison. C'est ce qui fait que je ne suis pas trop faché de n'avoir pas receu l'écrit de Mr. Fatio en echange du mien. Vous m'auriés fait un procés pour m'obliger à donner d'avantage, maintenant je suis à couvert de tout reproche. Et comme mon malheur n'est par fort grand, il m'est aisé de practiquer en cette rencontre les regles de Cardan de utilitate ex adversis capienda.

Je veux pourtant dire quelque chose à vos raisons. J'avois promis de vous donner la solution d'un certain probleme, et vous me promistes en échange la solution d'un autre par la methode de Mr. Fatio. J'ay satisfait à ma promesse, car je puis dire en verité que pour le resoudre, je n'eus besoin que precisement de ce que j'ay mis dans mon papier, car je reduisis le probleme à une quadrature qui me paroissoit sauter aux yeux, sans avoir besoin d'une methode particuliere pour les quadratures; je devois donc attendre quelque chose de reciproque. Il est vray que cette methode est bornée. Mais ne mandâtes vous pas, Monsieur, que celle de Mr Fatio l'est aussi? Si on me donnoit un probleme du 6e degré à resoudre, et que je l'eusse reduit à une equation du 5e degré, qui fut divisible en cette rencontre, on auroit tort de me

demander une methode generale de donner les racines du cinquième degré, parce qu'elles ne sont pas tousjours divisibles. Il me semble qu'on devroit se contenter de la methode que j'aurois donnée, de reduire au 5e degré une infinité des cas du 6e. Si vous ou Mr. Fatio avés deja sçu avant mon papier cette methode de reduire aux quadratures tous les problemes que j'y enseigne d'y reduire, j'avoue que vous n'aurés rien appris de nouveau. Mais il semble que vous ne dites pas cela. Et moy j'estime assés cette methode pour quitter de bon coeur la pensée de la troquer contre celle de Mr. Fatio. Si quelqu'un peut donner l'art de reduire tousjours la converse des tangentes aux quadratures, il donnera ce que je souhaitte de plus en cette matière, et je donneray volontiers en échange ma methode des quadratures. Quoyque j'aye une autre methode qui reussit, lorsque la courbe dont la proprieté des tangentes est donnée, depend de la Geometrie, j'aime pourtant mieux la voye des quadratures, parce qu'elle sert tant pour les courbes transcendantes que pour les ordinaires. Je m'estonne que mes caracteres vous pouvoient encor paroistre difficiles, puisque vous aviés déja compris les elemens de ce calcul, que j'avois donné dans les actes de Leipzig. Je m'etonne aussi que vous avés cru d'apprendre de moy la methode de trouver la courbe dont il s'agissoit independamment des quadratures, puisque vous sçaviés déja par mes precedentes que j'aimois à me servir de la voye des quadratures. Et puis que vous avés voulu vous charger de recevoir quelque chose de la part de Mr. Fatio, j'avois droit de croire que vous seriés autorisé de donner reciproquement. Et c'est pour tout cela que cet échange par l'entremise d'un tiers auroit esté le plus raisonnable. Enfin vous dites que, puis que je ne donne qu'une partie de ma methode, il n'est pas juste que je reçoive celle de Mr. Fatio toute entiere. Mais je reponds que cette partie de la mienne vaut peut estre bien la sienne toute entiere. Et c'est assés qu'elle suffit dans une infinité de rencontres et mesmes dans les transcendantes, où la sienne et aucune autre donnée jusqu'icy n'avoit servi. Pour ne pas dire, qu'encore la methode de Mr. Fatio est divisible en parties, puisque vous me mandâtes qu'à force d'y mediter depuis il l'avoit poussée bien avant. Mais quelle qu'elle puisse estre, je desire que la mienne ne soit plus communiquée en échange.

Je me souviens qu'autres fois, lorsque je consideray la cycloide, mon calcul me presenta presque sans meditation la plus part des decouvertes qu'on a faites là dessus. Car ce que j'aime le plus dans ce calcul, c'est qu'il nous donne le même avantage sur les anciens dans la Geometrie d'Archimede, que Viete et des Cartes nous ont donné

dans la Geometrie d'Euclide ou d'Apollonius, en nous dispensant de travailler avec l'imagination.

Je viens maintenant à vôtre precedente, je crois bien que vous n'avés vû que le cercle qui se decrit du point de la courbe evolue, et dont le rayon est la moindre droite qu'on peut mener de ce point à la courbe decrite, mais peut-estre n'aviés vous pas songé d'abord à la considerer comme la mesure de la courbure, et moy, lorsque j'avois consideré le plus grand cercle qui touche la courbe interieurement comme la mesure de la courbure ou de l'angle de contact, je ne m'etois pas avisé de songer aux evolutions. Je conçois fort bien que vôtre maniere de reduire la chainette à la quadrature de l'Hyperbole est differente des nostres. Je tacheray de publier un jour ma methode des reductions, qui èst generale intra certos limites. Je les ay déja franchis, mais je n'ay pas encore eu le loisir de pousser la chose, et c'est ce que je souhaiterois de faire avant que la publier.

Quand j'avois parlé de querelle, il me semble que mes paroles marquoient assés que je ne la mettois pas au nombre de celles qu'on prend à coeur; aussi l'appellay-je (ce me semble) petite querelle.

Quand Mr. Bernoulli avoit envoyé à Mrs. de Leipzig ce qu'il donnoit sur la Loxodromie, il n'avoit pas encore vû ce que j'avois donné là dessus.

J'ay vû autres fois les Exercitations de Jacobus Gregorius, et peut-estre que vous me les aviés monstrées vous même. Mais il faut que je n'aye pas consideré alors avec attention ce qu'il avoit dit de la loxodromie, car il ne m'en esté resté aucune idée. Il est seur qu'Albert Girard estoit un grand Geometre pour son temps, et il se peut qu'il ait remarqué quelque rapport entre les logarithmes et les loxodromies.

Qand même on a trouvé les regles parfaites, je ne laisse pas d'estimer les moins parfaites sur des matieres difficiles, parce qu elles peuvent servir en d'autres cas; c'est pourquoy je trouve que vôtre methode pour la somme des secantes meriteroit encor d'être publiée avec sa demonstration.

La remarque du defaut des tables de Snellius est considerable. J'avois mis autres fois dans mon traité de la quadrature arithmetique la quadrature de l'espace de la Logarithmique pour la soutangente ou par le quarré de l'Hyperbole qui en resulte. Mais suivant mon calcul il me semble que ce sont des choses qui s'entendent presque d'elles mêmes. Car dans la logarithmique est $dy = \frac{y}{a} dx$; donc les dx (elemens de l'abscisse x) estant constantes, les dy (elemens de l'ordonnée y) sont proportionelles aux y, et par consequent les y sont en progression

geometrique lorsque les x sont en progression arithmetique. C'est à dire les x sont les logarithmes des y. Donc la courbe est la Logarithmique. Or cette même equation fait connoistre, que $dx = \frac{ady}{y}$, ou $x = a\int\frac{dy}{y}$ ou $= a\int(dy:y)$, ce qui fait voir comment cette même logarithmique depend encor de la quadrature de l'hyperbole et comment sa soutangente a se rapporte à cette hyperbole.

Quand je parle de la perfection de la Geometrie et de l'Arithmetique, je l'entends avec quelque latitude. Je crois qu'on pourroit parvenir à pouvoir donner tousjours la methode des solutions, ou à en demontrer l'impossibilité, mais ce ne sera pas tousjours par les meilleures voyes. Par exemple il faudroit qu'on pût tousjours trouver s'il est possible de resoudre les problemes semblables à ceux de Diophante en nombres rationaux, ou de donner des quadratures par la Geometrie ordinaire. Et je croy que cela se peut tousjours. Mais quant au point de trouver les chemins les plus courts, je croy que les hommes auront encor à chercher pour longtemps. Je n'ay rien encor vu de Mr. Rolle, si non dans le Journal des Sçavans. Je suis de vôtre sentiment, Monsieur, qu'il faudroit suivre les projets de Verulamius sur la Physique, en y joignant pourtant un certain art de deviner, car autrement on n'avancera gueres. Je m'etonnerois si Mr. Boyle, qui a tant de belles experiences, ne seroit arrivé à quelque theorie sur la chymie, apres y avoir tant medité. Cependant dans ses livres et pour toutes consequences qu'il tire de ses observations, il ne conclut que ce que nous scavons tous, scavoir tout se fait mecaniquement. Il est peut-estre trop reservé. Les hommes excellens nous doivent laisser jusqu'à leur conjectures, et ils ont tort, s'ils ne veuillent donner que des verités certaines. Cela soit encor dit à vous même, Monsieur, qui avés sans doute une infinité de belles pensées sur la Physique. Il me tarde de voir dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans ce que vous y donnés sur la Musique, et je vous répond, que Mrs. de Leipzig seront ravis de mettre dans leur actes ce que vous leur donnerés sur quelque matiere que ce soit.

Il me semble que Mr. Bernoulli a des pensées un peu embarrassées sur le centre d'oscillation, et je m'etonne qu'il se peut figurer que cette perte du mouvement, qu'il y trouve, est remployée sur l'axe, bien que cette perte doit avoir lieu, quand on suppose l'axe absolument inébranslable, où il ne patit point. Je ne crois pas qu'après ce que vous avés donné sur cette matiere, on ait besoin de chercher d'autres demonstrations. Qui est ce Mr. de l'Hospital dont parle Mr. Bernoulli?

Que dites vous, Monsieur, d'uu petit livre*) d'un nommé M. Eisenschmid de la figure de la terre? Il pretend prouver en comparant les differentes mesures de la terre données en des latitudes differentes (qu'il juge n'estre pas si fautives qu'on croyoit) que l'axe de la terre est le plus long diametre de la sphaeroide, au lieu que, selon vous et Mr. Newton, elle seroit plus enflée sous l'equateur.

On m'a dit qu'un certain homme avoit proposé les longitudes et que vous aviés esté commis pour examiner sa proposition. Il me semble qu'on devroit surtout songer à pousser à bout ce qui se peut faire par vos horloges.

Je vous avois prié un jour de quelques observations sur les couleurs, que Mr. Newton vous avoit communiquées. Au reste je souhaitte que cette année vous soit heureuse avec une longue suite d'autres. Je suis faché que Mr. Roberval a plus vecu que Mr. des Cartes; c'est pourquoy vous devés songer, Monsieur, combien il nous importe de vous garder. Je suis avec passion etc.

XXXVIII.

Leibniz an Huygens.

Hannover ce 31 Dez. V. S. 1691.

Ma derniere vous aura esté rendue, où j'ay repondu aux vostres, et je m'y rapporte, repetant les bons souhaits que j'ay faits.

Maintenant j'oserois bien vous supplier de me faire la grace de faire tenir la cy-jointe à M. le Comte de Windischgraz Ambassadeur de l'Empereur, qui se trouve à la Haye.

J'ay fait scavoir à Mrs. de Leipzig que vous pourriés bien leur faire l'honneur de leur communiquer quelque chose touchant la Musique, pour estre mis dans leur journal.

Je suis avec zèle etc.

---

*) Diatribe de figura telluris elliptico-sphaeroïde, Argent. 1691. — Eisenschmid (geb. 1656 zu Straßburg, gest. 1712) wurde 1699 Mitglied der pariser Akademie der Wissenschaften. Eine andere Schrift von ihm ist: De ponderibus et mensuris veterum Romanorum, Graecorum et Hebraeorum etc. disquisitio. Argent. 1708.

XXXIX.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 4 Fevr. 1692.

Je n'aurois pas tant tardé à repondre à vostre derniere sans un rhume accablant qui me tient depuis 15 jours avec des maux de teste continuels. Je croiois effectivement que vous ne m'aviez envoié qu'une partie de vostre methode, trouvant qu'elle ne me pouvoit servir que lorsqu'on a reduit le Probleme renversé des Tangentes à la quadrature du Cercle ou de l'Hyperbole, et qu'on connoit en mesme temps, qu'il n'est pas resoluble à moins, comme dans l'exemple de la Logarithmique et ailleurs. Considerant aussi comme un defaut à vostre regle qu'elle reduit souvent à ces quadratures impossibles, quoyque la courbe cherchée ne soit que geometrique. Cependant je ne laisse pas de vous estre obligé et vous communiqueray volontiers quelque chose de mes inventions en revanche, si j'en ay que vous puissiez souhaiter. Au reste j'ay bien fait, à ce que je vois, de n'avoir pas envoié à Mr. Fatio la copie de vostre écrit ni rien de contenu. Et*) il semble mesme, que comme vous ne croiez pas pouvoir beaucoup profiter de sa methode, il ne souhaite pas grandement le vostre, car il me mande, qu'en une infinité de cas il sçait trouver l'equation de la courbe par la proprieté de la Tangente donnée, avec des incommensurables complexes, et qu'il en a fait l'essay avec succés pour la soutangente que j'avois donnée $\frac{yy\sqrt{aa-xx}}{ax}$, sans avoir recours à aucune quadrature.

Il pourroit entreprendre, à ce qu'il m'escrit, une seconde edition du livre de Mr. Newton, qui fourmille de fautes d'impression, et en a mesme pour la doctrine, que l'autheur avoue. Il pretendroit de l'éclaircir en mesme temps, et y joindre quelque chose du sien

Ce que vous me dites de l'effet de vostre calculus differentialis dans les recherches touchant la Cycloide, à dire la verité, me semble peu croiable. Vous apportez une nouvelle facilité au calcul, mais ne donnez pas l'invention qu'il faut pour la solution des problemes extraordinaires, non plus que Viete par l'Algebre.

---

*) Die Worte Et il semble bis il me mande sind in dem mir vorliegenden Briefe Huygens' durchgestrichen; ich kann nicht entscheiden, ob es von von Huygens oder Leibniz geschehen ist.

Il me semble que Verulamius n'a pas omis cet art de deviner dans la Physique sur des experiences données en considerant l'exemple qu'il donne au sujet de la chaleur dans les corps des metaux et autres, où il a assez bien reussi, si ce n'est qu'il n'a pas pensé au mouvement rapide de la matiere tres subtile, qui doit entretenir quelque temps le bransle des particules des corps.

Mr. Boyle est mort, comme vous scaurez desia sans doute. Il paroit assez étrange qu'il n'ait rien basti sur tant d'experiences dont ses livres sont pleins; mais la chose est difficile, et je ne l'ay jamais cru coupable d'une aussi grande application qu'il faut pour establir des principes vraisemblables. Il a bien fait cependant en contredisant à ceux des Chymistes. Je suis de vostre avis en ce que vous souhaitez jusqu'aux conjectures des hommes excellents en ces matieres de Physique. Mais je crois qu'ils nuisent beaucoup, lors qu'ils veulent faire passer leur conjectures pour des veritez, comme a fait Mr. des Cartes, parce que ils empeschant leurs sectateurs de chercher rien de meilleur.

Vous pourrez avoir vu maintenant ma division de l'Octave en 31 parties egales, et ne disconviendrez pas de l'utilité et singularité de cette division, de sorte que j'attens vostre approbation. Dans la Table à la colonne 6e, le quatrieme et cinquieme nombre doivent estre 4,7577249674 et 4,7768024924, et 12me doit commencer par 4. Que jugez vous, Monsieur, de la methode de Mr. Tschirnhaus pour les quadratures. Il ne semble pas qu'il ait voulu estre entendu; mais il doit estre moins obscur pour vous, qui en scavez pour le moins autant que luy. Je me souviens qu'il donna la quadrature d'une courbe que vous aviez proposée dans les Acta de Leipsich, ce qui me semble estre beaucoup. Je suis etc.

XL.

Leibniz an Huygens.

Hannover ce $\frac{9}{19}$ de Fevrier 1692.

Vous m'avés allarmé en me parlant de vostre indisposition. Je scay assez combien les sciences sont interessées dans vostre conservation. Vous pouvez faire des choses si importantes en Physique, que je fais conscience de vous donner occasion de trop rever à la Geometrie.

Je ne scay si vous avés vu un petit livre d'un nommé Eisenschmid, de Strasbourg, de *figura terrae*, où il pretend prouver, en

conferant ensemble les differentes observations de ceux qui ont voulu donner la mesure de la terre, ou la grandeur d'un degré, qu'ils ont varié selon qu'ils se sont plus approchés du pole, et par consequent, que la terre est elliptique en effect, mais qu'elle est plus enflée sous les poles, au lieu que selon vous et Mr. Newton elle doit estre plus enflée sous l'equateur. Cela merite d'estre consideré.

Le Livre de Mr. Newton est un de ceux qui meritent le plus d'estre perfectionnés et Mr. Fatio fera bien de s'y appliquer. Je ne m'etonne pas si parmy tant de recherches difficiles, il s'y est glissé quelque faute de doctrine.

Cette reduction aux quadratures, que vous appellés impossible, est ce que je souhaiterois de pouvoir tousjours obtenir pour les problemes des tangentes renversées. Enfin je ne demande presque que cela pour la perfection de la plus importante partie de la Geometrie. Il se peut bien que nous ne nous entendions pas, puisque une chose de fait, que j'avois rapportée, vous paroist peu croyable.

Il est vray, comme vous dites, Monsieur, qu'il n'est pas assez de faciliter le calcul, il faut souvent quelqu'autre chose. Cela se voit dans l'Algebre même. Pour scavoir l'Algebre on ne s'avisera pas d'abord de trouver les racines irrationelles des racines cubiques, à la maniere de Scipio Ferreus, ni de la division des equations egalées à zero par leur racines. Il en est de même de mon calcul transcendant. Mais quand on a reduit les methodes à un simple calcul, on s'avise plus aisément de ces adresses.

La methode des quadratures, que Mr. Tschirnhans a publiée, quand elle est bien entendue, revient à une partie des miennes. Je luy en avois parlé bien des fois à Paris, et ce n'est que par oubli qu'il peut avoir cru de donner quelque chose de nouveau. Cependant il me semble, qu'il s'y prend d'une maniere bien embarassée. Et de plus ce qu'il donne n'est pas si general qu'il avoit cru. Je luy donnay une instance que je fabriquay sur la lunule d'Hippocrate; cela l'arresta. Au bout de quelques années quand je n'y pensois plus (car je n'avois pas voulu le pousser) il avoit fait quelque calcul sur les lunules (comme son discours temoigne assez) et cela l'avoit fait rencontrer ce calcul, et luy avoit fait voir la quadrature. Mais ce n'estoit pas et ne peut estre pas la methode qu'il avoit proposée.

Un de ces jours je pourray m'appliquer derechef à cette matiere, pour la mettre dans son jour.

La Methode de Mr. Fatio pour les tangentes renversées, autant que j'en puis juger, ne peut servir que pour les courbes ordinaires, au lieu que la mienne donne et les ordinaires et les transcendantes. Je

crois de vous avoir déja dit, Monsieur, que j'en ay une aussi qui est propre aux ordinaires, par le moyen de laquelle je pourrois fabriquer quantité de canons particuliers, tels que je crois que Mr. Fatio a; mais je ne m'y amuse point, et je pense la rendre un jour universelle pour determiner s'il est possible de trouver une ligne ordinaire satisfaisante. Mais j'ay dit que, pour en rendre l'usage court et facile, il faudroit dresser quelques tables.

Vous avés raison, Monsieur, de dire que Descartes a parlé d'un ton trop decisif de l'arrangement des parties de la matiere, cependant ce seroit dommage si nous n'avions pas son systeme. Ainsi je voudrois que Mr. Boyle nous eut laissé ses conjectures. Mais c'est encor plus dommage que ses plus curieuses experiences le plus souvent ne sont rapportées qu'à demy. Tantost il s'excuse parce qu'un amy ne luy donne pas le pouvoir de les publier, tantost sur quelqu'autre raison.

La negligence de nos libraires fait que je n'ay pas encor veu l'Histoire des ouvrages des scavans ni vostre division de l'octave. Elle est de vous, c'est tout dire. Plust à dieu que vous pensassiés à donner vos conjectures sur les parties de la matiere; car nous avons bien des connoissances que Descartes n'avoit pas, dont je ne connois personne qui puisse mieux user que vous pour en tirer des consequences.

Il est vray que le chancelier Bacon scavoit quelque chose de l'art de faire les experiences et de s'en servir; mais ce que vous dites de feu Mr. Boyle, est encor veritable à son égard, qu'il n'estoit pas capable d'une assez grande application pour pousser les consequences autant qu'il faut.

J'espere que vostre santé sera retablie; ce sera une des plus agreables nouvelles que je pourray recevoir. Je vous avois encor ecrit une seconde lettre, et je m'etonne qu'il ne paroist pas que vous l'ayiés receue. Je suis avec zele etc.

XLI.

Huygens an Leibniz.

15 Mars 1692.

Je vous suis fort obligé de ce que vous temoignez de prendre interest à ma santé, qui depuis ma derniere a encore beaucoup souffert de la migraine pendant cette longue gelée.

Vous avez trop bonne opinion de mes forces à approfondir les matieres de Physique. Vous voulez m'animer à cette estude, à quoy contribueroit beaucoup, si je scavois que les essais, que j'en ay donné dans mes derniers traitez, sont dans vostre approbation. Il n'y a jusqu'icy que le seul Mr. Papin qui m'ait envoié des objections, que je crois avoir bien resolues.

J'ay vu l'extrait du traité de Mr. Eysenschmid dans les Acta. Il m'en semble qu'il bastit sur un fondement fort peu seur, scavoir les differentes mesures qui ont esté faites du globe terrestre. Car on scait combien different entre eux les observateurs qui ont travaillé sous le mesme climat. On observe d'ailleurs que Jupiter est elliptique dans le sens de Mr. Newton et de moy, et la raison le veut, au lieu qu'il n'y en a point pour la figure elliptique de Mr. Eysenschmid. Je souhaite fort d'apprendre par la relation de ceux qui sont allez avec mes horloges au Cap de bonne Esperance, si le retardement de leur mouvement (qui comme vous scavez a la mesme cause que nostre pretendue figure de la Terre) sera confirmé de mesme, que je l'ay remarqué dans le voyage precedent. Ces observateurs se trouverent malades, lorsque les vaisseaux qui les devoient remener passoient au Cap, ce qui retardera leur retour peut-estre d'un an entier; et il faudra attendre jusques là pour scavoir le succes de la mesure des longitudes, parcequ'en allant vers là, ils n'ont pas pu se regler sur les horologes, pour n'avoir pas eu le loisir en partant d'examiner leur mouvement par le soleil. Il est vray qu'il y a un homme en ce païs qui a proposé à Mrs. les Estats son invention pour les longitudes, et que j'ay esté employé avec d'autres pour l'examiner. Mais il n'y avoit rien de bon ni de nouveau, et il n'y a eu personne qui ne l'ait condamné. Cependant de puissantes recommandations de quelques ignorants luy ont fait avoir 2000 fr. de la Compagnie des Indes Orientales malgré elle, lequel argent est assurement tres mal emploié. Il pretendoit se servir des observations de la lune, et avoit eu commerce avec le professeur Wasmuth qui estoit un visionaire.

Mr. de Tschirnhaus ayant promis avec tant d'assurance de donner la quadrature de toute ligne courbe proposée, ou de prouver qu'elle est impossible, ne s'est il trouvé personne qui l'ait mis à l'epreuve en luy proposant quelque courbe geometrique un peu composée? Je crois assurement qu'il se seroit trouvé court, ayant un peu examiné cette matiere depuis quelque temps. Je vois qu'on peut en supposant autant qu'on veut de quadratures, trouver les courbes à qui elles convienent, mais d'aller de l'equation à la quadrature, je n'y vois pas moyen si non en quelques cas simples. Il y a de remarques à faire, mais elles ne vont

guere loin, de sorte que je doute mesme, si lorsque vous m'avez donné la quadrature de la courbe $y^4 - 8aayy + 16aaxx \propto 0$ que je vous avois proposée, vous ne l'avez pas trouvée, Monsieur, dans quelque Table de quadratures que vous eussiez faite. Cela me paroit plus vraisemblable depuis qu'un certain mathematicien de Zelande m'a envoié un petit traité, où il y a une telle table, qui contient entre autres cette mesme courbe et sa quadrature.

Mr. Fatio me mande qu'il veut bien que je vous fasse part de sa Methode des Tangentes renversée, mais je ne scay pas maintenant si vous souhaitez, ou si vous avez besoin, que je vous l'explique, de quoy vous m'informerez, s'il vous plait. Il croit que Mr. Newton scait sur cette matiere et tout ce que luy et tout ce que vous, Monsieur, ayez jamais trouvé et encore bien d'avantage, et que mesme il en publiera quelque traité. Je suis etc.

J'ay eu soin de vostre lettre à Mr. le comte de Windischgras, aussitost que je l'eus receue.

XLII.

Leibniz an Huygens.

Hannovre $\frac{1}{11}$ d'Avril 1692.

J'espere que vous serés parfaitement remis de l'incommodité, dont parloit vostre precedente, et je vous souhaite une santé ferme afin que vous puissiés achever les belles meditations que vous avés. Je continueray tousjours de vous exhorter à tourner vos meditations sur la Physique. Je crois d'avoir marqué plus d'une fois que vos derniers traités m'ont plu infiniment. Cette explication du cristal d'Islande est comme une epreuve de la justesse de vos raisonnemens sur la lumiere: il y avoit une seule circonstance, sur laquelle vous ne vous aviez pas encore satisfait, mais peut-estre qu'elle aura esté éclaircie depuis.

Il y a bien de l'apparence que la pesanteur vient de la même cause qui a rendu la terre ronde, et qui arrondit les gouttes, c'est à dire du mouvement circulaire de l'ambient en tout sens. Et c'est apparemment aussi la raison de l'attraction des planetes vers le soleil, tout comme les planetes gardent une certaine direction magnetique à l'exemple de celle qui se voit en terre. Si nous concevons l'attraction des corps

pesans, comme par des rayons emanans du centre, nous pouvons expliquer pourquoy les pesanteurs des planetes sont en raison doublée reciproque de leur distance du soleil, ce qui se confirme par les phenomenes. Cette loy de la pesanteur jointe avec la trajection de Mr. Newton, ou avec ma circulation harmonique, donne les ellipses de Kepler confirmées par les phenomenes. Or il est manifeste qu'un corps est illuminé par un point lumineux en raison doublée reciproque des distances. Je crois qu'encor, selon cette maniere d'expliquer la pesanteur, par la force centrifuge d'un fluide tres subtil, on peut concevoir comme des rayons d'attraction, ces efforts du fluide n'estant autre chose en effect que de tels rayons qui font descendre les corps dont le mouvement circulaire est moins rapide. Il semble outre cela qu'une maniere de tourbillon est necessaire dans le ciel pour expliquer les parallelismes des axes, à quoy le mouvement spherique en tout sens ne scauroit suffire, il faut des poles et des meridiens. Enfin la correspondance qu'il y a des planetes ou satellites d'un même systeme est favorable à une matiere liquide deferante commune. Mr. Osanam a mis dans son Dictionnaire mathematique une hypothese de Mr. Casini, qui, au lieu des ellipses de Kepler, concoit des figures ellipsoides, où le rectangle des droites menées de deux foyers aux extremités est égal à un rectangle donné. Je ne scay s'il en donnera quelque raison physique. En attendant je trouve les ellipses de Kepler fort à mon gré, puis qu'elles s'accordent si bien avec la Mecanique, et peut estre que les aberrations viennent des actions des planetes entre elles et du mouvement du fluide deferant, sans parler des irrégularités de la matiere.

J'avoue que le fondement de Mr. Eisenschmid est mal assuré et on ne voit aucune raison a priori de son hypothese. Le temps decidera les choses, à quoy vos horloges contribueront beaucoup. C'est une chose plaisante que des gens, comme feu Mr. Wasmuth et comme son eleve ou amy, qui a fait sa proposition à la Compagnie des Indes, trouvent de la creance.

La Reine Christine persuadée par l'administrateur des terres de la couronne de Suede, dont elle jouissoit, avoit fait donner une somme tres considerable au premier pour achever ses tables qui devoient regler le ciel et la terre et perfectionner l'Astronomie et la Chronologie, le tout sur les fondemens de l'Ecriture sainte mystiquement expliquée.

Il s'en faut beaucoup sans doute que Mr. Tschirnhaus ait donné la veritable methode des quadratures. Il est vray que ce qu'il aura publié suivant les veues dont je luy avois fait part dès Paris peut servir. Mais il ne suffit pas et on s'engage dans des calculs horribles, si ce n'est qu'on ait certaines tables toutes faites. Je croy de vous avoir marqué plus d'une fois, que ce n'est pas par cette voye que j'ay

coutume de trouver les choses. J'en ay une autre, qui me paroist la plus veritable et la plus naturelle; elle donne alternativement la solution par la Geometrie ordinaire, ou la reduction au Cercle ou à l'Hyperbole; je ne l'ay pas encor poussée au dela de certains limites, mais il ne tient qu'à moy de le faire. Je seray bien aise de scavoir avec vostre permission, quel est ce petit livre qui contient des tables des quadratures. Je pourrois faire de telles tables, mais je n'ay jamais pris la peine d'en faire.

Je suis obligé à Mr. Fatio qui m'offre sa methode des Tangentes, mais croyant d'en scavoir à peu prés le fonds, je ne voudrois pas luy donner la peine. Je souhaitte une methode plus absolue en cette matiere, qui donnât encor la reduction lorsque la courbe est transcendante, et j'en ay des commencemens. Je n'ay pas de la peine à croire que Mr. Newton est allé bien loin en ces matieres. Mais comme chacun a ses voyes, j'en ay peut-estre dont il ne s'est pas encor avisé.

Je m'imagine que les objections que Mr. Papin vous avoit envoyées auront esté sur la pesanteur. J'espere que vostre Dioptrique paroistra bientost. Vous aviés la pensée de mettre quelque chose de Musique dans les Actes de Leipsich. En ce cas il ne seroit peut-estre pas mauvais d'expliquer comment le temperament a esté trouvé, ce que vous touchés dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans. Il y a longtemps que Mr. Ouvrard nous fait esperer la Musique. J'ay vu des memoires de Physique et de Mathematique de l'Academie de Paris reimprimés en Hollande. C'est fort bien fait que cela, et j'espere que de temps en temps il s'y trouvera quelque chose de bon. Le premier essai ne paroist pas des plus considerables. On rencontre quelques fois des questions extraordinaires et d'une analyse particuliere. En voicy une qui s'offrit il n'y a pas longtemps. Trouver une grandeur tellement formée des grandeurs a, b, c, d, que lorsqu'on pose $a = b$, elle soit égale à $\frac{c-d}{2c+2d}$, mais lorsqu'on pose $c = d$, elle soit $= \frac{a-b}{2a+2b}$. Cette grandeur ne se trouve pas difficilement en essayant, et on voit aisement que $\frac{ac-bd}{(a+b)\ (c+d)}$ y satisfait, mais je me mis à chercher comment de tels problemes pourroient estre resolus constamment par une methode reglée.

Relisant dernierement vostre explication de la pesanteur, j'ay remarqué que vous estes pour le Vuide et pour les Atomes. J'avoue que j'ay de la peine à comprendre la raison d'une telle infrangibilité, et je croy que pour cet effect, il faudroit avoir recours à une espece de miracle perpetuel. Je ne voy pas aussi de necessité qui nous oblige à

recourir à des choses si extraordinaires. Cependant puisque vous avés du penchant à les approuver, il faut bien que vous en voyiés quelque raison considerable. Je suis avec zele etc.

XLIII.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 11 Jul. 1692.

Quoyque je responde bien tard à vostre dernière, vous ne pouvez point douter que je n'en aye esté tres satisfait, quand ce ne seroit qu'à cause de vostre jugement avantageux, touchant mes derniers Traitez*), lequel j'estime plus qu'un autre. La principale raison de mon silence a esté que m'estant appliqué pendant quelque temps à l'estude de la Dioptrique, et à perfectionner ce que j'en ay escrit, j'ay voulu eviter d'estre distrait par d'autres speculations, ce qui ne se pouvoit point en respondant à vostre lettre, qui en est toute remplie. Il y a bien des choses à demesler dans cette Dioptrique, et il s'en est tousjours offert des nouvelles, jusqu'à cette heure, qu'il me semble d'avoir tout penetré, quoyque je n'aye pas encor achevé de tout escrire. Je m'en vais parcourir tous les points de vostre lettre, et en suite je vous repondray touchant vos notes sur les Principes de des-Cartes.

Si vous approuvez mon explication de la Pesanteur, je ne vois pas comment vous pouvez comprendre qu'un semblable mouvement materiae ambientis puisse causer et la rondeur des goutes d'eau et la Pesanteur du plomb vers la terre, ou des Planetes vers le soleil. Je trouve plus vraisemblable que la rondeur des goutes viene du mouvement rapide de quelque matiere qui circule au dedans. Mais quand ce seroit un effet de mouvement en tout sens de la matiere qui est au dehors, il n'y auroit pas là d'operation de la force centrifuge en ce qui est de la goute. Je ne vois pas non plus comment la cause que je donne de la Pesanteur, puisse coincider avec l'attration que vous concevez par des rayons emanants du centre. A demeurer dans mon principe, il faudroit que la vistesse de la matiere circulante fust plus grande vers le centre qu'aux endroits plus eloignez dans une certaine proportion, pour expliquer pour quoy les pesanteurs des Planetes contrebalancent leurs forces centrifuges, laquelle proportion je puis faci-

*) Traité sur la lumière. — Discours sur la cause de la pesanteur.

lement determiner, mais je ne trouve pas jusqu'icy la cause de cette differente vistesse.

Il est certain que les pesanteurs des Planetes estant posées en raison double reciproque de leur distance du soleil, cela, avec la vertu centrifuge, donne les Excentriques Elliptiques de Kepler. Mais comment, en substituant vostre Circulation Harmonique, et retenant la mesme proportion des pesanteurs, vous en deduisez les mesmes Ellipses, c'est ce que je n'ay jamais pu comprendre par vostre explication qui est aux Acta de Leipsich, ne voiant pas comment vous trouvez place à quelque espece de Tourbillon deferant de des Cartes, que vous voulez conserver, puisque la dite proportion de pesanteur, avec la force centrifuge produisent elles seules les Ellipses Kepleriennes, selon la demonstration de Mr. Newton. Vous m'aviez promis depuis longtemps d'eclaircir cette difficulté.

Si par les Parallelismes des axes planetaires vous entendez la situation parallele que chacun de ces axes garde à soy mesme, il n' est pas besoin pour cela de Tourbillon, puisque c'est par les loix du mouvement que cela se doit faire.

Je trouve, comme vous, plus à mon gré les Ellipses veritables que les Ellipsoïdes de Mr. Cassini, pour lesquelles je ne crois pas qu'il ait trouvé de raison physique, puisqu'il n'en a rien dit, et pour l'Astronomique, elle doit estre bien legere, vu le peu de difference entre les unes et les autres dans les cas des Orbites Planetaires.

Je pourrois vous marquer plusieurs objections contre la Terre Sphaeroide dans le sens de Mr. Eysenschmid, que j'escrivis en lisant son Traité, mais il suffit de celle cy pour le refuter. Cum ex auctoris ratiocinio tanta futura sit differentia amplitudinis graduum in ellipsibus per binos Terrae polos ductis, ut circa gradum 54 altitudinis poli, unus in terra gradus sit futurus $7\frac{1}{2}$ milliarium Germanicorum, prope aequatorem vero milliarium 15, numquid putat hoc nautarum omnium experientia pridem comprobari debuisse, si verum esset? Il paroit docte au reste et escrit bien; mais des gens comme Wasmuth et son eleve ne meritent pas qu'on en parle.

Dans le Traité de Craige*), que Mr. Fatio m'a fait avoir, je vois qu'il a bien remarqué l'insuffisance de la Methode de Mr. Tschirnhaus pour les quadratures. Aussi en a-t-il esté bien fasché.

---

*) Methodus figurarum lineis rectis et curvis comprehensarum quadraturas determinandi. Lond. 1635.

Le mathematicien de Zelande, qui donne dans son traité une Table de quadratures, s'appelle Hubertus Huighenius, et le titre de son livre, Animadversiones quaedam circa proportionem quam ad rectilineas habent figurae curvilineae. Il croioit qu'à la longueur du calcul près, il avoit montré le chemin pour arriver à la quadrature du cercle, de quoy je l'ay desabusé.

Les objections de Mr. Papin estoient contre l'un et l'autre de mes Traitez. Il est de ceux qui veulent avec Mr. des Cartes que l'essence du corps consiste dans la seule étendue.

Pour donner dans les Acta de Leipsich ce que j'ay encore touchant la Musique, il faudroit qu'il fust precedé de ce qu'il y a dans le Journal de Mr. de Beauval, et je ne suis pas fort de loisir à le traduire. Ce Mr. Ouvrard de qui vous attendez la Musique, pretendoit de pouvoir montrer la composition en 24 heures. Je l'ay connu à Paris. Il fit imprimer un petit traité assez extravaguant, où il vouloit qu'en matiere d'Architecture on observoit les proportions qui font les consonances, comme si l'oeil pouvoit reconnaitre quand on s'écarte de ces proportions de mesme que l'oreille le fait au chant.

J'ay vu encore quelques mois de Memoires de l'Academie de Paris, et j'approuve comme vous ce dessein, exhortant nos libraires de continuer à les copier, à quoy pourtant je ne les trouve pas fort disposez. Dans les Journaux des Scavants de l'année derniere 1691, il y a une observation curieuse que raporte Mr. de la Hire touchant des pierres d'aimant, qui estoient crues sur du fer, au dedans des pierres dont estoit basti une pointe de clocher à Chartres.

Vostre recherche de la quantité composée de a, b, c, d, semble assez difficile si on vouloit y trouver quelque maniere generale. Mais je doute si elle est fort utile, parceque dans tout ce que j'ay jamais calculé, il ne me s'est offert de pareil probleme. La quantité $\frac{ac - bd}{(a + b)(c + d)}$ n'est peut-estre pas la seule qui satisfasse dans vostre cas. Il y auroit aussi à considerer quand le Probleme est possible ou non. Si j'en avois besoin, j'y songerois d'avantage.

La raison qui m'oblige de poser des Atomes infrangibles est que ne pouvant m'accommoder, non plus que vous, Monsieur, du dogme Cartesien, que l'Essence des corps consiste dans la seule etendue, je trouve qu'il est necessaire, afin que les corps gardent leurs figures, et qu'ils resistent au mouvement les uns des autres, de leur donner l'impenetrabilité et une resistence à estre rompus ou enfoncez. Or cette resistence, il faut la supposer infinie, parcequ'il semble absurde de la supposer dans un certain degré, comme si on disoit qu'elle egale

celle du diamant ou du fer, car cela ne peut avoir de cause dans une matiere, où d'ailleurs on ne suppose rien qui l'etendue. C'est pourquoy j'ay tousjours trouvé que c'est une erreur à Mr. des Cartes, quand il veut que ses petites boules du 2 element se soient faites par l'abbattement des angles et eminences qu'avoient de petits corps cubiques ou autrement formez. Car s'il faloit quelque force pour surmonter la resistence que faisoient ces angles et eminences à estre rompues, par où croioit il pouvoir limiter, et à quoy faire monter cette resistence? Et s'ils n'en faisoient aucune, ensorte que ces corps se laissoient tronquer et ecorner à la seule rencontre d'autres particules, pourquoy ne se laissoient ils pas enfoncer aussi, comme de l'argille humide, et comment gardoient ils leur figure apres qu'elle estoit devenue spherique?

L'hypothese de la dureté infinie me paroit donc tres necessaire, et je ne concois pas pourquoy vous la trouvez si etrange, et comme qui infereroit un continuel miracle. Car pour la difficulté de l'union qui arriveroit par la rencontre de deux surfaces plattes, vous la resolvez vous mesme, et vous n'avez qu'à regarder les grains de sable avec un microscope et à voir vous y trouvez des surfaces extrement plattes, et quand il y en auroit aux atômes, il faudroit encore leur application juste, quod in indivisibili consistit. Je vous prie de considerer ces raisons que je viens d'exposer, et de me dire comment vous concevez que les parties des corps tout simples et primitifs coherent. Seroit-ce par vostre motus conspirans de ces mesmes parties considerées comme reellement séparées, et voudriez vous comprendre les corps simples aussi bien que les composez dans l'article de vos objections contre Des Cartes? J'avoue que je ne comprens nullement comment vostre pensée puisse subsister, ni dans les uns ni dans les autres. Voulez vous que les particules d'une barre de fer aient au dedans un motus conspirans, et que, non obstant cela, on ne touve pas que rien se derange dans cette barre? Qui peut entendre cela? Et pourtant vous dites que cette exposition de la cohesion satisfait ensemble à la raison et aux sens. J'ay une maniere d'expliquer la cohesion des corps composez qui depend de la pression de dehors et encore d'autre chose. Mais en voilà desia assez sur ce sujet.

Mr. de Beauval m'a presté vos remarques sur les 2 premieres parties des Principes de des Cartes, que j'ay examinées avec plaisir. Il y a ample matiere de contredire à ce Philosophe, aussi voit on venir des objections de tous costez. Pour ce qui est de ses demonstrations Metaphysiques de Existentia Dei, animae non corporeae et immortalis, je n'en ay jamais esté satisfait. Nous n'avons nullement

cette idée entis perfectissimi. Je n'approuve non plus son κριτήριον Veri, et suis d'accord avec tous dans la pluspart de vos raisonnemens, quoyque non pas dans tous. Mais il seroit trop long d'entrer dans cette discussion. Je vois que vous alleguez souvent ce que vous auriez escrit ailleurs. Entendez vous parler d'autres traitez que ceux qu'on a vu dans les Acta de Leipsich?

Sur la matiere du mouvement j'ay bien des choses nouvelles et paradoxes à donner, que l'on verra, quand je publieray mes demonstrations des Regles de la Percussion, inserées autrefois dans les Journaux de Paris et de Londres. Je communiquay ces demonstrations à nos Mrs. Je l'Academie, et j'en envoiay aussi quelquesunes à la Societé Royale, dans lesquelles j'emploiay avec autre chose cette conservatio virium aequalium et la deduction au mouvement perpetuel c'est à dire à l'impossible, par où vous refutez aussi les regles de des Cartes, qui estant reconnues partout pour fausses et estant posées sans fondement, ne meritoient pas la peine que vous prenez. A ce que Mr. de Beauval m'a dit, vous souhaitteriez que vos remarques fussent adjoutées dans quelque nouvelle edition des Principes de des Cartes, à quoy je ne scay si les libraires voudroient consentir, parceque cela ne serviroit nullement à recommander cette philosophie ni son Autheur. Elles seroient mieux avec le Voiage de Des Cartes que vous aurez lu, ou avec l'examen de Mr. Huet. Vous pourriez aussi fort bien les faire imprimer à part, en y faisant un titre et un peu de preface. Ou si vous vouliez que volume devint plus gros, vous n'auriez qu'à examiner de mesme la 3e et 4e partie, auxquelles il y a pour le moins autant à reprendre, et encore les meteores. Il semble que des Cartes ait voulu decider sur toutes les matieres de Physique et Metaphysique, sans se soucier s'il disoit vray ou non. Et peut-estre cela n'est pas inutile d'en user ainsi à des personnes qui se sont acquis une grande reputation d'ailleurs, parcequ'ils excitent d'autres à trouver quelque chose de meilleur. Il s'est abstenu pourtant de toucher à la production des plantes et des animaux, sans doute parcequ'il n'a pas un moien de les faire naitre du mouvement et de la figure des particules, ainsique le reste des corps qu'il considere.

Il me tarde de voir quelle a esté vostre correspondance avec Mr. Pelisson, que Mr. de Beauval m'a dit devoir paroitre au jour. J'aime à voir le raisonnement de ceux qui excellent dans les Mathematiques, sur quelque matiere que ce soit, et je pourray un jour vous en proposer quelqu'une. Je suis avec une parfaite estime et affection etc.

XLIV.

Leibniz an Huygens.

Hannover ce $\frac{16}{26}$ de Sept. 1692.

J'ay esté bien occupé cet esté, ce qui m'a empeché de repondre plustost à vostre lettre de l'11 de Jnillet, car il auroit fallu pour cela une espece de retraite et de meditation, parceque vous touchés plusieurs matieres importantes. C'est pour cela que je ne suis pas encore en estat de vous satisfaire entierement, et en attendant je donne ce que je puis.

Je ne voy pas encor pourquoy plusieurs opinions differentes en apparence, touchant la rondeur des gouttes, la pesanteur des corps terrestres, et l'attraction des planetes vers le soleil, ne se puissent concilier. Je croy qu'on peut dire en general, que la matiere est agitée d'une infinité de façons de tous costés avec une difformité uniforme, en sorte qu'il y en a peut estre également en tout sens. Ce mouvement doit servir tant à former des corps qu'à les placer. Car les corps prennent la situation par laquelle leurs mouvemens sont moins empechés, et s'accommodent en quelque façon les uns avec les autres, ainsi cela peut faire qu'ils se joignent quand ils sont separés, et qu'on a de la peine à les separer quand ils sont unis. On peut encor considerer plus particulierement qu'un corps environné d'un autre plus fluide et plus agité, mais auquel il ne donne pas un passage assez libre au dedans, sera frappé au dehors par une infinité de vagues, qui contribueront à l'affermir et à presser ses parties les unes contre les autres. Qu'un corps rond est moins exposé aux coups du fluide environnant, à cause que c'est ainsi que sa surface est la moindre qui est possible, et que l'uniforme diversité tant des mouvemens internes que des mouvemens exterieurs contribue encor à cette rondeur. On peut venir à un plus grand detail lorsque il s'agit du globe de la terre, et considerer que les agitations d'une fluide renfermé se tournent en circulations, car c'est ainsi qu'elles continuent avec le moins d'empechement, que ces circulations sont en tous sens, à cause que les agitations qui les produisent le sont aussi. Et que les circulations à l'entour de la terre s'accorderont et conspireront pour avoir un centre commun, qui sera celuy du globe de la terre, sans doute parceque, dès la formation de ce globe (semblable apparemment à la formation d'une goutte) ce centre estoit distingué des autres points; que cette matiere circulante tache à

s'éloigner du centre et par consequent qu'elle oblige les corps moins agités à s'y approcher. Et que les efforts centrifuges de la matiere peuvent estre considerés comme des rayons d'attraction partans du centre à l'egard des corps qu'ils y font aller. L' Analogie de la nature peut faire croire qu'il y a quelque chose d'approchant à l'egard du systeme du soleil, que les planetes tendent vers le soleil par une raison semblable et que les attractions y sont en raison doublée reciproque des distances tout comme les illuminations. Et comme dans l'aimant il y a non seulement l'attraction mais encor la direction, on a lieu de croire que parmy tant de circulations à l'entour du centre de la terre, aux quelles on peut assigner une infinité de poles, il y a deux poles principaux, suivant lesquels la matiere de la terre s'est accommodée à un certain cours de la matiere du grand systeme solaire, comme les aimans s'accommodent au cours de la matiere du systeme terrestre.

Il semble, Monsieur, que vous n'approuvés pas ces conciliations, mais vous ne marqués pas en particulier, ce qu'il y a à redire. Vous ne dites pas aussi pourquoy par exemple vous attribués plus particulierement la rondeur des gouttes d'eau à un mouvement rapide au dedans. Vous ne dites pas non plus pourquoy les efforts de la matiere centrifuge ne peuvent estre considerés comme des rayons d'attraction. J'ay remarqué cependant qu'on peut dire quelque chose à l'encontre, sçavoir qu'il y a la même quantité de lumiere dans toutes les surfaces spheriques concentriques, mais qu'on peut douter s'il y a la même quantité d'attraction. Et il est vray que j'avois encor tenté quelque chose qui paroist assés plausible en considerant la vistesse de la circulation. Il faudra examiner quelle explication est la meilleure, ou si on les peut concilier. Le même se peut dire à l'egard de l'explication de Mr. Newton des ellipses. Les planetes se mouvent comme s'il n'y avoit qu'un mouvement de trajection ou de propre direction joint à la pesanteur, à ce que Mr. Newton a remarqué. Cependant ils se meuvent aussi, tout comme s'ils estoient deferés tranquillement par une matiere dont la circulation y soit harmonique, et il semble qu'il y a une conspiration de cette circulation avec la propre direction de la planete. Et la raison qui fait que je ne me repens pas encor de la matiere deferente, depuis que j'ay appris l'explication de Mr. Newtou, est entre autres, que je voy toutes les planetes aller à peu près d'un même costé, et dans une même region, ce qui se remarque encor à l'égard des petites planetes de Jupiter et de Saturne. Au lieu que sans la matiere deferente commune, rien n'empecheroit les planetes d'aller en tous sens. Il y a bien des choses à dire sur tout cela, que j'espere

d'éclaircir un jour plus particulierement. Il semble que l'analogie de la terre et du soleil avec l'aimant rend assés probable le cours de la matiere solaire, semblable à celuy de la matiere terrestre qui est une espece de circulation ou de tourbillon. Et comment expliqueroit-on l'attraction de la terre qui la porte vers le soleil, si on n'admet quelque chose d'analogique avec la cause de la pesanteur? Il me semble que vous reconnoissés cette analogie vous même dans quelque endroit de vostre dernier traitté. Quelque chose que ce puisse estre ce sera un mouvement d'une matiere fluide, qui sera en rond. Car vous ne vous contenterés pas d'une qualité attractive comme Mr. Newton semble faire. Cela estant, il semble que vous ne vous sçauriès passer des tourbillons, et sans cela, comment pourriés vous maintenir vostre explication de la pesanteur, où vous supposés avec raison que la matiere qui circule en tous sens est enfermée? Ce ne sera pas dans un ciel solide crystallin, ce sera donc dans une espece d'orbe ou sphere liquide, ou autre fluide environnant, auquel le mouvement donne en quelque façon à cet egard les privileges d'un corps solide. Aussi sans cela les corps circulans se dissiperoient par leur force centrifuge, si ce n'est qu'on leur attribue quelque qualité centrophile, ou quelque sympathie entre elles, dont je crois que vous ne vous accommoderés pas. Quant au parallelisme des axes il est bien vray que si l'on explique le mouvement de la planete par la seule trajection jointe à la pesanteur, et si l'on suppose que la planete est tousjours en equilibre par la pesanteur de ses parties, de quelque maniere qu'on la place, il faut qu'elle garde tousjours la direction de l'axe, en sorte que l'axe soit tousjours parallele à luy même. Mais cela suppose encor que le corps ne trouve pas le moindre empechement ou rencontre irreguliere ny impression exterieure, qui le fasse tourner tant soit peu. Ce qui est contre la coustume de la nature, et par consequent, puisqu'il n'y auroit ainsi aucun principe fixe ou constant de cette direction, elle seroit bientost changée. Comme il est seur qu'un globe, quelque égale qu'on le pourroit faire, jetté en l'air ne garderoit pas longtemps une situation parallele à elle meme, ou aux situations precedentes, et une droite menée au dedans de ce globe ne demeureroit pas longtemps parallele à sa premiere situation. De sorte que j'aime mieux de fixer ce parallelisme par quelque cause qui reponde à la direction de l'aimant et qui serve à redresser les changemens, que les seules loix du mouvement de la planete ne sçauroient exclure. Et je crois même que s'il y avoit que la seule trajection libre de la planete, sans quelque fluide deferant et gouvernant son cours, les regles seroient bientost fausées.

Je viens à nostre different du vuide et des atomes, qu'il sera

difficile de vuider. Vous supposés, Monsieur, que dans les corps il y a une certaine fermeté primitive, et cela estant vous jugés qu'il la faut supposer infinie, car il n'y a point de raison de la supposer d'un certain degré. Je demeure d'accord qu'il y auroit de l'absurdité à donner à tous les corps un certain degré de fermeté, car rien nous determine plustost à un tel degré qu'à tout autre. Mais il n'y a point d'absurdité de donner differens degrés de fermetè à des corps differens; autrement on prouveroit par la même raison que les corps doivent avoir une vistesse nulle ou infinie. Cela posé, que la nature doit varier, la raison veut qu'il n'y ait point d'atomes ou corps d'une fermeté infinie, autrement ils le seroient tous, ce qui n'est point necessaire. Il ne semble pas aussi que vous satisfaites assés à la difficulté des atomes qui se toucheroient par quelque surface, et par cela même demeureroient pris et attachés ensemble inseparablement. Car de nier que les atomes ont des surfaces plattes ou autrement congruentes entre elles en la moindre partie, c'est un grand postulatum. Mais quand on l'accorderoit, je crois que dans ces sortes de raisonnemens on doit avoir egard non seulement à ce qui est, mais encor à ce qui est possible. Supposons donc une chose possible, scavoir que tous les atomes n'ayent que des surfaces plattes, il est visible qu'alors cet inconvenient arriveroit et par consequent l'hypothese de la parfaite dureté n'est point raisonnable. Il y a encore d'autres inconveniens dans les atomes. Par exemple ils ne scauroient estre susceptibles des loix du mouvement, et la force de deux atomes egaux, qui concoureroient directement avec une vistesse egale, se devroit perdre, car il paroist qu'il n'y a que le ressort qui fait que les corps rejaillissent. Mais quand il n'y auroit aucun inconvenient, il semble qu'on ne doit pas admettre une qualité sans raison, telle qu'est la fermeté primitive. On ne voit rien qui attache deux masses ensemble, et je ne voy pas comment vous concevés, Monsieur, que le seul attouchement fait l'office d'un gluten. Or puisqu'il n'y a aucune connexion naturelle entre l'attouchement et l'attachement, il faudra bien que, si de l'attouchement suit l'adhaesion, cela arrive par un miracle perpetuel. Mais si la fermeté est une qualité explicable, il faut bien qu'elle vienne du mouvement, puisqu'il n'y a que le mouvement qui diversifie les corps. Cela posé, tout ce que je puis dire de la connexion originaire des corps revient à cecy, qu'il faut de la force pour detacher une partie de la matiere de l'autre, lorsque ce detachement change le mouvement et le cours present des corps. Tout mouvement est conspirant dans une masse, autant qu'il y a quelque regle ou loy en comparant les parties mouvantes entre elles, et il est troublé à mesure que cette regle devient plus composée. Aussi

peut-on dire, que tout corps a un certain degré de fermeté et de flexibilité. Cependant quand il s'agit de quelque barre de fer ou autre corps grossier, on n'a pas besoin de recourir d'abord à l'origine primitive de la fermeté, non plus qu'aux atomes, il suffit de se servir des petits corps, dont chacun a deja en luy même sa fermeté, mais dont l'un demeure attaché à l'autre, à peu pres comme deux tables qui se touchent par leurs surfaces plattes et unies, que la pression de l'ambiant defend de separer tout d'un coup.

Je n'ay point d'empressement à donner au public les remarques sur la partie generale de la philosophie de Descartes. Monsieur de Beauval sembloit s'offrir de les porter avec soy en Hollande. Puisque vous avés pris la peine de les voir, je souhaitterois que vous eussiés marqué les endroits dont vous ne convenés pas, outre ceux qui regardent le vuide et la fermeté. Je voudrois qu'ils fussent encore vus par quelque habile Cartesien, mais capable de raison, pour apprendre ce qu'il diroit à l'encontre. J'en ay écrit à Mr. de Beauval. Je souhaitte de voir un jour ce que vous donnerés sur le mouvement. J'avois examiné les regles de Descartes par un principe generale de convenance, qui ne manque pas, à ce que je crois, et qui m'a paru utile à refuter les erreurs par interim en attendant la pure verité. Et j'estois bien aise de montrer comment par le moyen de ce principe les regles Cartesiennes se refutent elles memes. Mon dessin dans ces remarques n'estant que de faire des animadversions sur Descartes, sans pretendre d'y donner la veritable Philosophie. J'ay esté surpris que Mr. Pelisson a mis, sur tout dans les additions, des choses que je l'aurois prié d'en retrancher, si j'avois sçu son intention. Ce n'est pas qu'il y ait du mal, mais c'est qu'il y a quelque fois du mal-entendu dans le monde. Tout cela n'a pas esté fait pour le public, et vous n'y trouverés pas vostre compte, Monsieur, si vous vous donnés la peine d'y jetter les yeux; mon dessein estoit de monstrer à Messieurs de l'Eglise Romaine par une maniere de retorsion, que selon leurs principes non seulement les Protestans mais encor les Payens se peuvent sauver. Le reste est né par rencontre.

Vous me faites esperer un jour quelque chose de vostre part qui sera d'une nature differente des matieres mathematiques. C'est ce que je seray ravi de voir. Et generalement tout ce qui vient de vous m'est pretieux. Je vous feray souvenir quelques fois de ce que vous dites dans vôtre lettre à l'egard le Descartes, qu'il est utile que les personnes d'une grande reputation disent leur conjectures sur toutes sortes de matieres pour exciter les autres. C'est ce que je voudrois que vous fissiez vous même. Je suis avec zele etc.

P. S. Mr. van Beuninguen est-il encor en vie? On m'avoit dit autres fois qu'il s'estoit jetté dans des sentimens outrés sur la religion. C'est dommage qu'il n'a pas songé plustost de donner au public des memoires de ses negotiations. N'y a-t-il pas quelque Ministre des Etats des Provinces Unies qui y pense? Car c'est bien dommage qu'aujourdhuy il n'y a que ceux qui ne connoissent rien aux affaires qui se melent d'en écrire. Mr. vostre Frere pourroit conserver à la posterité l'histoire veritable du grand Roy qu'il sert avec tant d'approbation. Ce que Mr. Temple donne est tres considerable, cependant Mr. du Cros connu sur le Theatre de Nimwegue ayant esté touché un peu durement par M. Temple, veut donner une Apologie, où il pretend de redresser bien des choses qu'il croit n'avoir pas esté bien rapportées par Mr. Temple.

XLV.

Leibniz an Huygens.

Hanover $\frac{20}{30}$ Decemb. 1692.

Ma lettre assez prolixe vous aura esté rendue il y a quelques mois. La reponse n'a point de presse; mais voicy de quoy je prends la liberté de vous supplier. Une personne que je considere, poussée par un autre qui s'imagine d'avoir trouvé le mouvement perpetuel, m'a demandé si je ne pourrois pas apprendre si les Estats ont proposé un prix à celuy qui le trouveroit et combien. J'ay eu beau dire que la chose n'est point possible à mon avis, et que j'ay bien appris par les lettres de Grotius ad Gallos la quantité promise par les Etats à celuy qui trouveroit les longitudes, mais que je n'ay pas ouï parler d'un prix promis à l'inventeur du mouvement perpetuel. On a toujours insisté et on m'a prié avec instance de m'en informer. Comme vous ne pouvés pas manquer de scavoir la chose, Monsieur, s'il y a quelque chose de tel, je prends la liberté de m'adresser à vous et de vous supplier de me faire scavoir un mot de reponse à cette question, quelqu'inutile qu'elle soit en elle même et quoyque j'aye presque honte de vous la proposer.

J'espere que vous vous porterés bien, et que nous aurons bientost vostre importante Dioptrique. On dit que Mr. Newton donnera un nouvel ouvrage. Je vous avois prié de me communiquer vos

remarques sur mes Animadversiones ad Cartesium. Ce n'est pas pour entrer en dispute avec vous, mais pour en profiter. Cependant je vous supplie de renvoyer mes animadversions à Mr. Beauval, si vous ne l'avés déja fait. C'est afin qu'il les communique encor à d'autres comme je l'en ay prié, afin d'en tirer encor des remarques, quoyque je scache bien qu'il n'en trouvera gueres qui puissent valoir les vostres. Je suis avec zele etc.

P. S. Je souhaitte une heurense année avec une grande suite de semblables.

XLVI.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 12 Janvier 1693.

Il y a 6 jours que je reçus vostre lettre du 30. Dec. ayant encore à respondre à celle du 26. Sept., de quoy je ne scay pas bien quelles excuses j'allegueray, si ce n'est que je m'apperçois que les disputes par lettres ralentiroient nostre correspondance, du moins de ma part, parcequ'il faut se resoudre à recommencer de raisonner chaque fois qu'on escrit, sans esperer de reponse qu'apres 5 ou 6 semaines, lorsqu'on a derechef oublié où on en estoit. Je repasseray pourtant sur les articles de vos responses sans m'etendre, et sans pretendre mesme que vous m'envoiez des répliques. Mais auparavant je repondray à ce que vous m'avez demandé, et vous diray que assurement il n'y a point de prix proposé par Mrs. les Estats à l'invention du mouvement perpetuel, quoyque je sçache que plusieurs l'ont creu, parceque des gens peu sçavans en ces matieres se sont imaginé que de cette invention s'ensuivoit celle des longitudes, qui est une consequence sans fondement. Du mouvement perpetuel ils esperoient un mouvement egal et de là des horloges justes, mais je vois qu'avec des horloges tres justes, l'affaire des longitudes souffre encore trop de difficulté à cause des accidents, et du soin et de l'exactitude qu'il faut à les gouverner. Celuy pour qui est cette information ne doit pas entendre les principes de l'art, s'il croit pouvoir effectuer un tel mouvemeut mechanice, car pour physico-mechanice il semble tousjours qu'il y ait quelque esperance, comme en emploiant la pierre d'aimant.

Je passe à vostre premiere lettre, où j'ay esté bien aise de voir que vous estes assez de mon sentiment en ce qui est de la cause de la Pesanteur. Mais quand vous dites que les efforts centrifuges de la matiere peuvent estre considerez comme des raions d'attraction qui partent du centre, à l'egard des corps qu'ils y font aller, je ne vois aucune raison de cette uniformité, ni que par consequent elle puisse servir à prouver la proportion des pesanteurs double, renversée des distances du centre. Laquelle d'ailleurs je tiens estre telle, tant à l'egard des planetes principales, qui pesent vers le soleil, qu'à l'egard des lunes qui pesent vers les planetes.

Pour ce cours particulier de la matiere dans le Tourbillon du Soleil, qui serviroit à conserver le parallelisme à l'axe de la Terre, je le trouve peu compatible avec le mouvement circulaire de la mesme matiere en tous sens, qui fait la Pesanteur, et avec cela nullement necessaire. Parce que le globe terrestre estant de la grandeur qu'il est, l'axe de son mouvement doit naturellement garder le parallelisme, et il est assez difficile d'expliquer pourquoy il se detourne encore tant qu'il fait, suivant ce qui paroit par la Precession des Equinoxes. Car pour ce qui est de l'experience d'une boule qu'on jetteroit en haut, je ne doute pas qu'elle ne fust contre vous, si on la pouroit jetter en sorte qu'on n'imprimât point de circulation à l'axe.

Ma raison pourquoy je crois que la rondeur de la goute d'eau est plustost causée par un mouvement au dedans, que par l'impulsion de la matiere autour, c'est que l'impulsion egale par dehors doit faire precisement le mesme effect à enfoncer les parties de la goute, et à changer sa figure, que feroit la pression egale d'une matiere qui l'environneroit de tout costé. Mais par les principes de Mechanique, une telle pression ne doit point causer de changement à la figure de la goute ni la rendre spherique, quoyque plusieurs le croient faussement; donc ce n'est pas l'impulsion de la matiere par dehors qui la reduit à cette figure.

Je n'insiste plus à demander la conciliation du Tourbillon deferant avec les Ellipses de Mr. Newton, quoyque je ne la trouve point dans vostre dernier raisonnement. Plusieurs avec moy la croient impossible. Il est vray que ces Tourbillons à la maniere de des Cartes seroient commodes pour expliquer quelques phenomenes, comme, entre autres, pourquoy les Planetes circulent toutes d'un mesme sens; mais ils sont incommodes pour d'autres, sur tout pour l'excentricité constante des mesmes Planetes, et de leur acceleration et retardement veritable dans leurs orbes. Car, pour le premier, il semble que la matiere du tourbillon devroit il y a tongtemps s'estre reduite à une conversion reguliere quant à la rondeur, et par consequent aussi les Planetes, puisqu'elles

nagent dedans. Et pour le second, en posant que leur mouvement demeure excentrique, elles devroient dans leur aphelies et parelies s'accommoder à la vitesse du Tourbillon, ce qu'elles ne font pas, selon ce que je l'ay examiné autrefois. Outre qu'il seroit mal aisé de dire comment les cometes peuvent passer si librement à travers un tourbillon capable d'emporter les planetes, ce qui dans l'hypothese de Mr. Newton est sans difficulté.

Croiez, je vous prie, Monsieur, que je ne me pique nullement de soutenir les opinions que j'ay une fois embrassées, mais que je ne cherche uniquement que quelques raions de verité, si nos disputes en pourroient mettre en evidence. J'ay fort consideré ce que vous dites au sujet de mes atomes de dureté infinie, scavoir que vous avouez bien, qu'il y auroit de l'absurdité à donner à tous les corps primitifs un certain degré de fermeté ou resistence à estre rompus, mais qu'il n'y a point d'absurdité de supposer differens degrez dans plusieurs corps, scavoir primitifs, car c'est de quoy il s'agit. Il me semble pourtant qu'il est plus aisé d'accorder la dureté parfaite et infinie pour tous, que cette varieté de forces pour differents corps. Car il est plus difficile de concevoir les raisons de ces differentes duretez, que d'en admettre une seule infinie. Ce seroit imaginer plusieurs especes de matiere premiere, au lieu que je n'en ay besoin que d'une.

Vous alleguez apres cela comme une difficulté contre les atomes, l'adhesion qui se feroit par leurs surfaces plattes. Je repons qu'elles devroient avoir estez faites expres ces surfaces, ce que je ne vois pas pourquoy il auroit plustost lieu là, que dans le sable de la mer où l'on n'en trouve point. Et il ne me semble point du tout que ce soit un grand postulatum de vouloir qu'il n'y ait point d'atomes avec des surfaces plattes, mais qu'il le seroit d'avantage d'en supposer, puisqu'il faut une direction et intention expresse pour former une surface platte avec la derniere exactitude. Mais quand la dixieme partie des atomes seroient des cubes parfaits, l'application juste de leurs surfaces consistant in indivisibili, et ces corps estant en grand mouvement, je n'apprehenderois pas encore qu'ils s'allassent joindre à composer des masses.

Vous trouvez encore un inconvenient en ce que les atomes ne seroient pas susceptibles des loix du mouvement, parceque deux egaux concourant directement avec forces égales, devroient perdre leur mouvement, puisqu'il n'y a que le ressort, dites vous, qui fasse rejaillir les corps. Mais c'est ce que je ne crois nullement pour des raisons que je publieray un jour; et quelque explication que vous vouliez donner de la cause du ressort, vous seriez bien embarassé en posant que les

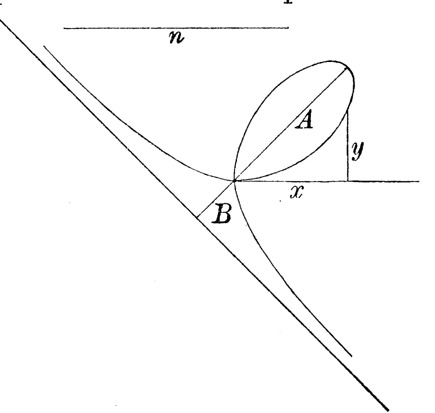
derniers petits corps (car ceux qui font ressort sont composez) ne rejalissent point en se rencontrant, mais qu'ils demeurent joints, car de là s'en suivroit la perte de tout mouvement relatif dans la matiere de l'univers.*) Au reste vous ne deviez pas m'attribuer que je conçois que le seul attouchement fait l'office d'un gluten, à rendre les corps composez fermes et durs, puisque j'avois ecrit dans ma lettre precedente que j'expliquois la cohesion des corps par une pression de dehors, et par quelqu'autre chose. Laquelle pression je vois que vous emploiez de mesme. Ce que vous adjoutez du mouvement conspirant m'est tout à fait inintelligible.

J'ay rendu à Mr. de Beauval vos notes sur des Cartes. Je pourray une autre fois vous parler des endroits où je ne suis pas d'accord avec vous. Passons maintenant à la Geometrie, où il n'y a rien à contester. J'ay renouvellé depuis quelques mois la correspondance avec Mr. le Marquis de Hospital, à l'occasion d'un joli Probleme qu'il m'envoia, qui estoit de trouver une ligne droite egale à la portion donnée de la ligne Logarithmique, sans autre aide que de la ligne mesme. Il avoit pris un detour pour cela, où il y avoit bien de subtilité, et quoyque j'aye trouvé depuis un autre chemin plus court, je compte pour beaucoup qu'il ait inventé et tenté le premier ce probleme. Mais il est capable d'en resoudre de plus difficiles, et se sert adroitement de vostre nouveau Calcul. Il m'a envoié les solutions de toutes les questions que cy devant je vous ay proposées touchant les quadratures et les soutangentes, me les aiant demandées expres. Et il en a souhaité apres cela de plus difficiles. En quoy je n'ay pas manqué de le contenter, luy ayant envoié depuis peu ces 2 soutangentes pour trouver leurs courbes: $\frac{aay + yyx}{ax - yx - ay}$ et $\frac{yx^3}{3x^3 + 3aay - 2xyy}$. Il m'a demandé si j'avois quelque methode pour quand les soutangentes sont $\sqrt{ay + xx}$, ou $\frac{2y^3}{yy + 2xy - xx}$, ou $\frac{yy - xy}{a}$, qui est celle de la courbe de Mr. de Beaune, dont Mr. des Cartes fait mention dans sa 79e lettre du 3e volume. J'ay avoué que je n'en avois point, et je tiens ces questions tres

---

*) In der Sammlung Uylenbroek's kommt nach diesen Worten folgendes, das in dem vor mir liegenden Briefe von Huygens fehlt: Ce qui me fait le plus de peine dans la supposition des atomes, c'est que je suis obligé de leur attribuer à chacun quelque figure. Et quelle sera la causse et la varieté infinie de ces figures? mais quelle est la causse des differentes figures du sable de la mer, lequel j'admire toutes les fois que j'en regarde avec le microscope, chaque grain estant un caillou de cristal qui ne croit ni ne diminue et a esté tel qui scait par combien de siecles. C'est que le Createur les a fait une fois naitre telles, et de mesme pour les atomes.

difficiles, dont je souhaite fort d'avoir vostre sentiment. Pour moy je ne veux pas me donner la peine de les chercher, parce que je crois que toute la difficulté est desia surmontée, soit par Mr. le Marquis luy mesme, soit par Mr. Newton (dont on m'assure que le Traité là dessus est imprimé depuis peu dans le Traité d'Algebre de Mr. Wallis), ou par vous, Monsieur, qui avez extrémement approfondi cette matiere où je ne suis que novice. J'ay pourtant rencontré depuis quelque temps une source peu connue mais que vous n'ignorez pas sans doute, d'où l'on peut tirer la solution de beaucoup de Problemes, qui regardent les Tangentes renversées, quadratures, centres de gravité etc. Elle donne sans peine la quadrature que je vous ay proposée cy devant, et celle de la courbe $xxy - aay \infty 2aax$, qui me l'a esté par Mr. le Marquis, avec plusieurs autres. Entre les quelles est aussi la quadrature assez remarquable de la courbe dont l'equation est $x^3 + y^3 = xyn$, que Mr. des Cartes raporte dans sa lettre 65 du 3e vol., et qu'il a considerée aussi bien que Mr. Hudde, pour autre chose. Je trouve que le contenu de la feuille A dans cette figure est $\frac{1}{6}$ nn, ou $\frac{1}{3}$ du quarré de son diametre. Que l'espace infini B, entre les continuations de la courbe et son asymptote, est encore de la meme grandeur. Et qu'enfin la dimension generale des segments est aussi fort simple, qui s'exprime par un seul terme.



Je vous entretiendray une autre fois d'une quadrature physico-mathematique de l'Hyperbole, que j'ay rencontrée il n'y a guere, dont la speculation a quelque chose de plaisant. Ainsi vous voiez, Monsieur, que je ne cesse de mediter et d'apprendre tousjours quelque chose.

J'ay vu avec plaisir vos lettres à Mr. Pelisson, dans l'une desquelles vous dites assez fortement leurs veritez à Mrs. les Catholiques. On voit dans ses reponses comment ils emploient les douceurs, les louanges et tout ce qui peut servir pour tascher de vous attirer à leur parti, sans que je croie que cela vous tente le moins du monde, ne pouvant m'imaginer comment une personne d'esprit peut se soumettre à croire des absurditez et les niaiseries qu'enseigne cette Religion, ni comment un homme de bien peut approuver la cruauté dont elle use à contraindre et forcer les consciences. Je suis etc.

XLVII.

Leibniz an Huygens.

Hanover ce $\frac{10}{20}$ de Mars 1693.

Je commence par le remerciment que je vous dois de ce que vous avés bien voulu me satisfaire si promtement sur mes demandes, touchant le prix pretendu proposé par Mrs. les Estats, qu'un amy me prioit fort de luy faire scavoir, bien que je luy eusse assez temoigné mon sentiment.

J'avois remarqué moy même dans ma precedente que je trouvois de la difficulté dans la comparaison de la force centrifuge avec les rayons d'attractions que j'avois proposée, et même j'avois marqué en particulier en quoy consistoit cette difficulté. Mais je ne croyois pas qu'on diroit qu'il n'y a aucune raison de conformité, puisque l'un et l'autre produit une attraction, l'un et l'autre tend du centre à la circonferance, l'un et l'autre opere en ligne droite.

Vous dites, Monsieur, que vous trouvés le cours particulier de la matiere dans le tourbillon du soleil, propre à conserver le parallelisme de l'axe de la terre, peu compatible avec le mouvement circulaire en tout sens, qui semble faire la pesanteur vers le soleil. A quoy je reponds que deux mouvemens semblables à ceux là se trouvent fort compatibles dans le systeme du globe de la terre, où l'un est la cause de la pesanteur, l'autre celle de la direction magnetique; et cette analogie favorise fort mon hypothese. Et comme il y a une declinaison de l'aimant, dont les causes particulieres nous sont encor inconnues qui ne sçauroient pourtant se trouver que dans le cours de quelque matiere, il semble encor que le detour de l'axe de la terre ne sçauroit venir que de quelque raison semblable. Il est vray que la terre est un grand corps, dont il n'est pas aisé de changer le mouvement ou la situation; mais comme tous les corps de la nature agissent les uns sur les autres, et qu'il y a plusieurs grands courans particuliers, elle ne semble pas exemte d'accidens; et je ne sçay s'il seroit conforme à la coustume de la nature, d'abandonner ces grands systemes à ces rencontres. Il semble plustost que les systemes sont tellement formés et establis par une conspiration de toutes les parties arrangées et asservies de longue main, que les desordres se redressent d'eux mêmes, comme dans le corps d'un animal; ce qui se fait par le cours des corps fluides, qui entretient les solides dans leurs fonctions. Ainsi je m'ima-

gine, que si quelque cause extraordinaire detournoit l'axe de la terre, il reprendroit bientost sa veritable situation, comme fait un aimant, au lieu que selon l'hypothese de Mr. Newton, la terre vogue dans l'ether comme feroit une isle flottante, que rien ne dirige que sa propre tendence déja prise.

Ce que vous dites, Monsieur, qu'une pression uniforme par dehors ne change point la figure d'un corps et par consequent n'est pas capable d'arrondir une goutte, merite consideration. Mr. Descartes n'estoit pas de ce sentiment, et en cela j'avois esté du sien; mais je me rendray volontiers, quand je verray comment vous jugés que cela est contraire aux principes de mecanique.

Vous jugés aussi, Monsieur, que les tourbillons deferans ne sont pas conciliables avec les ellipses de Kepler. Cependant il me semble que les raisons prises de l'excentricité constante des planetes, aussi bien que de leurs vistesses dans les aphelies et perihelies ne sont pas sans replique, ou plustost que les tourbillons se peuvent expliquer en sorte qu'ils favorisent ces choses, bien loin d'y estre contraires. L'objection du passage des cometes paroist difficile, mais peut-estre que leur force est telle que le mouvement d'une matiere aussi subtile, que l'est celle du tourbillon ne les detourne pas considerablement; il est bien vray que cette même matiere a assès de force pour conserver le mouvement des planetes, mais si la planete estoit reduite en repos dans le tourbillon, le tourbillon ne luy rendroit son mouvement que peu à peu. Comme dans vos pendules peu de force est capable d'entretenir le mouvement, mais il est plus difficile de le produire.

Je viens à nostre controverse des atomes, elle est si ancienne, et les esprits y sont si partagés, que je m'etonne nullement, si nous ne tombons pas d'accord là dessus. Cependant comme je croy que parmy tous ceux, qui ont jamais soutenu les atomes, personne l'a fait avec plus de connoissance de cause et y a apporté plus de lumieres, que vous, Monsieur, et que de mon costé j'ay taché d'y joindre des considerations assez particulieres, je continue de profiter de vos eclaircissemens. Si l'on devoit supposer des consistances primitives, la question est, s'il seroit plus raisonnable d'aller d'abord à une dureté parfaite et infinie, que d'admettre toute sorte de degrés de fermeté, mais tousjours meslés de quelque fluidité ou mollesse, en sorte que la matiere ait par tout quelque union ou connexion et que neantmoins elle soit encor divisible par tout. Et qu'ainsi le même corps puisse estre appellé ferme, roide, dur; et encor fluide, mol, flexible, *diverso respectu*, et comparativement selon l'action qui tache de le flectir ou de le diviser. Vous jugés, Monsieur, quil seroit plus difficile de concevoir les raisons

de ces differentes fermetés; mais si les fermetés sont primitives, on n'en doit pas chercher la raison. J'avoue que la matiere seroit heterogene en quelque façon, ou plustost dans une varieté perpetuelle, en sorte qu'on ne trouveroit pas la moindre particelle uniforme dans ses parties, au lieu que les atomes sont homogenes. Mais en recompense la matiere, selon mon hypothese, seroit divisible par tout et plus ou moins facilement avec une variation, qui seroit insensible dans le passage d'un endroit à un autre endroit voisin, au lieu que, selon les atomes, on fait un saut d'une extremité à l'autre et d'une parfaite incohesion, qui est dans l'endroit de l'attouchement, on passe à une dureté infinie dans tous les autres endroits. Et ces sauts sont sans exemple dans la nature. D'où il s'ensuit aussi que selon moy la subtilité et varieté va à l'infini dans les creatures, ce qui est conforme à la raison et à l'ordre (car je suis pour un axiome tout opposé à cet axiome vulgaire, qui dit naturam abhorrere ab infinito). Mais selon les atomes le progres de la subtilité et de la variation se borne à la grandeur de l'atome, ce qui est aussi peu raisonnable que cette autre maniere de borner les choses par des extremités en enfermant le monde dans une boule. Quant à la difficulté des surfaces plattes, par lesquelles les atomes s'attacheroient, vous repondés, Monsieur, qu'il seroit plustost un grand postulatum de vouloir qu'il y en ait, que de vouloir qu'il n'y en ait point, puisqu'il faut bien de l'exactitude pour en former. Je reponds qu'il faudra tousjours une entiere exactitude pour former quelque surface que ce soit. Quelque qu'elle puisse estre, elle sera exacte. Or la surface platte estant des plus simples, il semble que ce qui est cause de l'existence des atomes seroit encor cause de l'existence des plus simples atomes, à moins que cette cause n'ait eu des raisons particulieres de les eviter, qui ne sçauroient estre prises qu'à fine pour eviter la cohesion. Mais ce seroit assez postuler que de raisonner ainsi. Vous adjoutés, Monsieur, quand même on admettroit un grand nombre d'atomes cubiques, qu'ils ne s'attacheroient pas aisement ensemble pour composer les nouveaux corps inseparables, parceque le plus souvent ils ne reposeroient pas durant quelque temps dans l'attouchement et ne demeureroient qu'un moment dans le même estat, car c'est ainsi que j'entends ce que vous dites, que leur application juste consisteroit in indivisibili. Mais je crois qu'il est assez etranger que cela se peut faire quelques fois, sçavoir qu'ils s'attachent en sorte qu'ils deviennent atomes, et qu'ils soyent desormais inseparables à toute eternité.

J'avois crû que ma raison contre les atomes prise des loix du mouvement estoit une des plus fortes. Cependant puisque vous promettés, d'expliquer un jour comment un corps inflexible peut rejaillir,

je ne doute point que vous n'ayés à dire là dessus des choses tres considerables à vostre ordinaire. Vous trouvés aussi que la difficulté pourroit estre retorquée contre moy, puisque les corps à ressort sont composés, et que par consequent les derniers petits corps, estans sans ressort seront aussi incapables de rejaillissement. Mais je reponds qu'il n'y a point de dernier petit corps, et je conçois qu'une particelle de la matiere, quelque petite qu'elle soit, est comme un monde entier plein d'une infinité de creatures encor plus petites, et cela à proportion d'un autre corps, fut il aussi grand que le globe de la terre.

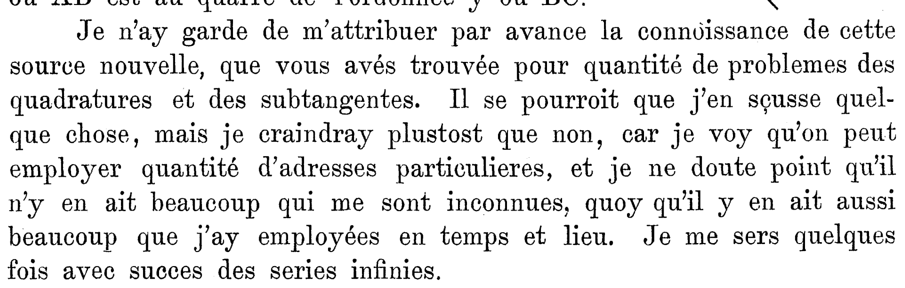
Comme il semble qu'on ne sçauroit rendre aucune raison pourquoy les parties d'un atome sont inseparables, que parcequ'elles se touchent une fois parfaitement par leur surfaces durant quelque temps; c'est pour cela que j'ay dit, que dans l'hypothese des atomes l'attouchement fait l'office d'un glouten. Il semble aussi que si l'attouchement par surfaces fait une connexion infiniment forte, l'attouchement par lignes et par points devrait aussi faire des connexions, mais surmontables, en sorte que deux corps se touchant par des lignes plus grandes seroient plus aisés à separer, et des corps se touchant par plus de points auroient plus de connexion que ceux qui se toucheroient par moins de points caeteris paribus. Et mêmes, point contre point et ligne contre ligne, il semble que contactus osculi devroit donner plus de connexion que simplex contactus. De plus, si un attouchement superficiel durable fait un attouchement insurmontable, il semble qu'un attouchement momentané feroit une connexion surmontable, mais plus forte selon que le corps qui rase l'autre en le touchant a moins de vistesse. Enfin quoyque j'aye parlé cy-dessus des fermetés ou consistences primitives, j'ay tousjours du penchant à croire qu'il n'y en a aucune primitive, et que le seul mouvement fait de la diversité dans la matiere, et par consequent la cohesion. Et tant que le contraire n'est pas encor demontré, il me semble qu'on doit eviter la supposition d'une telle nouvelle qualité inexplicable, laquelle estant accordée, on passeroit bientost à d'autres suppositions semblables, comme à la pesanteur d'Aristote, à l'attraction de Mr. Newton, à des sympathies ou antipathies et à mille autres attributs semblables.

Mr. le M. de l'Hospital m'a fait l'honneur de me communiquer sa belle invention de la rectification de la courbe logarithmique. Cela fait voir qu'il a fait des tres grands progres dans cette analyse superieure. Et j'espere de luy des lumieres considerables. Je voy le moyen de trouver tousjours la ligne ex data quantitate subtangentis, lorsque cette ligne est ordinaire. Mais je n'ay pas encore le loisir et la patience necessaire pour mettre en estat tout ce qu'il faut pour practiquer cette methode, et en attendant je suis reduit à me servir de

quantité d'adresses particulieres, à peu pres comme on fait pour resoudre des problemes semblables à ceux de Diophante.

Quant à la courbe de Mr. de Beaune, dont la soutangentielle seroit $(y^2 - xy) : a$, je l'ay voulu considerer presentement parcequ'elle est simple et je trouve qu'elle depend de la courbe des logarithmes en telle façon, que le logarithme estant y, x sera la difference entre le logarithme et la subnumerale. J'appelle icy la sousnumerale t, supposé que le nombre du logarithme est le quotient d'a divisé par a—t.

Il faut avouer, Monsieur, que vos decouvertes sur la quadrature de la galande de Mr. de Roberval sont extremement belles, j'entends la ligne dont l'equation est $x^3 + y^3 = nxy$. Comme cette ligne est d'une nature simple et que les coordonnées y sont homoeoptotes comme dans le cercle, j'ay aussi voulu tacher, si j'en pourray trouver la quadrature, et j'en ay enfin trouvé cette construction generale, que le triligne ABCDA est $\frac{2}{3} ny - \frac{1}{2} xx$, comme le quarré de l'abscisse x ou AB est au quarré de l'ordonnée y ou BC.



Je n'ay garde de m'attribuer par avance la connoissance de cette source nouvelle, que vous avés trouvée pour quantité de problemes des quadratures et des subtangentes. Il se pourroit que j'en sçusse quelque chose, mais je craindray plustost que non, car je voy qu'on peut employer quantité d'adresses particulieres, et je ne doute point qu'il n'y en ait beaucoup qui me sont inconnues, quoy qu'il y en ait aussi beaucoup que j'ay employées en temps et lieu. Je me sers quelques fois avec succes des series infinies.

Car toutes les fois qu'on donne un probleme tangentiel, je puis trouver la courbe demandée per seriem infinitam. Ce qui est au moins de grand usage pour la practique, car je suppose $y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$ etc. et par consequent j'ay aussi y^2, y^3 etc., item xy^2, xy^3, x^2y^3 etc., j'ay aussi dy. Car dy est égal à dx multiplié par $b + 2cx + 3dx^2 + 4ex^3$ etc., et ddy est égal à $1.\ 2c + 2.\ 3\,dx + 3.\ 4ex^2$ etc. multiplié par dx^2, et ainsi de suite. Ayant donc mon equation differentielle delivrée des fractions, racines et sommes, et ordonnée en sorte qu'elle soit égale à rien, et ayant expliqué les termes où entre y ou dy, en sorte qu'il ne reste d'autre indeterminée que x, ce qui fait evanounir dx, j'explique les arbitraires a, b, c etc. en sorte que tous les termes se detruisent, et par ce moyen je trouve leur valeur, et par consequent celle d'y. Cette methode est la plus generale qu'on puisse imaginer, car elle reussit pour tous ces problemes et encor pour ceux.

dont la difficulté est d'une transcendance du second, troisieme ou autre degré, c'est à dire qui va aux differentio-differentielles et au delà. En un mot est supplementum generale geometriae practicae pro transcendentibus, pour ne dire (ce qui paroist assez) qu'elle sert à donner les racines des equations, mais aussi elle sert souvent à trouver des valeurs finies. J'espere le plaisir d'apprendre un jour vostre maniere physico-mathematique pour la quadrature de l'hyperbole. Ces applications donnent souvent des nouvelles vues.

Voicy quelque chose de tout autre nature que je joins icy. J'ay eu en main quantité de pieces curieuses qui servent à l'histoire et aux affaires, dont je feray imprimer le receuil. Celui des plus anciennes, avant l'an 1500 paroistra ce printemps dans un volume in fol. Mais pour les modernes, particulierement de nostre siecle, je souhaitterois encor bien des choses.

Mr. vostre frere et quelques autres habiles hommes de vostre pays employés dans les affaires publiques, me pourroient favoriser en ce dessein à vostre recommendation en communiquant quelques pieces curieuses, qui serviroient à instruire le public sans faire prejudice à qui que ce soit.

C'est dommage que Mr. van Beuninguen n'est pas en estat d'y contribuer. Mais vous ne manqués pas d'habiles ministres, et souvent les heritiers de ceux qui ont esté employés autrefois ne sont pas chiches de telles choses.

Je vous demande pardon de la liberté que je prends de vous parler d'une chose de cette nature. C'est à condition que cela ne vous importune nullement et que vous ne fassiés que ce que vous pourrés commodement par le moyen de quelques amis, un mot de vostre part valant mieux, que les grandes sollicitations de beaucoup d'autres. Je suis avec zele etc.

XLVIII.

Huygens an Leibniz.

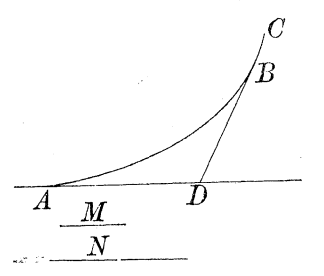
A la Haye, ce 17. Sept. 1693.

Je ne dois pas me donner l'honneur de vous escrire apres un si long silence, sans alleguer les raisons qui l'ont causé, des quelles la principale est que depuis la correspondance que j'ay avec Mr. le Marquis de l'Hospital, il m'a donné tant d'excercice en matiere de Geo-

metrie, que j'ay cru devoir eviter celuy qui me pouvoit venir d'un autre costé, quoyque sçachant bien qu'il n'y a pas moins à profiter pour moy de vos lettres. Il y a eu de plus cette raison, dont j'ay touché quelque chose dans mes precedentes, que je voiois que nostre dispute en Physique demandoit une nouvelle meditation pour respondre à vostre dernier raisonnement, que j'ay trouvé tres sensé et escrit avec soin. Il est vray que j'ay conçeu et annoté quelques repliques que j'ay à y faire, mais vous me permettrez s'il vous plait de les differer encore jusqu'à une autre lettre, parce que la matiere merite une plus grande attention que je n'y sçaurois donner presentement. Celle-cy n'est que pour vous envoier la Remarque que je fais à vostre exemple sur le Probleme de Mr. Bernoulli*), par laquelle vous connoitrez, Monsieur, que j'ay fait quelque progres dans les subtilitez geometriques et dans vostre excellent calcul differentiel, dont je goute de plus en plus l'utilité. J'avois resolu de n'en point chercher la solution, laquelle aussi bien Monsieur le M. de l'Hospital m'avoit offert de me communiquer, mais le probleme me paroissant beau et singulier, je n'ay pu empescher qu'il me roulast dans la teste, jusqu'à ce que je me sois satisfait. Et à cette heure que la peine est prise, afin qu'elle serve à me maintenir dans l'estime de Messieurs les Geometres, je vous prie tres humblement d'envoier au plustost la feuille cy-jointe aux sçavans autheurs des Acta de Leipzich, afin qu'ils aient la bonté de l'y inserer.

Lorsque je reçus vostre quadrature de la Feuille de Mr. des Cartes ou de Roberval, je crus, apres l'avoir examinée, que vous vous estiez mepris, parce qu'appellant vostre construction generale, elle n'estoit pas vraie, lorsque comme dans vostre figure, on prend BC pour y. Mais du depuis j'ay vu qu'elle quadroit à la position de BE pour y. Ce qui arrive de mesme dans deux manieres differentes, que Monsieur le M. de l'Hospital m'a envoiées pour cette quadrature, et dont j'ay, non sans quelque peine, demeslé la raison. Car je ne trouvois pas bon que le calcul differentiel produisist autre chose que ce qu'on luy demande. Vous aurez vu ce que j'ay inseré touchant cette matiere

*) Das hier erwähnte Problem wurde von Johann Bernoulli in den Act. E4udit. Lips. des Jahres 1693 zur Lösung vorgelegt. Dasselbe lautet: Es ist die Curve ABC zu finden, welche die Eigenschaft hat, daß eine jede Tangente BD zu dem Teil der Axe AD, von dem Anfangspunkt A bis zu dem Durchschnittspunkt D der Tangente, in dem gegebenen constanten Verhältnis M zu N steht. — Die Abhandlung, die Huygens mit diesem Briefe an Leibniz sandte, findet sich in Huyg. op. omn. Tom. I p. 516.



au Journal de Rotterdam, auquel temps je n'avois pas encore receu vostre solution; autrement j'en aurois fait mention, et ce n'auroit pas esté sans vous reprendre mal à propos, au lieu que je devois admirer ce que vous aviez fait. Je voudrois bien scavoir vostre jugement touchant ma Tractoria pour la quadrature de l'Hyperbole, que j'y avois jointe. Où il y a cela de remarquable, que suivant les loix de la Mechanique, supposé le plan horizontal, la description doit estre parfaite, et par consequent cette quadrature par son moien. Je vois que Mr. Bernoulli le professeur parle desia douteusement de la geometricité de cette generation de courbes; car celles de Monsieur son frere sont du mesme genre, quoyque non pas tout à fait si simples.

J'ay esté surpris de voir ce que celuy-cy a fait mettre dans les Acta du mois de May touchant la courbe de Mr. de Beaune, comme si c'estoit luy qui en eust donné la construction au Journal des Scavans de 1692. Sur quoy Monsieur le M. de l'Hospital m'a mandé certain detail de ce qui s'est passé, pour me faire connoitre le tort qu'on luy fait; et il semble avoir raison; mais pourtant je n'ose rien decider, inaudita parte altera.

La construction que vous m'envoiates pour cette courbe s'accordoit avec la seconde que me communiqua Mr. le Marquis, qui est plus courte que celle de Mr. Bernoulli du mois de May. J'admire de plus en plus la beauté de la geometrie dans ces nouveaux progres qu'on y fait tous les jours, où vous avez si grande part, Monsieur, quand ce ne seroit que par vostre merveilleux calcul. M'y voilà maintenant mediocrement versé, si non que je n'entens encore rien aux ddx, et je voudrois bien scavoir si vous avez rencontré de problemes considerables où il faille les emploier, afin que cela me donne envie de les etudier.

Je vois que vous avez opinion de pouvoir tousjours trouver les Courbes pour la soutangente donnée, lorsqu'elles sont geometriques. Cependant il y a un certain deguisement de ces soutangentes que je puis leur donner tousjours, où Monsieur le M. de l'Hospital se trouve empesché jusqu'icy, et vous connoissez sa capacité. Les exemples que je luy ay proposez sont la soutangente $\frac{aay + xyy}{ax - xy - ay}$, $\frac{x^3y}{3x^3 + 3aay - 2xyy}$, $\frac{2ayy}{2aa - yy - xx}$. Examinez en quelqu'un je vous prie.

Je ne dois pas oublier de vous dire un mot touchant vostre Codex Juris Gentium, dont vous m'avez voulu communiquer le projet. C'est là un grand ouvrage que vous entreprenez, Monsieur, qui sera utile à bien des gens, et je voudrois estre plus propre que je

ne suis à vous y servir en vous fournissant de la matiere. Mais le peu d'attachement et d'estime que j'ay per queste canzoni politiche, comme le P. Paolo les appelloit, me tient hors de commerce pour tout ce qui les regarde, et je souffre mesme avec peine qu'un esprit comme le vostre y emploie du temps. Vous devez croire que c'est un effect de la haute opinion que j'en ay, et du zele avec lequel je suis etc.

XLIX.

Leibniz an Huygens.

Hanover ce $\frac{1}{11}$ d'Octobre 1693.

Je suis ravi d'apprendre de temps en temps des nouvelles de vostre santé, qui nous doit estre chere. Car le monde se peut encore promettre beaucoup de vos decouvertes. Ainsi quand vos lettres ne contiendroient que cela, elles me seroient tousjours agreables. Mais il y a tousjours beaucoup à apprendre, et de plus vos obligeantes expressions, qui font connoistre avec combien de bonté vous voulés bien meas esse aliquid putare nugas, m'engagent à vous en faire des remercimens.

Je seray ravi de voir un jour vos repliques sur nostre question physique. Car comme vous approfondissés merveilleusement ces choses, et comme il semble que nous avons pris un nouveau tour pour éclaircir la question des Atomes et du Vuide, j'espere que nous la pourrons enfin terminer. Je souhaiterois de voir ce que vous avés remarqué sur mes animadversions anti-cartesien es, que vous n'aviés pas trouvées tout à fait mauvaises.

J'ay aussi receu quelques lettres de M. le M. de l'Hospital, où j'ay repondu le mieux que j'ay pû. Mais mes distractions ne m'ont point permis de luy donner toute la satisfaction que j'aurois bien desiré luy pouvoir donner. Je n'ay pas manqué d'envoyer à Messieurs les Collecteurs des Actes de Leipzig ce que vous leur avés destiné sur le probleme de Mr. Bernoulli; il est vray que c'a esté une semaine apres l'arrivée de vostre lettre, que j'ay trouvée à mon retour d'un petit voyage fait pour suspendre mes travaux durant quelques jours, car je me trouvois peu propre à l'application, apres une fievre tierce, qui n'a pas esté trop forte, mais qui m'a fait craindre une recheute. Comme

j'avois toutes les commodités dans le voyage et avec cela l'esprit libre, je m'en suis bien trouvé.

Tout ce que je m'estois proposé en produisant le nouveau calcul, que vous commencés, Monsieur, de trouver commode, a esté d'ouvrir un chemin, où des personnes plus penetrantes que moy pourroient trouver quelque chose d'importance. Et maintenant voti damnatus sum, depuis que vous trouvés bon de vous en servir, et c'est me faire beaucoup d'honneur que de le declarer publiquement. Je suis ravi de voir par vostre solution du probleme de Mr. Bernoulli, que vous avés remarqué ce qu'il y a de plus beau dans nostre calcul differentiel, aussitost que vous avés voulu prendre la peine d'y entrer; c'est justement ce que je marquois autres fois d'y estimer, sçavoir qu'il nous donne des solutions generales qui menent naturellement aux transcendentes, mais qui dans certains cas font que la transcendalité se perd et qu'on decouvre que la ligne est ordinaire.

Vous faites beaucoup d'honneur à la Geometrie lorsque vous trouvés les plus beaux usages des lignes qu'elle peut fournir. Et cette nouvelle courbe, que vous ne donnés que par enigme, en sera une belle preuve, aussi bien que vostre usage de la cycloide l'a esté autres fois. La construction des lignes, que vous appellés Tractorias, est d'importance. J'appelle ainsi plustost la construction que la ligne, car toute ligne peut estre construite de cette façon, prenant tousjours dans la tangente un point dont la distance du point de la courbe soit donnée, ce qui fera une nouvelle ligne, le long de laquelle un bout du fil estant mené decrira la courbe donnée. Vous estes tombé de vous même sur une idée, que j'avois deja, mais que j'ay apprise d'un autre. C'est de feu Mr. Perraut le Medicin, qui me proposa de trouver quelle ligne se produit en menant une extremité du fil le long d'une regle, pendant que l'autre extremité tire un poids par le plan horizontal, dans lequel la regle tombe. Je trouvay bientost que c'est la quadratrice de la figure des tangentes canoniques du cercle, et par consequent dependante de la quadrature de l'hyperbole. Je croyois d'avoir seul cette application de ce mouvement, mais dernierement j'ay jugé par ce que Mr. Bernoulli a dit sur le probleme de son frere, que vous deviés avoir publié la même chose dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans, car je n'ay pas encor eu cette Histoire des ouvrages de eette année par la negligence du libraire, à qui j'avois écrit pour m'envoyer et cela et autres choses. Or cela m'a convié à publier encor d'autres pensées que j'avois sur l'usage de ce mouvement. Et comme il paroist que vous avés medité sur les moyens de le rendre exact en pratique, vous trouverés qu'il y a peut estre pas un en Geometrie qui le merite

d'avantage. On pourroit se servir soit d'un poids soit d'une appression elastique, comme par exemple en mettant un ressort entre deux plans paralleles immobiles, qui le tiendroient pressé. Ce ressort couleroit entre ces deux plans, d'une maniere à ne pouvoir changer de situation à leur egard, et presseroit un stile contre l'un des plans. Le style seroit attaché au ressort, et le fil qui tireroit l'un et l'autre, quoyqu'il n'iroit peut-estre point jusqu'au stile, devroit pourtant y aboutir en cas de prolongation ou plustost à l'axe prolongué du stile à l'entour duquel le fil ou bien la regle équivalente au fil se tourneroit pendant le mouvement. Il seroit meme possible de faire que le ressort (un ou plusieurs) estant pressé entre les deux plans, le stile qui doit tracer, fut dehors, pour qu'on puisse voir ce qu'il trace. On pourroit encor penser à d'autres moyens; le tout consiste dans le soin d'empecher que l'impulsion du stile même ne se mele avec la traction. Mais vous pourrés mieux choisir que personne. Lorsque on demande si cette construction est geometrique, il faut convenir de la definition. Selon mon langage je dirois qu'elle l'est. Aussi crois je que la description de la cycloide, ou de vos lignes faites par l'evolution, est geometrique. Et je ne vois pas, pourquoy on restreint les lignes geometriques à celles dont l'equation est algebrique. Mais entre les constructions geometriques je prefere non seulement celles qui sont les plus simples, mais aussi celles qui servent à reduire le probleme à un autre probleme plus simple et contribuant à éclairer l'esprit. Par exemple je souhaiterois de reduire les quadratures ou les dimensions des aires aux dimensions des lignes courbes.

Mr. Bernoulli le jeune s'est plaint à son tour de M. le Marquis de l'Hospital, dans une lettre qu'il a voulu m'estre communiquée. Mais le sujet de leur contestation ne me paroist gueres considerable. Et la construction de la ligne de Mr. Beaune n'est pas des plus difficiles. Aussi crois-je qu'ils se seront raccommodés.

J'ay eu de la peine à me resoudre à chercher une des courbes dont vous me donnés les soutangentes, car ordinairement on s'engage en des calculs un peu longs, et maintenant je n'ose toucher à ceux qui sont tant soit peu prolixes. Neantmoins pour vous satisfaire, puisque vous m'aviés donné le choix, j'ay choisi la plus simple, qui est $2ayy : (2aa - yy - xx)$, et j'ay trouvé que vous aviés raison de l'appeler un déguisement, car c'est le cercle, à qui cette soutangente peut appartenir et son equation est $2ax - xx = yy$. Mais afin que vous voyiés que j'ay approfondi ce probleme, et que ce n'est pas par quelque hazard que j'ay trouvé ce cercle, je vous diray que la courbe n'est ordinaire que dans ce seul cas, mais transcendante dans une infinité

d'autres. Je vous en donneray premierement l'exemple le plus simple. Soit $x = \int \frac{adv}{a - v}$ (1) ou $dx = adv : (a - v)$ (2); il est manifeste que la lettre x signifie une grandeur qui est comme le logarithme, posé qu'a — v soit le nombre, car cela depend de la quadrature de l'Hyperbole ou de la description de la ligne logarithmique. Cela posé, je dis que la ligne, dont l'equation est $yy = aa + 2ax - xx - av$ (3), satisfait au probleme, et il est manifeste que cette ligne se peut construire supposita Hyperbolae quadratura. Voicy comment je prouve maintenant le succès par le calcul differentiel. Apres avoir differentié l'equation (3), je trouve $2ydy = 2adx - 2xdx - adv$ (4); dont ostant dv par l'equation (2) il y aura enfin $2ydy = 2adx - 2xdx - adx + vdx$ (5). Et par cette derniere jointe à l'equation (3) ostant v, il y aura enfin $yydx = aadx + 2adx - xxdx - 2aydy + 2aadx - 2axdx - aadx$, ou bien, apres les destructions dûes: $yydx + xxdx + 2aydy = 2aadx$ (6) ce qu'il falloit faire. Car il est manifeste que $dx : dy = 2ay : (2aa - yy - xx)$, c'est à dire que la soustangente est $2ayy : (2aa - yy - xx)$. La même chose reussit dans une infinité d'autres lignes, prenant l'arbitraire n. et disant: $yy = na + 2ax - xx - nv$. Mais n estant egal à rien, il en provient le cercle. Qant aux ddx, j'en ay eu souvent besoin. Elles sont aux dx, comme les conatus de la pesanteur ou les solicitations centrifuges sont à la vistesse. Mr. Bernoulli marque dans les Actes de Leipzig de l'année passée p. 202 de les avoir employées pour les lignes des voiles. Et je les avois deja employées pour le mouvement des astres dans les mêmes Actes. Au reste comme vous avés de la peine à souffrir, Monsieur, que je pense souvent à l'Histoire, au Droit et à la Politique, il y a bien des gens qui me font la guerre icy et ailleurs de ce que je me mêle des matieres où vous regnés. En verité je m'accommoderois d'avantage de ce qui est de vostre goust, si j'en avois absolument le choix. Et j'estime plus les verités éternelles qui éclairent l'esprit que les faits ou les verités temporelles. Il faut cependant avouer, qu'encor en matiere de Droit, de Morale et de Politique on pourroit faire des decouvertes et des raisonnemens exacts. Et souvent on y manque en practique, parce qu'on a constume de les traitter superficiellement. Je seray bien aise de voir un jour vôtre jugement sur la preface de mon code diplomatique. Je vous avés communiqué mon project, parce que j'ay cru que peut-estre quelqu'un de vos amis en Hollande me pourroit fournir quelque piece curieuse, dont il y en auroit sans doute qui seront honorables à vostre Republique.

Je n'employe que des pieces choisies. C'est pourquoy mon dessein n'est pas des plus vastes. Mais pour finir par nostre Geometrie, j'ose

dire qu'on pousseroit peut-estre bien avant la recherche de ces choses, si on avoit à la main quelque jeune homme d'esperance, qui en s'instruisant nous pouvoit soulager dans le calcul. En attendant je fais ce que je puis pour meriter l'honneur que vous me faites de croire que je suis avec tout le zele et toute la consideration possible etc.

L.

Leibniz an Huygens.

Hannover ce $\frac{1}{11}$ Décembre 1693.

Vous aurés receu la lettre assez ample que je me suis donné l'honneur de vous écrire, il y a plusieurs semaines. Cependant vous aurés receu aussi les Actes de Leipzig, tant le mois où mon effection des quadratures par le mouvement est inserée*), que celuy où vostre solution du probleme de Mr. Bernoulli se trouve avec mon apostille**), dont j'espere que vous ne serés pas mal satisfait. Je souhaitte surtout que vous nous expliquiés bientost vostre ligne enigmatique.

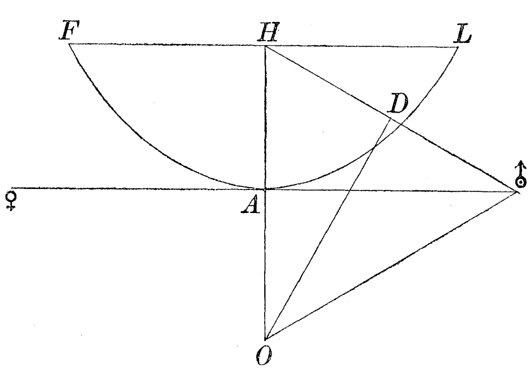
Quand je vous écrivois ma derniere, je n'avois pas encor vu l'Histoire des ouvrages des Sçavans de cette année Il est vray que j'avois fait prier Mr. Desbordes de me les envoyer, avec d'autres livres, lorsque le libraire, qui a imprimé le premier tome de mon Code diplomatique, luy en envoyoit quelques exemplaires. Mais M. Desbordes n'a pas encor satisfait au libraire, et envoya quelques unes des choses que j'avois demandées à Mr. de la Bergerie, Ministre françois de la religion reformée, lequel ne sçachant pas, que c'estoit à mon occasion, crût que c'estoit pour luy et les garda. Ce ne fut que depuis peu et par hazard que je le sçûs. Car c'estoit par l'entremise de Mr. de la Bergerie que mon libraire avoit envoyé les exemplaires à Mr. Desbordes, et comme je m'estois enfin informé du retardement, il se trouva que Mr. de la Bergerie avoit receu quelques unes des pieces que j'avois souhaittées et entre autres l'Histoire des ouvrages des Sçavans.

---

*) Supplementum Geometriae dimensoriae, seu generalissima omnium Tetragonismorum effectio per Motum: similiterque multiplex constructio lineae ex data Tangentium conditione.

**) Ad Problema in Actis Eruditorum an. 1693 mense Majo propositum.

En ayant lu le mois de Fevrier, j'ay vu que je vous devois des remercimens de l'honnesteté, avec laquelle vous avés bien voulu faire une mention avantageuse de mon calcul. Je dirai seulement un mot de la difference que vous mettés, Monsieur, entre ma construction des logarithmes par la chainette, et entre celle que vous en donnés par la traction, en disant que par la traction le parametre de la courbe, qui est sa tangente universelle, est donné, au lieu que je n'avois point enseigné, selon vous, commment on pourroit trouver le parametre de la chainette. Cela est venu sans doute de ce que vous n'aviés pas alors le loisir de jetter les yeux sur la figure, car vous auriés pu juger d'abord que la description de la courbe par le moyen d'une chainette en donne aussi fort aisement le parametre. Car la ligne FAL estant formée par le moyen de la chainette donnée ♀♂ suspendue par les deux bouts Fet L, posés dans une meme horisontale, dont le milieu soit H, et le sommet de la chainette A; joignons H♂, et de son milieu D menons à angles droits une droite DO, qui rencontrera HA prolongée en O, et AO sera le parametre qu'on demande. Car j'avois deja remarqué dans les Actes de Leipzig, en donnant l'explication de la chainette, que lorsqu'on fait A♂ egale à la courbe AL, il se trouve aussi qu' OH et O♂ sont egales. Ainsi puisque dans cette description de la courbe, sa longeur, sçavoir celle de la chainette, qui sert à la description, est donnée aussi, il est aisé d'en trouver encore le parametre. Je ne laisse pas de preferer la construction de la traction, non pas tant à cause des logarithmes, qu'à cause de consequences, qui sont d'une grande étendue, puisqu'elle sert à construire toutes les quadratures par un mouvement exact et reglé, dont je souhaitte d'apprendre vostre jugement.



Je souhaitte aussi que vous fassiés part au public de vos nouvelles lumieres sur l'attraction electrique, et que nous puissions jouir enfin de vostre Dioptrique, où j'espere que nous trouverons bien des choses considerables touchant les meteores emphatiques. J'ay tousjours eu du penchant à croire que les queues des cometes sont de ce nombre, quoyque les explications qu'on en a données jusqu'icy, ne soyent point satisfaisantes, et que je n'aye pas non plus de quoy me satisfaire là dessus. Enfin je souhaitte en mon particulier vos reflexions sur quel-

ques considerations physiques d'une de mes precedentes, que vous m'aviés fait esperer dans vostre derniere.

On me mande de Paris qu'on y a donné au public, à l'imprimerie du Louvre et des MS. de la Bibliotheque du Roy, quelques anciens Mathematiciens grecs. Entre autres Athenaeum de Machinis, des extraits poliorcetiques d'Apollodore, et quelques ouvrages de Philon et de Biton de la construction des machines de guerre, et les Cestes de Julius Africanus. On adjoute qu'un nommé Mr. Boivin a eu soin de cette edition, estant sçavant dans le Grec, mais que Mr. de la Hire en a esté chargé comme Mathematicien. Mais on dit en même temps que l'ouvrage aurait esté plus exemt de fautes, si un seul, qui eut eu l'habilité de ces deux sçavans hommes, eut eu la direction de cette edition.

Quand Monsieur le M. de l'Hospital m'ecrivit il y a quelques mois, il me demauda si je n'avois pas reglé la ligne isochrone, à l'egard de l'eloignement uniforme d'un point fixe que j'avois proposé. Je me souvenois d'avoir vu le moyen d'y arriver, mais je n'avois pas alors le loisir d'y penser, comme je temoignais dans ma reponse à Mr. le Marquis. Depuis ayant retrouvé un vieux brouillon, j'ay vu que je l'avois reduit à une quadrature, qu'il faudra examiner avec plus d'attention, pour voir s'il n'y a pas là dessus quelque chose de reduisible à la commune Geometrie. Je ne sçay si le silence que Mr. le Marquis a gardé depuis, ne marque point que ma lettre ne l'a point satisfait. Comme en effect cela ne sçaurait manquer d'arriver à l'egard de celles d'un homme qui se laisse distraire autant que moy. Cependant je n'en estime pas moins Monsieur le M. de l'Hospital, et je trouve que vous avés eu raison, Monsieur, de luy rendre justice dans vostre lettre à Mr. de Beauval. Je m'etonne qu'il est presque le seul en France qui entre dans la Geometrie profonde. Connoissés vous Mr. Rolle? il semble que c'est luy qui a fait proposer un probleme geometrique avec un prix, mais à condition qu'on le doit resoudre par des voyes différentes de celles que Mr. Rolle a publiées. Je n'ay jamais vu ces voyes et je ne m'amuseray pas à ce probleme, qui est, trouver la plus simple courbe, propre à construire l'equation donnée avec une courbe donnée. Mr. Bernoulli le cadet a donné sa methode là dessus. On a temoigné qu'on n'en estoit point content. Je crois que Mr. Bernoulli y repliquera bientost. Ce n'est pas une chose si difficile à une personne aussi versée, qu'il l'est, dans cette analyse. Pour moy j'avois cru que cette matiere estait comme epuisée, et qu'il ne s'agissoit que d'en donner les canons pour epargner aux autres la peine du calcul. Je suis avec zele etc.

LI.

Leibniz an Huygens.

A Hannover ce 26 d'Avril 1694.

Je me consoleray de toutes les raisons de vostre silence, pourvu que ces deux n'en soyent point, une indisposition de vostre part, ou quelque refroidissement à mon egard, que je m'imagine de ne pouvoir meriter, vous honorant comme je fais, et dont je donne des temoignages publics.

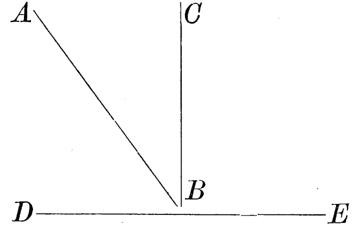
J'attendois vostre sentiment sur deux choses principalement. 1°. Sur mes reflexions physiques touchant le vuide, les atomes et quelques autres choses de cette nature. 2°. Sur quelques points de Geometrie, comme sur ma solution generale de toutes les quadratures per constructionem tractoriam, que vons aurés remarquée dans les Actes de Leipzig, et sur la solution d'un probleme de soustangentielle, que vous m'aviés proposé, et que je vous avois donnée dans ma lettre. Je vous supplie donc de me faire sçavoir vostre sentiment sur ces choses là, d'autant que vous me fîtes esperer vos reflexions sur les miennes qui se rapportent à la physique.

Voicy un discours de la refraction d'un sçavant professeur à Witenberg, qui s'est attaché à expliquer dans ses theses vostre doctrine publiée dans le livre de la lumiere.

Il me cite aussi comme reformateur de l'hypothese de Mr. Descartes, et j'avois dit quelque chose en effect dans les Actes de Leipzig d'autre fois qui s'y rapporte, mais vostre hypothese me paroist bien plus plausible. J'ay appris de Mr. Fatio, par un de ses amis, que Mr. Newton et luy sont plus portés encor à croire que la lumiere consiste en des corps qui viennent actuellement du soleil jusqu'à nous, et que c'est par là qu'ils expliquent la differente refrangibilité des rayons et les couleurs, comme s'il y avoit des corps primitifs, qui gardoient tousjours leur couleur et qui venoient materiellement du soleil jusqu'à nous. La chose n'est pas impossible, cependant il me paroist difficile que, par le seul moyen de ces petites fleches, que le soleil decoche selon eux, on puisse rendre raison des loix de la refraction. Outre que Mr. Mariotte pretendoit faire voir par des experiences, mises dans son essay des couleurs, qu'il n'y a point de ces rayons colorés primitifs, et que la couleur d'un rayon est changeable; c'est ce que je n'ay pas encor assez examiné. Mais comme vous l'avez fait, je vous supplie de m'en faire sçavoir vostre sentiment.

On me fait sçavoir encor que Mr. Fatio pretend d'avoir donné une raison mecanique de la pesanteur, differente de la force centrifuge. En effect je m'etois imaginé déja autres fois, qu'il y pourroit avoir une espece d'explosion ou recessus, rejection d'une matiere tres menue, et par consequent plus solide, ou, si vous voulés, plus dense, qui obligeroit par consequent celle qui est plus rare et plus grossiere de s'approcher. Et pour entretenir ce mouvement je m'imaginois que la matiere menue estant eloignée du centre entroit dans nourriture des corps grossiers, et que la matiere grossiere arrivée vers le centre de l'attraction estoit brisée en echange, et par consequent rendue menue, à peu pres comme le feu se nourrit par l'attraction de la matiere et particulierement de l'air. Mais cependant vostre explication par la force centrifuge me paroissant aussi tres plausible, je me trouve comme suspendu entre ces deux sentimens. La proportion reciproque des quarrés des distances vient naturellement et aisement de l'emission rectilineaire, à l'imitation des rayons de lumiere; j'avois pourtant pensé encor à quelque explication par la force centrifuge. Et peut-estre que la nature, qui est abondante dans ses moyens, pour obtenir ses fins, joint ces deux causes ensemble, comme j'ay quelque penchant de croire à l'egard du mouvement des planetes, ou peut-estre la trajection propre et la circulation d'un ether deferant sont conciliables, et conciliés effectivement, tout s'accommodant dans la nature. Le consentement des planetes d'un meme systeme et l'analogie du magnetisme rendent tres probable qu'il y a quelque chose de plus que la simple trajection de Mr. Newton. On me mande aussi que vous aviés fait une objection tres forte à Mr. Fatio touchant son explication de la pesanteur, mais qu'il avoit trouvé moyen de la resoudre et de vous faire convenir qu'elle estoit resolue. Et que Mr. Fatio ne met que tres peu de matiere dans tout l'univers avec du vuide entremelé incomparablement plus grand. Mais que ce peu de matiere estant extremement repandu, comme les filets et comme l'or en feuilles, il suffit pour remplir ou plustost pour embarasser l'espace. Je conviens qu'on se peut imaginer cela quand on peut admettre le vuide et les atomes. Mais je croy que cela n'est pas assez convenable à l'ordre de la nature, et bien des raisons me dissuadent d'admettre le vuide et les atomes, c'est-à-dire des corps infrangibles, comme je crois pourtant que sont encor ceux de Mr. Fatio. Cependant comme Mr. Fatio a bien de la penetration, j'attends de luy des belles choses, quand il viendra au detail, et ayant profité des vos lumieres et de celles de Mr. Newton, il ne manquera pas de donner des productions qui s'en ressentiront. Je voudrois estre aussi heureux que luy et à portée pour consulter ces deux oracles.

Voicy encor une chose dont je vous supplie. Il y a une Academie illustre, où des princes, comtes et jeunes gentilhommes sont elevés. Le professeur des mathematiques y est mort. On m'a mandé qu'on en desiroit un autre, mais qui, outre la theorie, eut encor la practique et le talent d'enseigner sur tout dans l'architecture militaire et dans les mecaniques, et s'il estoit encor bon dans l'architecture civile, tant mieux. Les gages sont asseurement tres raisonnables et le poste fort avantageux, d'autant que c'est dans le lieu de la residence d'un prince, qui est luy mesme extremement curieux et intelligent, et qui honnore les gens de merite. Je vous supplie, Monsieur, d'y songer et de me faire sçavoir si vous en connoissés quelqu'un qui y seroit propre. J'avois songé à un sçavant homme qui demeure comme je crois en Hollande, mais dont je ne sçaurois maintenant trouver le nom, qui a publié il y a quelques années un petit livre in 4⁰, où il commence d'expliquer les principes de la fortification d'une maniere tres ingenieuse et par un calcul singulier, en faisant l'estime de la quantité de



la defense, commençant par cette consideration, où il y a pourtant quelque chose à dire que la ligne AB, quoique plus grande que BC, ne sçauroit donner plus de feu que BC, si les tirades doivent estre paralleles à DE. On m'avoit dit que l'autheur de ce petit livre estoit Hollandais ou du voisinage, mais qu'il avoit esté ingenieur de Brandenbourg, et depuis avoit eu une entreprise en Hollande pour faire imprimer des figures sur de la soye à la façon des tailles douces. Je ne le sçaurois mieux designer. Mais je ne me borne pas à luy. On ne peut aussi rien encor promettre de certain, car le Prince du lieu qui est intelligent aura fait encor demander ailleurs et choisira. Mais je pourray contribuer à son choix. Je suis avec zele etc.

LII.

Huygens an Leibniz.

A la Haie ce 29. May 1694.

Je vous prie de croire, que ce n'est aucun refroidissement de mon costé qui ait causé ce long silence Car au contraire j'ay tout sujet d'estre tres satisfait de vous, et vous suis trop obligé de la maniere

que vous avez parlé de moy encore dans les Actes du mois d'Octobre de la derniere année. J'ay attendu longtemps pour voir cette Apostille dont vous m'aviez parlé dans une de vos lettres, et ne l'ay point eue que vers la fin du mois de Mars, par la faute de nos libraires, ou plustost de ceux de Leipsich, que l'on dit qu'ils tardent tousjours à envoier les livres de peur qu'en ce pais on n'en fasse une autre edition à leur prejudice. Cependant cela m'incommode et parfois me fait tort; c'est pourquoy je vous supplieray icy, puisque je suis sur cette matiere, d'avoir la bonté, quand vous verrez paroitre quelque chose dans ces Nouvelles qui me regarde, ou quelque curiosité de Mathematique, de me le faire copier, quand il ne sera pas long. Cette attente m'a donc fait differer longtemps de vous escrire. Apres cela sont venu des etudes nouvelles un petit traité en matiere Philosophique, et une application assez longue pour faire executer et mettre en perfection mon invention de l'horloge, dont j'ay cy devant fait mention; et puis des indispositions de plus d'une maniere, mais dont la derniere me deplait le plus, estant une intermission et battement irregulier du pouls, que je n'avois jamais senti auparavant, et que je ne crois pouvoir mieux guerir qu'en me donnant de longues vacances. Pour ce qui est de cette horloge, je vous diray en passant qu'elle reussit à souhait, et qu'elle sera de grande utilité, parce qu'estant aussi juste qu'une à pendule de 3 pieds, avec laquelle elle s'accorde 5 ou 6 jours sans differer d'une seconde, elle pourra souffrir le mouvement du vaisseau sans peine et aura encore d'autres avantages considerables.

Je trouve tant de matiere dans vos 3 dernieres lettres, que vous me pardonnerez si je ne repons à tout que succinctement.

Ce que vous dites pour justifier l'usage de la Chainette et qu'on peut trouver son parametre est vray, je n'avois pas assuré aussi que cela estoit impossible, et j'en scavois une maniere sans etendre et mesurer la longueur de la ehaine, que je voulois voir si vous l'aviez rencontrée de mesme. Mais je ne m'estois point avisé de la vostre qui est bonne.

Lorsque je reçus vostre lettre où est la solution de ce que je vous avois proposé, de trouver la courbe pour la soutangente $\frac{2ayy}{2aa-yy-xx}$, je l'examinay et construisis la courbe et je vis que vous aviez resolu fort elegamment ce probleme par une voie peu commune, que je serois bien aise d'apprendre un jour. Ce sont des coups de maitre que vous vous estes reservé, Monsieur, quoyque par modestie vous disiez, à l'egard de l'usage que moy et d'autres faisons de vostre nouveau calcul, que jam voti damnatus es. Vous pourriez faire un excellent Traité

des usages divers de ce calcul, et je vous y exhorte comme à un ouvrage tres beau et utile, et qui doit plustost venir de vous que de tout autre Mr. Wallis m'a envoié sa nouvelle edition latine de son grand ouvrage de Algebra, augmenté de quelque chose de nouveau des séries de Mr. Newton, où il y a des equations differentielles qui ressemblent tout à fait aux vostres, hormis les characteres. Au reste ce calcul des series me paroit bien fatiguant, et j'ay esté bien aise de ce que Mr. le M. de l'Hospital m'a mandé, qu'il scait faire sans l'ayde des series tout ce qu'on fait avec elles.

Touchant l'application que vous avez faite des Tractoriae à la quadrature des Courbes, j'avoue que je n'y puis trouver cet avantage que vous promettez, car ces descriptions sont tres embarrassées, et incapables d'aucune exactitude. A peine peut on tracer avec quelque justesse cette premiere et plus simple que j'ay proposée, celles de Mr. Bernoulli estant desia beaucoup plus difficiles, desquelles j'ay envoié la maniere, par des rouleaux et des cordes, à Mr. le Marquis, comme aussi l'equation que j'avois trouvée par ces lignes et la construction universelle du probleme. Il est vray, comme vous dites, que toute courbe est Tractoriä, mais je n'en vois point qu'il vaille la peine de considerer que celles dont je viens de parler. Je ne scay si vous aurez vu ma refutation de la Theorie de la manoeuvre des vaisseaux, dont l'autheur est Mr. Renaud, Ingenieur-General de la Marine en France. Je voudrois que vous eussiez aussi vu sa response imprimée, mais sans elle vous pouvez fort bien juger par ma remarque seule, si j'ay eu raison de le reprendre, et je serois bien aise d'avoir ce jugement pour alleguer dans la replique que je fais y faire. Mr. de l'Hospital m'a mandé que ce que j'avois objecté estoit sans replique.

Je vous rends graces de la These du professeur de Wittenberg, et je suis bien aise de voir ma theorie approuvée, quoyqu'il me fasse un peu tort de dire que mon explication de la refraction est dans le fond la mesme que celle de Hoocke et de Pardies, et n'en differe qu'en la maniere d'expliquer. Car tout consiste dans cette maniere, et ces autheurs auroient esté bien empeschez à rendre raison des bizarreries du cristal d'Islande, outre que Hooke a fait des bevues honteuses, que j'aurois bien pu relever si j'eusse voulu.

Quant à l'hypothese pour la lumiere que Mr. Newton et Fatio croient possible, je remarque que si la lumiere consiste en des corpuscules, qui vienent actuellement du soleil jusque à nous, et de mesme de toutes les etoiles et objets que nous voions, il faut de necessité que cette matiere soit extremement rare, et que le vuide occupe incomparablement plus de place qu'elle, afin qu'elle ne soit pas empeschée

dans son cours en venant vers l'oeil d'une infinité de costez differents. Mais estant si rare, c'est-à-dire composée des particules si fort separées, comment est ce qu'on peut expliquer l'extrême vitesse de la lumiere qui est prouvée par la demonstration de Mr. Romer? Mr. Fatio me respondoit qu'il concevoit ce passage si rapide des corpuscules depuis le Soleil ou Jupiter jusqu'à nous estre possible, à quoy je ne sçaurois consentir. Et outre cela je ne vois pas, non plus que vous, que dans leur hypothese ils puissent expliquer la cause de la refraction, et encore moins celle du cristal d'Islande, qui me sert d'experimentum crucis, comme l'appelle Verulamius. Les experiences qu'a fait Mr. Newton de la differente refraction des raions colorez sont belles et curieuses, mais il n'explique pas ce que c'est que la couleur dans ces raions, et c'est en quoy je ne me suis pas pleinement satisfait non plus jusqu'à present.

La raison mechanique de la Pesanteur que s'estoit imaginé Mr. Fatio me paroissoit encore plus chimerique que celle de la lumiere. Elle estoit presque la mesme que celle de Mr. Varignon, que vous aurez pu voir, puisqu'elle est imprimée. Ils veulent que ce qui pousse les corps pesants vers la terre, c'est que la matiere etherée aiant du mouvement de tous costez, elle en doit avoir plus qui tende vers la terre, que qui vient de son costé, à cause de la masse de ce globe, et qu'ainsi les corps sont poussez vers sa surface.

J'objectois à Mr. Fatio que par ce moien il se devoit continuellement accumuler de la matiere etherée aupres de la terre, à quoy il respondoit qu'il concevoit si peu de corps ou de solidité dans cette matiere, qu'en s'accumulant aussi longtemps qu'on vouloit, elle ne faisoit point de masse considerable. Vous semble-t-il qu'il y a là de la raison ou de la vraisemblance? Il y auroit plus d'apparence dans vostre pensée de l'immutation des corpuscules, et dans la comparaison de l'attraction de l'air par le feu, si ce n'estoit pas en supposant la pesanteur qu'on explique cette attraction*).

Je ne toucheray pas encore cette fois nostre question du vuide et des atomes, n'aiant esté desia que trop long, contre mon intention. Je vous diray seulement, que dans vos notes sur des Cartes j'ay remarqué que vous croiez absonum esse nullum dari motum realem, sed tantum relativum. Ce que pourtant je tiens pour tres constant, sans m'arrester au raisonnement et expériences de Mr. Newton dans ses Principes de Philosophie, que je scay estre dans l'erreur, et

---

*) Die Sammlung Uylenbrock's enthält nach diesen Worten folgendes, das in dem vor mir liegenden Briefe von Huygens fehlt: Car l'air plus dense et pesant est poussé à la place de l'air estendu par la chaleur, qui en devient plus leger et pour cela monte en haut.

j'ay envie de voir s'il ne se retractera point dans la nouvelle édition de ce livre, que doit procurer David Gregorius. Des Cartes n'a pas assez entendu cette matiere.

J'ay parlé au Sr. Teiller, touchant ce que vous m'aviez mandé, mais il semble qu'il aspire à estre professeur de Mathematiques à Utrecht, et je le vois avec cela encore occupé dans sa manufacture de toiles imprimées. Je doute aussi s'il seroit bien vostre fait, n'aiant rien vu de ce qu'il scait en cette science que sa maniere de Fortification, où il y a une application de l'Algebre bien mince, à ce que je me souviens. Je m'informeray à Leyde de Mr. de Volder, s'il ne connoit personne pour l'employ que vous marquez. Je suis etc.

LIII.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 8 Juin 1694.

J'espere que ma lettre du 29 du mois dernier vous aura esté rendue. J'ay parlé du depuis à Mr. de Volder pour m'informer touchant ce que je vous avois mandé, qui m'a nommé encore quelques personnes qu'on pourroit proposer pour l'employ dans l'Academie inconnue, mais m'assuré en mesme temps qu'il n'en connoissoit pas de plus capable que le Sr. Teiller dont vous m'aviez escrit. Il m'en a dit aussi touchant ses bonnes qualitez des choses que je ne scavois pas, et entre autres qu'il avoit voiagé en Italie, en Sicile, et jusqu'au Cairo, et qu'il avoit dessiné en tous ces pais une infinité d'antiquitez et de belles vues. Au reste que sa solicitation ou celle de ses amis pour la profession de Mathematique à Utrecht n'avoit point reussi, seulement parce qu'il avoit esté disciple de Mr. Cranen, car ces partialitez du Cartesianisme et du Vostianisme s'etendent jusques mesme les professions, où il n'est pas question de Theologie. J'ay aussi vu apres cela Mr. Teiler et toute sa boutique de la Manufacture des toiles imprimées, estant logé à une demie lieue d'icy dans une maison de campagne qui est grande et belle. Il me dit que d'autres personnes luy avoient encore parlé touchant cet employ en Allemagne, que c'estoit chez Mr. le Prince de Wolfenbuttel, et me paroissoit assez bien disposé maintenant à l'accepter. Mr. de Volder m'a dit qu'il a esté cy-devant professeur à Nimwegen. Je n'ay pas voulu manquer, Monsieur, à vous faire scavoir

toutes ces choses, puisque vous m'avez fait l'honneur de demander mon avis, et que je n'estois pas assez informé, en vous ecrivant ma precedente lettre.

J'oubliay de vous marquer dans la mesme deux vilaines fautes qu'on a faites dans le Journal de Leipsich en donnant ce que j'ay escrit de Problemate Bernouliano, scavoir abstinere statuerim au lieu de statuissem. Et omnia erui posse au lieu de eam. Vous me ferez grand plaisir d'en avertir par occasion l'Editeur de ces Journaux, à qui je ne scay si je dois imputer cet Erratum ou à vostre copiste, car je suis bien assuré d'avoir escrit autrement.

Je ne scay si vous aurez sceu l'accident arrivé au bon Mr. Newton, scavoir qu'il a eu une atteinte de phrenesie, qui a duré 18 mois, et dont on dit que ses amis à force de remedes et de le tenir enfermé, l'ont à peu pres gueri maintenant. Voila un grand malheur, et le plus facheux qui puisse arriver à un homme. J'avois encore d'autres choses à vous mander, mais je suis pressé d'envoier cette lettre, c'est pourquoy je finis en vous assurant que je suis etc.

LIV.

Leibniz an Huygens.

Hanover ce $\frac{12}{22}$ Juin 1694.

J'ay esté bien aise de recevoir l'honneur de vostre lettre, apres un assés long silence, dont pourtant je n'ay garde de me plaindre, scachant bien comme vostre temps est pretieux, et d'ailleurs je seray tousjours des plus ardens à vous exhorter de ménager vostre santé, d'autant plus que j'apprends par vostre lettre même, qu'elle a esté un peu chancelante. Plût à Dieu que nos études servissent à nous faire avancer considerablement dans la medecine. Mais jusqu'icy cette science est presqu'entierement empirique. Il est vray que l'empirie même seroit de grand usage, si on s'attachoit à bien observer, et même à bien employer tant d'observations déja faites, mais comme la medecine est devenue un mestier, ceux qui en font profession ne la font que par maniere d'acquit, et autant qu'il faut pour sauver les apparences, sçachant bien que peu de gens sont capables de juger de ce qu'ils font. Je voudrois que quelque ordre religieux, tel que celuy des Capucins par exemple, se fût attaché à la medecine par un principe de charité.

Un tel ordre bien reglé la pourroit porter bien loin. Mais laissons là ces souhaits inutiles et venons aux points de vostre lettre.

Je souhaitte que le public apprenne bientost des particularités de vostre horloge, qui ne sçaurait manquer d'estre de grande consequence. Pour ce qui est du traité d'une matiere philosophique que vous avés fait, je serois bien aise d'apprendre un jour ce que ce pourra estre. Vous estes trop reservé jusqu'icy, ne voulant donner au public que des demonstrations, au lieu que des personnes de vostre force ne doivent pas luy envier jusqu'à leur conjectures. C'est pourquoy, quand vous vous ouvririés sur toutes sortes de matieres encor que philosophiques et problematiques, vous ne feriés que bien. Vostre exhortation me confirme dans le dessin que j'ay de donner quelque traité qui explique les fondemens et les usages du calcul des sommes et des differences et quelques matieres connexes. J'y adjouteray par maniere d'appendice les belles pensées et découvertes de quelques géometres, qui ont bien voulu s'en servir, s'ils veulent avoir la bonté de me les envoyer. J'espere que Mr. le M. de l'Hospital voudra bien nous faire cette faveur, si vous jugés à propos de le luy proposer. Mrs. Bernoulli freres en pourront faire autant. Si je trouve quelque chose dans les productions de Mr. Newton inserées dans l'Algebra de Mr. Wallis, qui nous donne moyen d'avancer, j'en profiteray en luy rendant justice. Mais oserois-je bien vous supplier vous même de me favoriser de ce que vous jugerés à propos, comme par exemple de vostre analyse du probleme de Mr. Bernoulli donnée par cette maniere de calcul?

J'expliqueray entre autres ces equations exponentiellement transcendentes, dont je vous ay parlé autres fois, lorsque dans l'equation de la courbe l'inconnue entre dans l'exponant. Par exemple si l'equation de la courbe estoit $x^z = y$, ou pour garder la loy des homogenes $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{z}{a}} = \frac{y}{a}$ (1), et si z estoit une grandeur explicable par le moyen des indeterminées x et y et de la determinée a, cette equation pourra estre delivrée de son exponentialité et reduite au calcul des differences; car, en vertu de nostre equation, supposant le logarithme de la grandeur a estre 0, ou $\log.a = 0$ (2), il y aura $\frac{z}{a}$ multipliée par $\log.x = \log.y$, ou bien $z \log. x = a \log. y$ (3). Mais $\log. x = \int \frac{dx}{x}$ (4) et $\log. y = \int \frac{dy}{y}$ (5), donc $z \int \frac{dx}{x} = a \int \frac{dy}{y}$ (6) et differentiando $\frac{zdx}{x} + dz \int \frac{dx}{x} = \frac{ady}{y}$ (7).

Et c'est par là qu'on peut avoir $\frac{dy}{dx}$, c'est-à-dire la raison de l'ordonnée à la soustangente, en expliquant dz par la valeur de z, que je suppose estre connue. Car si par exemple z estoit $= \frac{xy}{a}$ (8), en sorte que l'equation (1) signifieroit $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{xy}{aa}} = \frac{y}{a}$ (9), dz seroit $= \frac{xdy + ydx}{a}$ (10), et de l'equation (7) proviendroit $\frac{ydx}{a} + xdy \times \int \frac{dx}{\frac{x}{a}} + ydx \int \frac{dx}{\frac{x}{a}} = \frac{ady}{y}$ (11), et par cette équation on aura dy : dx, c'est-à-dire on construira la tangente de la courbe en employant x et y et le logarithme d'x. Mais pour delivrer icy l'equation ab omni vinculo summatorio, il faudroit descendre aux differentio-differentielles. Souvent il suffit de venir aux equations differentielles du premier degré, et alors ces equations differentielles (qui sont des problemes de la converse des tangentes) se peuvent construire par les logarithmes, et se peuvent exprimer par des equations exponentiellement transcendentes, comme je fis un jour dans un exemple que vous m'aviés proposé, où pourtant à cause d'un mesentendu nous n'avions pas visé à une même ligne. Je souhaitterois de pouvoir tousjours reduire les autres transcendentes aux exponentielles; car cette maniere d'exprimer me paroist la plus parfaite et bien meilleure que celle qui se fait par les differences et par les series infinies, puisqu'elle n'employe que des grandeurs communes, quoyqu'elle les employe extraordinairement. Cependant j'estime fort les series, car elles expriment veritablement ce qu'on cherche, et donnent le moyen de le construire aussi prochainement qu'on desire, et achevent par consequent la geometrie ou analyse quant à la practique. Et ce qui est le plus important, quand les autres voyes se trouvent courtes, les series viennent au secours. Car il peut arriver qu'un probleme descende aux differentielles du 2e, 3e ou 4e degré, c'est-à-dire qu'il y aie non seulement x et y et dx, dy, mais encor ddx, ddy, d^3x, d^3y; alors par lesseries la courbe ou la construction se trouve quelque fois aussi aisement, que si ce n'estoit qu'une equation ordinaire, selon la maniere generale que j'ay donnée dans les Actes, et que je n'ay encor vue chez personne. Car la methode que Mrs. Mercator et Newton avoient publiée, en estoit toute differente. Ainsi je ne sçaurois demeurer d'accord de ce que M. le M. de l'Hospital vous a ecrit, qu'on peut faire sans les series tout ce qui se peut faire par elles. Quant à ma construction generale des quadratures par la

traction, il me suffit pour la science qu'elle est exacte en theorie, quand elle ne seroit pas propre à estre executée en practique. La pluspart des constructions les plus geometriques, quand elles sont composées, sont de cette nature. Comme par exemple, les regles du Mesolabe organique de Mr. Descartes ne sçauroient operer exactement, lorsqu'elles doivent estre un peu multipliées. Et quoyque Mr. Descartes ait proposé de construire les equations du 5e ou 6e degré par un mouvement de la parabole materielle, je crois qu'on auroit bien de la peine à faire une telle construction avec exactitude, pour ne rien dire des degrés plus hauts. Cependant la construction generale de toutes les quadratures est infiniment plus difficile, et neantmoins je crois que les difficultés pourroient estre assés diminuées en practique en se servant d'une bonne appression. Car non obstant tous les embarras apparens, l'appression faisant son devoir, la ligne de la traction ne sçauroit manquer de toucher la courbe. Mr. Bernoulli le cadet ayant consideré attentivement ma description en a reconnu et admiré la verité, quoyqu'il croye aussi qu'il seroit difficile de la bien executer. Je voudrois avoir des moyens semblables bien generaux pour construire les autres equations differentielles, ou les courbes *ex tangentium natura*.

Je n'ay point vû encor vostre refutation de la theorie de la manoeuvre des vaisseaux. Apparemment elle sera dans l'Histoire des ouvrages des Sçavans, que nos libraires n'ont pas encor receus par leur negligence ordinaire. Il faudra que je mette ordre pour me les faire tousjours envoyer par la poste. Lorsque je considerois autres fois cette theorie, elle me paroissoit un peu superficielle, et je n'achevay pas de la parcourir. Mais j'y penseray un de ces jours. Je me souviens maintenant qu'il negligeoit entre autres choses le centre de gravité du vaisseau, lequel ne devroit pas estre negligé, ce me semble, sur tout pour la derive, puisque les impressions du choc des corps opérent diversement selon la situation de ce centre. Il y avoit bien d'autres choses qui m'arrestoient. Le meilleur y est ce qu'il y a de la practique, et je voudrois avoir vu le livre de la manoeuvre de Mr. de Tourville qu'il cite.

Asseurement Mr. Hook et le P. Pardies n'avoient garde d'arriver à l'explication des loix de la refraction, par les pensées qu'ils avoient sur les ondulations. Tout consiste dans la maniere dont vous vous estes avisé de considerer chaque point du rayon comme rayonnant, et de composer une onde generale de toutes ces ondes auxiliaires. Si Mr. Knorr m'avoit consulté, je luy aurois dit mon sentiment là dessus. Le P. Ango qui ne scavoit de cela que ce qu'il avoit pû trouver dans les papiers du P. Pardies, apres avoir bien sué inutilement pour rendre

raison de la loy des sinus, a enfin fabriqué un pur paralogisme habillé en demonstration pour se tirer d'affaire. Ne pouvant pas rendre raison de la refraction ordinaire, comment auraient ils osé penser à expliquer celle du cristal d'Islande? Il me semble qu'il y avoit encor quelques phenomenes de ce cristal, qui vous arrestoient et je voudrois sçavoir si vous avés fait depuis des progres là dessus. N'avés vous pas trouvé que ce cristal fournit quelques phenomenes extraordinaires à l'egard des couleurs?

Je ne sçay si je vous ay mandé, que Mr. Fatio m'a communiqué quelque chose des pensées qu'il a pour expliquer mecaniquement les sentimens de Mr. Newton. Il est vray que ce n'est qu'avec reserve et en enigme. Il croy que la matiere ne remplit qu'une partie tres petite de l'espace; il croit les corps percés à jour comme les squelettes, pour donner aisement passage. Il croit aussi que si l'espace estoit assés rempli d'une matiere fluide muë en tout sens, cette matiere empecheroit extremement le mouvement des corps. Il parle de l'objection que vous luy aviés faite, qui est que la matiere se devroit epaissir autour de la terre, et que cela l'a arresté, mais qu'en fin cette objection s'est evanouie quand on l'a examinée avec exactitude, c'est de quoy (dit-il) Mons. Huygens est à present persuadé. Il se passe en cecy (adjoute-t-il) quelque chose d'admirable, qu'il faut avoir remarqué, avant qu'on puisse voir que l'objection n'a rien de solide.

Il y a de l'apparence qu'il se fait une circulation ou reciprocation dans la nature, en sorte qu'une matiere subtile mais dense ou serrée, s'eloignant des corps qui attirent les autres, force la matiere grossiere de s'y approcher, mais cette matiere grossiere, quand elle y est arrivée, est broyée et rendue subtile, pour estre renvoyée derechef à la circumference, où estant dispersée de nouveau, elle sert d'aliment à d'autres corps grossiers. Il y peut avoir plusieurs raisons de l'attraction, comme la force centrifuge, née d'un mouvement circulaire, que vous avés employée, item le mouvement droit des corpuscules en tout sens que j'ay vû déja employé autres fois d'une maniere semblable par un auteur, qui tachoit par là de rendre raison de la fermeté des corps et des phenomenes qu'on attribue communement à la pesanteur de l'air, mais que vous aviés pourtant observés dans le vuide. Et comme il semble que la masse de la terre doit faire en sorte que plus de corpuscules y tendent, qu'ils n'en viennent, on pourra dire que cela poussera les corps vers la terre selon le sentiment de quelques uns que vous marqués. On peut encor adjouter l'explosion, comme seroit celle d'une infinité d'arquebuses à vent. Car ne pourroit-on point dire que les corps, qui font la lumiere, la pesanteur et le magnetisme, sont encor grossiers en

comparaison de ceux qui feroient leur propre ressort, et qu'ainsi ils enferment une matiere comprimée; mais quand ils arrivent au soleil, ou vers le centre des autres corps, qui font émission (dont l'interieur pourroit repondre au soleil), le grand mouvement qui s'y exerce, les brisant et les défaisant, delivreroit la matiere, qui y estoit comprimée. Il semble effectivement que c'est de cette matiere que le feu agit. Peut estre aussi que plusieurs moyens se trouvent joints ensemble, pour causer la pesanteur, puisque la nature fait en sorte que tout s'accorde le plus qu'il est possible. Quoyqu'il en soit, il nous sera tousjours difficile de bien determiner ces choses. Si quelqu'un y peut reussir de nostre temps, vous le serés. Il est vray que toute matiere etherée qui tend vers la terre ou vers quelqu'autre corps sans percer, n'en sçauroit revenir. Car celle qui ne perce point, rejallissant rencontrera d'autre matiere qui y arrive apres elle. Ainsi ces matieres se doivent brouiller ensemble et s'amasser à l'entour du corps, mais peutestre que la masse qui s'en forme est dissipée derechef à peu pres comme les taches du soleil.

Quant à la difference entre le mouvement absolu et relatif je croy que si le mouvement, ou plustost la force mouvante des corps est quelque chose de reel, comme il semble qu'on doit reconnoistre, il faudra bien qu'elle ait un subjectum. Car a et b allant l'un contre l'autre, j'avoue que tous les phenomenes arriveront tout de meme, quelque soit celuy dans lequel on posera le mouvement ou le repos; et quand il y auroit 1000 corps, je demeure d'accord que les phenomenes ne nous sçauroient fournir (ny même aux anges) une raison infallible pour determiner le sujet du mouvement ou de son degré; et que chacun pourroit estre conçû à part comme estant en repos, et c'est aussi tout ce que je crois que vous demandés. Mais vous ne nierés pas (je crois) que veritablement chacun a un certain degré de mouvement, ou, si vous voulés, de la force, non-obstant l'equivalence des hypotheses. Il est vray que j'en tire cette consequence, qu'il y a dans la nature quelque autre chose que ce que la Geometrie y peut determiner. Et parmy plusieurs raisons dont je me sers pour prouver qu'outre l'etendue et ses variations, qui sont des choses purement geometriques, il faut reconnoistre quelque chose de superieur, qui est la force; celle-cy n'est pas des moindres. Mr. Newton reconnoist l'equivalence des hypotheses en cas des mouvemens rectilineaires; mais à l'égard des circulaires, il croit que l'effort, que font les corps circulans de s'eloigner du centre ou de l'axe de la circulation, fait connoistre leur mouvement absolu. Mais j'ay des raisons qui me font croire que rien ne rompt la loy generale de l'equivalence. Il me semble cependant

que vous même, Monsieur, estiés autres fois du sentiment de Mr. Newton à l'egard du mouvement circulaire.

Je crois que Mr. Teiler sera bientost à Wolfenbuttel, Je vous suis bien obligé de la bonté que vous avés eue de vous en informer.

J'auray soin d'écrire qu'on marque les errata dans les Actes de Leipzig, dont je ne sçaurois concevoir la raison. Il faut que vostre écriture ait esté un peu obscure en ces endroits.

Je suis bien aise d'apprendre la guerison de Mr. Newton aussitost que la maladie, qui estoit sans doute des plus facheuses. C'est à des gens comme vous, Monsieur, et luy, que je souhaitte une longue vie et beaucoup de santé, preferablement à d'autres, dont la perte ne seroit gueres considerable en parlant comparativement.

Si je remarqueray quelque chose dans les Actes de Leipzig, où vous puissiés avoir interest, je vous en donneray part. Je n'ay pas encor celles du mois de May. Au reste je suis avec zele etc.

P. S. Je ne sçay quand je verray l'ouvrage que Mr. Wallis vient de publier. Voudriés vous bien me faire la grace, Monsieur, d'en faire copier des endroits où Mr. Newton donne des nouvelles decouvertes. Je ne demande pas proprement sa maniere de trouver des series, mais s'il donne des moyens pour la converse des tangentes ou pour quelque chose de semblable. Car en m'ecrivant autres fois il couvrit sa maniere sous des lettres transposées. Il marquoit d'avoir deux façons, l'une plus generale, l'autre plus elegante. Je ne scay s'il en aura parlé.

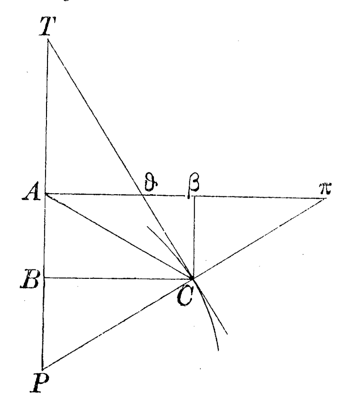
LV.

Leibniz an Huygens.

Hanover ce 29. Juin V. S. 1694.

Vous aurés receu ma derniere. Cependant suivant vostre ordre je vous mande que dans les Actes de Leipzig du mois de May on a inseré la solution du probleme de Mr. Bernoulli, donnée par Mr. le M. de l'Hospital, qui avoit esté inserée dans les memoires de l'Academie Royale des Sciences 1693, 30 Juin. On y adjoute l'objection d'un anonyme inserée dans le Journal des Sçavans, qui pretend que cette solution n'est point satisfaisante, en ayant fait l'essay dans le cas de la proportion double. J'ay appris que Mr. le Marquis a

repondu depuis, et fait voir, que si l'autheur de l'objection avoit pris la peine de pousser son calcul à bout, il en auroit trouvé le succès. Je ne doute point que la solution de Mr. le Marquis ne vous soit connue, autrement que je l'aurois copiée. Pour moy je trouve qu'on peut tousjours donner la solution quand la raison est donnée entre deux fonctions quelconques. J'appelle fonctions l'abscisse AB ou Aβ, l'ordonnée BC ou βC, la corde AC, tangente CT ou Cϑ, perpendiculaire CP ou Cπ, sousperpendiculaire BP ou $\beta\pi$, soustangente BT ou $\beta\vartheta$, retranchées, resectas, par la tangente ou par la perpendiculaire AT ou Aϑ, AP ou Aπ, corresectas TP ou $\vartheta\pi$, et quantité d'autres. Le probleme se peut tousjours reduire aux quadratures, et souvent par là à la Geometrie ordinaire. Meme s'il y avoit une equation où n'entreroient d'autres droites que ces fonctions, quelque nombre des fonctions pourroit entrer à la foy, la courbe ne laissera d'estre construisible.



Dans les memes Actes Mr. Jean Bernoulli fait voir par le calcul que si un fil parfaitement flexible estoit poussé partout par une puissance egale et perpendiculaire à sa courbure, ce fil seroit circulaire. Puis il a fait un calcul sur la force necessaire pour enfler les muscles et dit que la tabelle qu'il en a tirée est bién différente de celle de Borelli. Il me semble qu'il considere seulement les commencemens de l'action de l'elasticité du fluide qui pousse le muscle, mais il faut une acceleration pour produire un effect notable. Quoyqu'il en soit, ce qu'il dit paroist tousjours fort ingenieux, et il est bon qu'ou tasche d'appliquer les mathematiques à ces choses. Il cite souvent je ne scay quelle proposition fondamentale de Mr. Varignon. J'ay parcouru autres fois le livre de Mr. Varignon, mais il ne me paroissoit point dire des choses fort nouvelles. Il est vray qu'elles ont paru telles à bien des gens.

Au reste je me rapporte à mes precedentes et vous supplie de me faire part de vos pensées sur les points de ces lettres où vous n'avés pas encor touché. Je suis tousjours persuadé de plus en plus qu'il n'y a point d'atomes ny vuide, et que la moindre particelle de la matiere contient veritablement un monde infini de creatures differentes. Je vous ay supplié un jour de me faire part de ce que Mr. Newton a vous communiqué sur les couleurs, si cela vous est permis. Je prends la liberté de vous en faire ressouvenir. Je suis dans la

curiosité d'apprendre s'il y aura quelque chose de considerable dans ce que Mr. Wallis vient de donner de Mr. Newton. Je suis avec zele etc.

LVI.

Leibniz an Huygens.

Hanover ce $\frac{17}{27}$ Juillet 1694.

Voicy un fragment des Actes de Leipzig du mois de Juin, que vous ne serés peut estre point faché de voir de bonne heure. Et j'en souhaitte vostre jugement, aussi bien que sur les points de mes lettres precedentes. Comme je suis comme invité de dire quelque chose sur ce discours de Mr. le Professor Jaques Bernoulli, je ne scaurois me dispenser d'envoyer quelque chose au plustost à Leipzig. Je croy qu'il est tousjours vray que les tensions sont proportionelles aux forces, mais qu'il ne faut pas tousjours prendre les tensions dans le changement de la longitude du corps, puisqu'elles dependent plustost des changemens du contenu solide. Ainsi la figure d'une lame elastique ne me paroissant pas assez arrestée, j'avois esté d'autant moins porté à l'examiner. Les theoremes sur les cercles osculateurs (dont les centres sont dans vos courbes generatrices par evolution) que Mr. le Professeur Bernoulli considere comme des clefs, ne me paroissent point difficiles à trouver, et sans aucune inspection de la figure, par le seul calcul des differences on en trouve, et des plus generaux, non seulement pour la grandeur du rayon de ce cercle, mais encor pour la position du centre, car lorsqu'on veut chercher la generatrice evolutive d'une ligne qui n'est donnée que differentiellement, le calcul même ordonne qu'on passe aux differentio-differentielles, et quand on n'auroit pas ces théoremes, on les employe virtuellement et sans y penser. Je remarque un peu d'emulation entre les deux freres, mais elle est louable, et leur sert d'eguillon. Je n'entreray point dans l'examen des elastiques et de leurs proprietés. Car je n'ose gueres m'enfoncer dans des nouveaux traveaux qui demandent trop d'attachement, surtout quand la chose a esté faite; car de pouvoir dire et nos hoc poteramus, ce n'est pas une raison suffisante pour moy, qui dois menager mon temps. Je n'ay pu m'empescher de sourire un peu, quand il dit, que pour me faire honneur, il veut appeller les courbes ou grandeurs ordinaires, algebraiques. Car je ne voy pas que l'honneur m'en revienne. Je voudrois

plustost qu'il n'appellât pas les autres mecaniques. Il dit p. 271, que la maniere de resoudre la Catenaire par des points (qui ne demandent qu'une seule grandeur constante transcendente, laquelle donnée on n'a plus besoin des quadratures) est veritablement la plus parfaite qu'on puisse employer pour les transcendentes, mais que le mal est qu'elle n'est pas universelle, et n'a lieu qu'à l'egard de celles qui dependent de la quadrature de l'hyperbole, et ne pouvant estre employée à son avis pour ce qui depend de la quadrature du cercle ny pour des quadratures plus composées. Mais je ne suis pas en cela de son sentiment, car la meme maniere reussit aussi pour la quadratnre du cercle, se servant de la section des angles, comme pour l'hyperbole on se sert de la section des raisons. Et il y a une infinité d'autres constructions semblables qui pourront servir pour d'autres lignes transcendentes. Il donne aussi p. 271 et 272 un indice qui doit servir pour connoistre si une quadrature se peut reduire à celle de l'hyperbole, mais cet indice n'est point universel, et on peut donner une infinité d'instances où la reduction reussit, sans que cet indice ait lieu.

Il prend les series de pag. 274 pour nouvelles, mais Mr. Newton et moy, nous les avons employées il y a long temps.

Enfin je viens à la construction que Mr. Bernoulli donne de mon probleme de la ligne isochrone paracentrique, comme je l'appelle, où le mobile pesant s'approche ou s'eloigne egalement d'un même point. Cela m'oblige de reprendre mes vieilles meditations là dessus, que j'avois presque oubliées ou perdues. Il a trouvé cette solution par un heureux hazard. Je donneray cependant ma methode qui paroistra peut estre plus analytique et moins dependante d'un secours exterieur. Je l'avois reduite autres fois à la quadrature d'une figure, dont l'abscisse estant x, l'ordonnée est $\frac{a^3}{\sqrt{(a^3z - az^3)}}$. Mais Mr. Bernoulli ayant taché avec raison de construire la courbe demandée, non pas tant par une quadrature que par extension ou evolution d'une autre courbe, je l'ay aussi voulu faire à son exemple. La difference qu'il y a entre nous là dessus est, qu'il se sert de la rectification d'une courbe qui est elle même deja transcendente, scavoir de son elastique, et qu'ainsi sa construction est transcendente du second degré, au lieu que je me sers seulement de la rectification d'une courbe ordinaire, dont je donne la construction par la geometrie ordinaire.

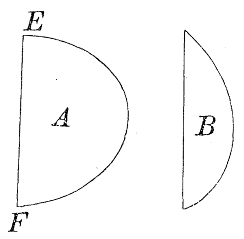
Au reste je me rapporte à mes precedentes, sur lesquelles je vous supplie de repasser, et de me donner les lumieres que je souhaitte à l'egard de plusieurs points qui ont esté touchés entre nous. En vous souhaittant une parfaite santé je suis avec zele etc.

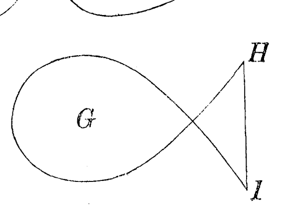
LVII.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 24 Aoust 1694.

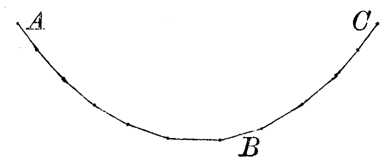
J'avois receu les Acta de Leipzich jusqu'au mois de Juin, il y avoit 8 jours, lorsqu'arriva l'Extrait que vous m'avez fait la faveur de m'envoier, dont je ne laisse pas de vous estre obligé. Il semble que mesme chez vous ces nouvelles ne se debitent que bien tard. Je trouve le travail triennal*) de Mr. Bernoulli bien considerable, pourvu que tout ce qu'il avance soit vray; aussi s'en glorifie-t-il beaucoup. Pour le principe du ressort, je crois qu'il l'a bien emploié, et qu'il est vray que les raisons qui mesurent la courbure sont en raison contraire des forces qui font plier le ressort, quoyque, selon moy, ce ne soit pas seulement la surface exterieure qui s'etend mais que l'interieure en mesme temps s'accourcit, l'acier ou matiere pliante se condensant d un costé et comme rentrant en elle mesme, pendant que de l'autre elle se dilate. Si ce principe n'estoit pas le veritable et l'unique, mais que la ligne AFC fust une courbe dependante d'infinies experiences, je trouverois toute sa recherche fort vague et peu digne qu'on s'y amusast. Et mesme à cette heure tout ce qu'il a trouvé ne me paroit d'aucune utilité, mais seulement des exercitations fort belles et subtiles, lorsqu'on ne trouve pas de quoy employer les mathematiques avec plus de fruit. C'est une etrange supposition de prendre les quadratures de toute courbe comme estant données, et quand la construction d'un probleme aboutist à cela, hormis que ce ne soit la quadrature de l'hyperbole et du cercle, j'aurois cru n'avoir rien fait, parceque mesme mechaniquement on ne scauroit rien effectuer. Il vaut un peu mieux de supposer qu'on peut mesurer toute ligne courbe, comme je vois aussi que c'est vostre sentiment. Je trouve au reste que Mr. Bernoulli n'a determiné que la courbure de l'arc A, où les tangentes des extremités E, F sont paralleles, lesquelles je considere conjointes par la corde EF. Il resteroit à donner la figure du veritable arc B; item de C dont les extremités vont en s'approchant; de D, où elles s'assemblent, et de G, où elles passent au delà et sont retenues par baston HI. Ce qu'il dit de la voile pressée par une liqueur, qui luy donneroit la mesme courbure





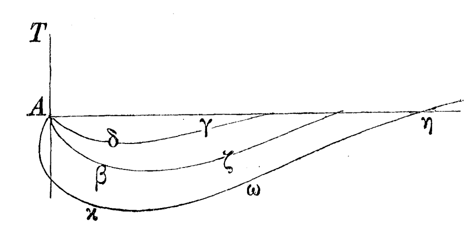
*) Vielleicht triental zu lesen.

que du ressort C, est encore bien subtilement trouvé, s'il est veritable. Mais jusqu'à ce que je voie les demonstrations, je me defie un peu des theoremes de Mr. Bernoulli, depuis que j'ay vu qu'il se trompe et se retracte quelques fois, comme en ce qu'il avoit assuré cy devant que la voile tendue par le vent se plioit en arc de cercle, et, en quelques cas, moitié en cercle et moitié en courbe de la chaine. Je doute encore s'il est bien vray que la voiliere soit la mesme que la Funicularia, comme les deux freres le croient maintenant, parceque je puis demontrer

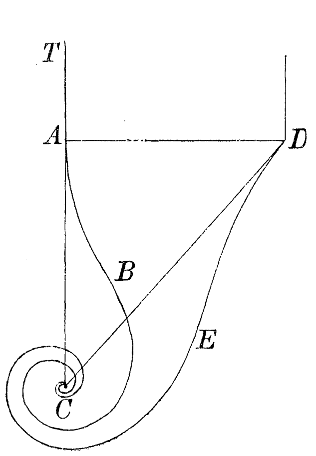


qu'une voile composée d'un nombre fini de pieces egales et droites, comme ABC, sera courbée autrement par le vent et autrement par son poids. Il faudroit donc que dans le nombre infini cette difference vint à rien.

Il semble que vous teniez pour veritable sa construction de vostre paracentrique, apres en avoir comme je crois examiné sa demonstration, ce que je n'ay pas encore fait. C'est une rencontre assez etrange d'y avoir pu emploier sa courbe du ressort. Mais vostre construction sera assurement bien meilleure de beaucoup, si vous n'avez besoin que de mesurer une courbe geometrique, ou de laquelle du moins vous scachiez trouver les points. Lorsqu'il dit qu'il n'y a qu'une seule courbe comme



A$\kappa\omega\eta$ qui fasse eloigner egalement le mobile du point A apres la chute par TA, je vois clairement qu'il se trompe, et qu'il y a une infinité de telles courbes, comme sont A$\beta\zeta$, A$\delta\gamma$, jusques à la droite Aη inclusivement, quoyque je n'aie pas encore cherché comment il les faut decrire. Je vois aussi qu'il reste d'autres courbes à determiner en cette matiere, comme pour approcher egalement du point C en venant du point directement au dessus A, ou de D, qui est plus haut, et à costé, auxquels cas les courbes ABC, DEC feront des tours infinis autour du point C. Voila encore bien d'exercice pour vostre calcul differentiel ou double differentiel, duquel je souhaite fort de voir une fois un exemple.



Vous ferez bien de reprendre Mr. Bernoulli sur l'indice des courbes constructibles par la quadrature de l'hyperbole. Ce seroit

vouloir l'impossible de les vouloir reduire toutes à cela. Et pour moy j'estime qu'on a tout aussi bien reussi quand on aboutit à la mesure des arcs de cercle.

Je ne scay si vous aurez encore vu ma remarque sur la manoeuvre des vaisseaux de Mr. Renaud. Mais quand vous ne l'auriez point vue, vous ne laisserez pas de pouvoir juger de nostre different par ma replique, que je vous envoie. Ce ne sont pas de petites bevues ou omissions, qui se rencontrent dans cet ouvrage, imprimé de l'expres commandement du Roy (comme il y a au titre) et examiné par Mrs. de l'Academie des Sciences: mais une erreur capitale qui renverse le tout. Je seray bien aise d'avoir vostre approbation, et n'en scaurois douter, puisque j'ay celle de Mr. le M. de l'Hospital. J'adjoute dans ce mesme paquet, puisquo vous le souhaitez, l'extrait du livre de Wallis, que l'on m'avoit envoié d'Angleterre, devant que j'eusse receu le livre mesme.

Vos considerations sur l'avancement de la medecine sont fort bonnes et ce que vous proposez ne paroit pas tout à fait impracticable.

En entreprenant le Traité de vostre nouveau calcul, je vous recommande de le rendre autant clair qu'il est possible et qu'il puisse se rapporter principalement à ce qui pourroit avoir usage dans la geometrie, où je doute si ces equations exponentiellement transcendantes pourront avoir lieu. J'y contribueray volontiers l'exemple du probleme de Mr. Bernoulli le medecin, quoyque ce que j'en ay dans mes brouillons, que je viens de revoir, soit si abregé et denué d'eclaircissement, que j'auray de la peine à y rentrer.

Je crois vous avoir communiqué cy-devant la solution que pretendoit donner Mr. Fatio à ce que j'objectois contre sa theorie de la pesanteur, et que je n'en estois nullement satisfait. C'est pourquoy je m'etonne qu'il vous ait mandé le contraire. Je ne vois pas qu'on ait encore apporté de difficulté considerable contre la cause que j'ay expliquée dans mon discours, et l'on me fera plaisir de me les proposer, lors qu'on en rencontrera. Pour ce qui est du mouvement absolu et relatif, j'ay admiré vostre memoire de ce que vous vous estes souvenu, qu'autrefois j'estois du sentiment de Mr. Newton, en ce qui regarde le mouvement circulaire. Ce qui est vray, et il n'y a que 2 ou 3 ans que j'ay trouvé celuy qui est plus veritable, duquel il semble que vous n'estes pas éloigné non plus maintenant, si non en ce que vous voulez, que lorsque plusieurs corps ont entre eux du mouvement relatif, ils aient chacun un certain degré de mouvement ou de force veritable, en quoy je ne suis point de vostre avis.

Je vois qu'on a mis bien amplement, pour la seconde fois, dans les Acta la solution de Mr. le M. de l'Hospital du probleme de

Bernoulli, qui estant assez embarassée, il me semble que la miene merite pour le moins autant d'y paroitre. C'est pourquoi je vous l'envoie icy, et vous prie de la faire tenir à ces Messieurs de Leipsich. Ils pourront corriger à cette occasion, s'ils ne l'ont pas desia fait, les 2 fautes que je vous marquay dans ma precedente. En leur envoiant vos considerations sur le discours de Mr. Bernoulli, vous me ferez plaisir de faire aussi mention des mienes, autant que vous les trouverez bien fondées. Je suis parfaitement etc.

Apres avoir copié ma construction du probleme, je me repens presque d'en avoir pris la peine. Je le laisse à vostre jugement, si vous croiez, qu'il vaut la peine qu'elle paroisse dans les Acta.

LVIII.

Leibniz an Huygens.

Hanover ce $\frac{4}{14}$ de Septembre 1694.

Je commence par vous remercier de la communication de l'extrait de l'ouvrage de Mr. Wallis touchant Mr. Newton. Je voy que son calcul s'accorde avec le mien, mais je pense que la consideration des differences et des sommes est plus propre à éclaircir l'esprit, ayant encor lieu dans les series ordinaires des nombres et repondant en quelque façon aux puissances et aux racines. Il me semble que Mr. Wallis parle assez froidement de Mr. Newton et comme s'il estoit aisé de tirer ces methodes des leçons de Mr. Barrow. Quand les choses sont faites, il est aisé de dire: et nos hoc poteramus. Les choses composées ne sçauroient estre si bien demelées par l'esprit humain sans aide de caracteres. Je suis bien aise aussi de voir enfin le dechifrement des enigmes contenus dans la lettre de Mr. Newton à feu Mr. Oldenbourg. Mais je suis faché de n'y point trouver les nouvelles lumieres que je me promettois pour l'inverse des tangentes. Car ce n'est qu'une methode d'exprimer la valeur de l'ordonnée de la courbe demandée per seriem infinitam, dont je sçavois le fonds dès ce temps là, comme je témoignay alors à Mr. Oldenbourg. Et j'en ay donné le moyen depuis quelque temps dans les Actes de Leipzig, d'une maniere assez aisée et tres universelle*).

*) In der Abhandlung: Constructio propria Problematis de Curva isochrona paracentrica, ubi et generaliora quaedam de natura et calculo differentiali osculorum,

Il est raisonnable de se servir de cette hypothese, que les courbures sont comme les forces qui les produisent, pour avoir quelque chose d'arresté. Mais si cela a assez lieu en effect, c'est ce que je ne voy pas encor bien clairement. Et on se peut figurer des constitutions des corps, où il n'en iroit pas ainsi. C'est ce qui m'a rebuté de cette recherche. Voyant que ma santé commence à chancelier, j'ay bien de la peine à me resoudre à des meditations qui ne servent qu'à exercer l'esprit. Je n'ay pas meme examiné la construction de ma paracentrique isochrone donnée par Mr. Bernoulli, m'estant contenté de donner mon analyse, qui est assez naturelle, avec ma construction qui n'a besoin que de la rectification d'une courbe ordinaire.

Je suis de vostre sentiment, Monsieur, en ce que vous croyés que le probleme n'est pas encor bien resolu, lorsqu'on ne fait que le reduire à quelque quadrature. Ainsi la courbe dont la rectification est employée par Mr. Bernoulli à la construction de la paracentrique n'estant pas assés construite encor elle même, est peu propre à la fin qu'il se propose. Mais je ne l'en reprends point. Est aliquid prodire tenus Cependant je suis d'accord avec Mr. Bernoulli, que c'est tousjours beaucoup, quand un probleme est reduit aux quadratures. C'est à mon avis un grand et necessaire acheminement à sa veritable solution. Il y a plusieurs degrés dans les solutions. La plus parfaite sans doute est celle qui reduit les transcendentes à l'aire du cercle ou de l'hyperbole. Au défaut de cela je voudrois pouvoir décrire la ligne transcendente per puncta, à l'imitation de la logarithmique, qui se décrit par les moyennes proportionelles. Et quand cela manque encor, je me contente d'obtenir mon but per rectficationes linearum. Mais il y a des cas si difficiles, où tout ce que j'y puis jusqu'icy est de donner seriem infinitam. Je croy même d'en voir les moyens, dont j'ay aussi des echantillons, mais je ne suis pas en estat d'y travailler.

Si Mr. Bernoulli a bien determiné l'arc du ressort, où les tangentes des extremités sont paralleles, il me semble qu'il aura aussi les cas, où ces tangentes sont convergentes au dessus ou au dessous de la corde, car il n'aura qu'à continuer la courbe ou en prendre la partie, puisque la partie du ressort bandé est encor un ressort bandé, en quelque endroit qu'on l'attache ou qu'on en prenne les extremités. Je suis aussi en doute sur ce qu'il dit de la voile, et la chose merite

---

et de constructione linearum transcendentium, una maxime geometrica, altera mechanica quidem sed generalissima. Accessit modus reddendi inventiones Transcendentium Linearum universales, ut quemvis casum comprehendant, et transeant per punctum datum (Act. Erudit. Lips. an. 1694).

d'estre approfondie. Je crois que ma construction comprend toutes les isochrones paracentriques, tant celles de Mr. Bernoulli que celles que vous avés si profondement considerées, mais je ne suis pas en estat ny en humeur de venir au detail.

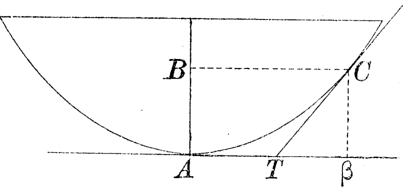
Pour ce qui est du calcul des differentio-differentielles, sur lequel vous disirés d'estre eclairci, je suis bien aise de pouvoir satisfaire à vos ordres en quelque chose. Ce n'est que trop souvent que je voy qu'on est obligé d'y venir: mêmes la recherche de la chainette y mene naturellement, mais c'est par une faveur speciale qu'on y peut s'en delivrer. Mes series infinies ont cela d'avantageux, qu'elles resolvent les differentio-differentielles, de quelque degré qu'elles soyent, aussi aisement que les differences premieres. Comme les equations differentielles du premier degré sont pour l'inverse des tangentes, lorsqu'on determine la courbe ex data proprietate tangentium, je trouve que celles des autres degrés peuvent venir, lorsque la courbe est determinée per proprietatem curvedinum seu linearum osculantium, ou bien par le melange des sommes parmy les differences. Car pour se delivrer des sommes, on descend à des differences plus profondes, tout comme pour se delivrer des racines on monte à des puissances plus hautes. Voicy un exemple aisé pour les differences secondes pro linea sinuum, c'est à dire lorsque les arcs de cercle étendus en ligne droite estant les ordonnées, les sinus sont les abscisses. Soit l'arc y, le sinus de complement soit x, le rayon a, l'arc y sera égal à $a\int\frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ (1) et differentiando $dy=\frac{adx}{\sqrt{(a^2-x^2)}}$ (2) ou bien $\sqrt{(a^2-x^2)}\,dy=adx$ (3). Pour abreger faisons $\sqrt{(a^2-x^2)}=v$ (4), et il aura $vdy=adx$ (5), et rursus ipsam aeq. 5 differentiando $vddy+dvdy=addx$ (6). Et si nous faisons que les arcs y croissent uniformement, c'est-à-dire si dy est constante ou $ddy=o$ (7), au lieu de (6) il y aura $dvdy=addx$ (8). Differentiando aequ. (4) il y aura $dv=-\frac{xdx}{v}$ (9), car $v^2=a^2-x^2$, donc $vdv=-xdx$. Et (par 5 et 9) $dv=-\frac{xdy}{a}$, donc par 8 et 10 il y aura $-xdydy=a^2ddx$ (11). Ce qui fait voir que les arc de cercle croissant uniformement, les sinus de complement décroissent de telle sorte qu'ils sont proportionels à leur propres differences secondes, au lieu que lorsque les logarithmes croissent uniformement, les nombres sont proportionels à leur propres differences premieres. Soit $x=a+by^2+cy^4+ey^6$ etc. (12), et (posito $ddy=0$ ut dictum) ddx sera $=dydy$ multiplié par $1.2.b+3.4.cy^2+5.6.ey^4$ etc. (13). Et l'equation (11)

ou $xdydy + a^2ddx = 0$ (14) estant interpretée par 12 et 13 il y aura:

$$0 = \begin{cases} +a & + by^2 & + cy^4 & + cy^6 \text{ etc.} \\ +1.2.ba^2 & +3.4.ca^2y^2 & +5.6.ea^2y^4 & +7.8.fa^2y^6 \text{ etc.} \end{cases} (15).$$

Donc detruisant tous les termes, pour faire que cette equation soit identique, il y aura $a + 1.2.ba^2 = 0$, et $b + 3.4.ca^2 = 0$, et $c + 5.6.ea^2 = 0$. C'est-à-dire $b = -\frac{1}{1.2.a}$, et $c = -\frac{b}{3.4.a^2}$ ou bien $c = \frac{1}{1.2.3.4.a^3}$ et $e = \frac{1}{1.2.3.4.5.6.a^5}$, et ainsi de suite, donc par (12) nous aurons $x = \frac{1}{1}a - \frac{1}{1.2\,a}y^2 + \frac{1}{1.2.3.4.a^3}y^4 - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.a^5}y^6 + \text{etc.}$ (16). Ce qui donne la valeur du sinus de complement x par l'arc y et par le rayon a. On trouveroit la même chose par l'equation 3, en ostant l'irrationnelle et faisant $a^2dydy = x^2dydy + a^2ddx$ (17). Il y a encor d'autres abregés que j'explique dans les Actes.

Mais pour vous donner un exemple d'un probleme geometrique, prenons celuy de la chainette, et je vous donneray en meme temps l'analyse dont je me suis servi autres fois pour le resoudre, puisque vous avés temoigné de la desirer aussi. Soit AB x, BC y, AT, retranchée par la tangente, est la distance entre l'axe et le centre de gravité de l'arc AC. Or $C\beta$ ou AB est à $T\beta$ comme dx à dy; donc $T\beta$ sera $x\frac{dy}{dx}$, et AT sera $y - x\frac{dy}{dx}$. L'arc AC soit appellé c, et par la nature du centre de gravité il est manifeste qu' AT sera $\int ydc : c = y - x\,dy : dx$ (1) ou bien $\int ydc = cy - cxdy : dx$ (2); et differentiando $ydc = cdy + ydc - \frac{xdy}{dx}dc - cdy - cxd\frac{dy}{dx}$ (3). Et rejettant ce qui se détruit, il y aura $dc\frac{dy}{dx} + cd\frac{dy}{dx} = 0$ (4). Supposons que les y ou $A\beta$ croissent uniformement, ou que dy soit constante et $ddy = 0$ (5), nous aurons $d\frac{dy}{dx} = -dy\frac{ddx}{dxdx}$ (9), et au lieu de 4 il y aura $dcdx - cddx = 0$ (7), c'est à dire summando $\frac{dx}{c} = \frac{dy}{a}$ (8) (car cette equation 8 estant differentiée rend l'equation 7) ou bien $adx = cdy$ (9) et differentiando $addx = dcdy$ (10). Or generalement en toute courbe $dcdc = dydy + dxdx$ (11) et differentiando $dcddc = dyddy + dxddx$, donc icy (par 5) $dcddc = dxddx$ (12), et (par 1 et 12) $addc = dxdy$ (13) et summando



$adc = xdy + bdy$ (14). Soit $x + b = z$ (15), fiet $dx = dz$ (16) et $adc = zdy$, et (par 11 et 16) $dcdc = dzdz + dydy$ (17). Donc par 14, 15, 17 nous aurons $a^2dzdz + a^2dydy = z^2dydy$ (18), et enfin $y = a^2 \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$ (19), c'est-à-dire il ne faut que chercher la quadrature d'une figure, dont l'ordonnée est $\frac{a^2}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$. On peut faire $b = a$, ou $-a$, ou bien de quelque autre grandeur qu'on voudra, comme il depend aussi de nous d'augmenter ou diminuer y par une droite constante et d'écrire $y + c = a^2 \int \frac{dz}{\sqrt{(z^2 - a^2)}}$ (20).

Pour ce qui est des equations exponentielles, je vous diray, Monsieur, que toutes les fois que le probleme se reduit à des exponentielles traitables, il est resolu en perfection, et il n'y a plus rien à chercher. De sorte que c'est proprement le plus haut point de la geometrie des transcendentes. Pour vous en developper tout le mystere, soit par exemple $\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{v}{a}} = \frac{y}{a}$, ou bien, posant a pour l'unité, soit $x^v = y$; c'est comme si je disois qu'v est à l'unité comme le logarithme de la grandeur y est au logarithme de la grandeur x. Ainsi supposé que la valeur d'v soit donnée par x ou par y, ou par toutes les deux, la ligne se peut construire geometriquement par points aussi bien que la logarithmique meme, et on en peut donner de meme la tangente et les autres proprietés. Et je puis tousjours changer l'equation exponentielle en differentielle, mais non pas vice versa, car, puisque $x^v = y$ (1), donc $v. \log x = \log y$ (2), ou bien $v \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dy}{y}$ (3) et differentiando $v \frac{dx}{x} + dv \int \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}$ (4). Si v estoit egal à x, alors dy seroit à dx, ou bien l'ordonnée seroit à la soustangentielle comme y multipliée par $1 + \log x$ est à l'unité, c'est-à-dire la soustangentielle sera egale à l'unité multipliée par $1 + \log x$. Si nous posons que les x croissent uniformement, il y aura $y^2\, dxdx + axyddy = axdydy$, et cette equation differentio-differentielle se peut reduire à l'exponentielle $x^x = y$, qui en donne la construction. Ainsi bien loin qu'on doive croire que ces exponentielles sont embarassées, il faut juger que de toutes les expressions qui enseignent la construction des lignes transcendentes par des points determinables suivant la Geometrie ordinaire, ce sont les plus simples. Et il faut considerer que les exponentielles n'employent point d'autre grandeur qu'x et y etc. c'est-à-dire que les grandeurs

ordinaires, au lieu que les differentielles employent encor d'extraordinaires, comme dx, ddx etc. ce qui les empeche de servir aux determinations des intersections des courbes ou aux equations locales. Car si j'avois $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{a}$ (1) pour une courbe, scavoir pour la logarithmique, et $x^2 + y^2 = a^2$ (2) pour l'autre, scavoir pour le cercle, qui me donne $xdx + ydy = 0$ (3), ou $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ (4), il ne m'est point permis de me servir des equations 3 ou 4 pour le cas de rencontre des courbes, ny d'oster $\frac{dy}{dx}$ par le moyen des equations 1 et 4, bien que je sçache que les courbes des equations 1 et 2, scavoir la logarithmique et le cercle se rencontrent, excepté le cas où leur rencontre est un attouchement. Car sans cela, quoyque x et y soyent les mesmes dans les deux courbes, dx et dy ne le sont point (mais ddx, ddy ne sont les mesmes de part et d'autre que dans le cas de l'osculation des deux courbes, qui est un attouchement plus parfait). Au lieu que les exponentielles ne contenant qu' x et y, qui sont les mesmes en cas de rencontre, servent absolument à la determination des intersections. Ainsi c'est par elles, ou leur semblables, qu'on acheve la recherche et qu'on peut oster une inconnue. Je trouve ces equations encor utiles dans les nombres. Je tacheray de me faire entendre dans le traité que je projette pour mon nouveau calcul, et vous serés obligé de ce que vous y voudrés contribuer. Nous verrons ce que feront Mr. le M. de l'Hospital et Mrs. Bernoulli.

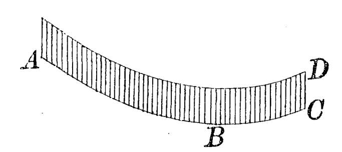
Vostre explication de la pesanteur paroist jusqu'icy la plus plausible. Il seroit seulement à desirer qu'on rendre raison pourquoy celle qui paroist dans les astres est en raison doublée reciproque des distances. Comme je vous disois un jour à Paris qu'on avoit de la peine à connoistre le veritable sujet du mouvement, vous me repondîtes que cela se pouvoit par le moyen du mouvement circulaire, cela m'arresta; et je m'en souvins en lisant à peu pres la même chose dans le livre de Mr. Newton; mais ce fut lorsque je croyois déjà voir que le mouvement circulaire n'a point de privilege en cela. Et je voy que vous estes dans le meme sentiment. Je tiens donc que toutes les hypotheses sont equivalentes et lorsque j'assigne certains mouvemens à certains corps, je n'en ay, ny puis avoir d'autre raison que la simplicité de l'hypothese, croyant qu'on peut tenir la plus simple (tout consideré) pour la veritable. Ainsi n'en ayant point d'autre marque, je crois que la difference entre nous n'est que dans la maniere de parler, que je tache d'accommoder à l'usage commun autant que je puis, salva

veritate. Je ne suis pas meme fort eloigné de la vostre, et dans un petit papier que je communiquay à Mr. Viviani et qui me paroissoit propre à persuader Mrs. de Rome à permettre l'opinion de Copernic, je m'en accommodois. Cependant si vous estes dans ces sentimens sur la realité du mouvement, je m'imagine que vous deviés en avoir sur la nature du corps de differens de ceux qu'on a coustume d'avoir. J'en ay d'assez singuliers et qui me paroissent demonstrés. Je souhaiterois d'apprendre un jour vos reflexions que vous m'aviés fait esperer tant sur mes animadversions in Cartesium, que sur ce que je vous avois écrit contre le vuide et les atomes. Je veux lire avec attention la theorie du manoeuvre et vous remercie cependant des communications de vostre remarque qui paroist de consequence. Il y a dejà du temps que j'ay envoyé à Leipzig mes reflexions sur l'isochrone du Professeur Bernoulli; en y envoyant vostre construction du probleme du Medecin, j'y adjouteray quelque chose de vos considerations sur ce que le Professeur vient de donner.

Mr. Tayler s'est excusé de venir à Wolfenbutel. N'-a-t-on point des nouvelles de la restitution entiere de Mr. Newton? Je la souhaite fort. Quelques uns ayant vû des definitions que j'ay données dans la preface de mon Code diplomatique (dont, pour le dire en passant, je vous feray remettre un exemplaire) m'ont exhorté de mettre en ordre un amas d'autres que j'ay fabriquées autres fois. Voicy celles de la preface que je soûmets à vostre jugement. Je dis que la justice est une charité conforme à la sagesse. La sagesse est la science de la felicité; la charité est une bienveillance generale. La bienveillance est habitus diligendi. Diligere, aimer, cherir (en nostre sens) est se faire un plaisir de la felicité d'autruy.

Vous ne pouvés manquer, Monsieur, d'avoir mille belles meditations encor hors des mathematiques. Il ne faudrait pas nous en priver. Je me souviens qu'un jour vous me fistes esperer quelque chose de cette nature. N'aurons nous pas bientost vostre Dioptrique? J'espere d'y trouver des explications des meteores emphatiques, suivant cet echantillon qu'on a vu de vous autres fois dans le journal des sçavans. Vostre crystal d'Islande ne vous a-t-il donné aucun phenomene singulier sur les couleurs? Il semble qu'il y devroit encor servir; vous aviés aussi fait ce me semble quelques decouvertes sur la force electrique. Que jugés vous, Monsieur, de l'hypothese de Monsieur Halley sur le noyau mobile contenu dans le globe de la terre, pour expliquer la variation de l'aimant? Et sur ce que Mr. Newton croit avoir rendu raison encor du flus et reflus de la mer. Nous attendons aussi l'explication de vostre ligne propre pour les pendules des vaisseaux. Je suis avec zele etc.

P. S. Si je suppose que la voile ne s'etend ou ne s'allonge point, et prends l'effect du vent pour ce qui se feroit si un filet ABC consideré comme sans pesanteur en luy même, estoit chargé partout d'un poids egal, tel que CD, le calcul qui me vient tout presentement me donne une ligne, dont la construction demande une quadrature, qu'il est en mon pouvoir de donner autant qu'il est possible, et qui se reduira (autant que je puis juger par avance) à celle de l'hyperbole. Mais je crois que ce sera autrement que lorsqu'on construit la chainette.



LIX.

Leibniz an Huygens.

A Hanover 8 Septembre 1694.

Je me suis donné l'honneur de vous écrire il y a quelques jours, où j'ay marqué d'avoir satisfait à vos ordres, en envoyant à Leipzig ce que vous aviés destiné aux Acta. J'ay taché aussi de satisfaire aux autres points de vostre lettre.

Maintenant je profite de l'occasion favorable que Mr. de Tschirnhaus me fournit pour vous écrire celle-cy, et je ne me sçaurois dispenser de vous dire que j'ay vu avec admiration les effects de ses verres ardens, surtout sur des objets, qui ont paru indomtables aux fourneaux des chymistes. Mais comme vous en verrés des objets incomparablement plus grands par le moyen des verres, qu'il a déja envoyés en Hollande, je n'en diray point d'avantage.

Il m'a aussi monstré des theoremes de geometrie d'une grande beauté et generalité, et plusieurs autres belles pensées Mais vous en estes meilleur juge que moy, et j'espere qu'en retournant, il me fera part du profit, qu'il aura fait chez vous. Car si j'estois capable de luy porter envie, ce seroit de l'avantage qu'il aura de vous voir. Je suis avec zele etc.

LX.

Leibniz an Huygens.

Hanover $\frac{14}{24}$ Octobre 1694.

Je vous avois écrit dernierement par Mr. de Tschirnhaus qui n'en avoit point besoin. Mais à present je prends la liberté de vous adresser un de mes amis, qui est encor d'un tres grand merite en son genre et qui espere que vostre recommandation luy servira beaucoup, pour mieux insinuer un dessein de negoce, où il s'est engagé avec quelques personnes considerables, et qu'il veut proposer au Roy et à Messieurs les Etats, pour en avoir l'agrement, l'octroy et la protection. Je ne suis pas des plus disposés à la credulité, et il y a peu de nouveaux avis, qui se trouvent practicables. Mais cette affaire paroist si plausible et si convenable au temps et aux intentions de Sa Majesté, que je croy qu'on ne risque rien en luy donnant de l'applaudissement. Il vous en dira tout le detail, qu'il ne veut pourtant pas encor publier avant que d'en avoir jetté les fondemens.

En cas que vous en formiés le même jugement que moy, je ne doute point, Monsieur, que vous ne le favorisiés de recommandations proportionnées, auprès du Roy, par Monsieur vostre frere, et auprès de Messieurs les Etats par Mr. le Pensionaire. Le personnage a acquis une tres grande experience en ces choses par son age avancé, et par la quantité d'affaires de cette nature, qui luy ont passé par les mains, ayant esté employé par plusieurs Princes, qui en ont fait grand cas, mais particulierement Jean Philippe Electeur de Mayence, qui estoit un des plus habiles Princes de son temps, et le defunt Electeur de Brandebourg l'honnoroient d'une confiance extraordinaire et se servoient de ses avis en telles matieres. Il a esté plus d'une fois tant en Hollande qu'en Angleterre, et il a même fait autres fois le voyage de l'Amerique. C'est d'ailleurs une personne extremement reglée et eloignée des vanités, qui rapporte tout à bon usage et affecte l'ancienne simplicité. Il y a de plus de 20 ans que je le connois, tousjours en reputation d'un homme tres sage et laborieux. Ainsi pour luy rendre justice et pour vous en mieux informer, il a fallu que je vous fisse son caractere. Au reste je me rapporte à mes precedentes, estant avec un tres grand zele etc.

P. S. Mr. de Tschirnhaus en repassant par icy m'a confirmé dans l'opinion que j'ay de vos bontés pour moy, et comme je l'avois chargé de vous sonder, si vous souffririés la presente recommadation, ce qu'il m'a dit là dessus, m'a encouragé à vous écrire celle-cy.

LXI.

Huygens an Leibniz.

A la Haye ce 27. Decembre 1694.

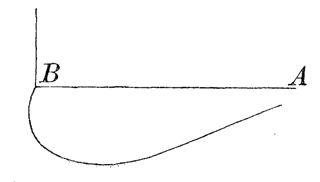
Il y a desia quelque temps que Mr. Craft m'a rendu la lettre dont vous l'aviez voulu charger pour moy; et comme il doit vous ecrire demain, il vient de me prier de pouvoir vous envoier en mesme temps quelque mot de ma part; car pour faire response à celle que vous m'avez fait l'honneur de m'ecrire du $\frac{4}{14}$ Sept., je luy ay dit qu'elle contenoit trop de choses differentes pour que j'y puisse satisfaire presentement.

Ce Mr. Craft, que je connoissois de reputation depuis l'invention du phosphore, est veritablement, comme vous dites, un homme de merite et de bon sens, et qui a appris bien des choses par ses longues experiences en matiere de Physique. J'ay donc pris plaisir à l'entretenir plus d'une fois. Il m'a communiqué le dessein de la nouvelle manufacture, et m'en a apporté un echantillon, par lequel il semble que la chose pourroit avoir un bon succès. Toutefois j'ignore en quoy consiste le secret, et à ce que je vois, c'est en Angleterre qu'il pretend commencer à le mettre en pratique, devant que d'en parler icy à personne. Lorsque j'auray occasion de le servir, je le feray autant qu'il sera dans mon pouvoir.

J'ay esté fort aise de la visite peu attendue de Mr. de Tschirnhaus au mois de Sept. dernier. Mais le malheur voulut, qu'à cause du temps couvert, je ne pus voir l'effet du verre brulant qu'il m'apporta d'environ 14 pouces. C'est un avantage de ces verres de bruler de haut en bas, parce que la matiere qu'on y expose se peut placer sur un charbon qui augmente la force du feu. Mais sans cela je ne scaurois croire que ses verres, quand ils seroient de 2 pieds, comme il dit en avoir, puissent egaler la force du miroir concave de 3 pieds, que nous avions à l'Academie de Paris, qui faisoit degouter les clous de fer en peu de temps. Je me persuade au reste qu'on pourroit esperer de plus grands effets des miroirs concaves de verre, avec de la feuille derriere, comme une personne en fait icy à la Haye, qui sont d'une matiere claire et d'un poli tres beau. Mais il faudroit les faire de 3 ou 4 pieds, ce qui me semble tres possible, au lieu qu'ils ne sont jusqu'icy que d'un pied. Un petit miroir plat adjouté aupres du foier pourroit reflechir les rayons en bas pour bruler sur le charbon. Mr. de Tschirnhaus me dit à la haste quelque chose de ses inventions qu'il

extolloit fort; nous les verrons peut estre expliquées dans le Journal de Leipsich. Ce que vous y avez dernierement mis, Monsieur, touchant la Paracentrique, m'a paru bon, mais j'en suis demeuré aux sommes, où je trouvois quelque difficulté, c'est-à-dire à mon egard, parceque toute vostre methode ne me demeure pas presente à l'esprit quand j'ay discontinué longtemps à m'y exercer. Et c'est pour cela que j'ay souhaité que vous l'eclaircissiez par un traité expres, depuis les fondemens. Il y a mesme bien du temps que je n'ay rien fait en matiere de geometrie, à cause d'une certaine dissertation philosophique que j'espere de mettre au jour dans peu. C'est pourquoy je ne scaurois encore repondre à vostre lettre du $\frac{4}{14}$ Sept., parcequ'il y a du calcul differentiel, qui demande que je l'etudie. J'admire cependant comment par un si etrange chemin vous estes parvenu à la construction de la Catenaria. Vous aurez vu sans doute le dernier livre de Craige, où il y a à la fin une response à Mr. de Tschirnhaus qu'il s'est attirée par sa violente censure. Vostre calcul est beaucoup employé et loué dans ce traité. Mr. Craft m'a dit que vous aviez achevé vostre machine arithmetique, qui doit estre une piece merveilleuse, et dont l'execution sans doute vous aura couté bien de la peine, puisque celle qu'avoit faite Mr. Pascal seulement pour les additions, luy avoit grandement usé et gasté l'esprit à ce que ses amis m'ont dit. On pouvoit la faire incomparablement plus simple et plus commode, ce que je ne crois pas estre de mesme de la vostre. Je vous prie de me mander combien de chifres et par combien elle peut multiplier, et si elle est dans la perfection que vous souhaitez, sans estre sujette à manquer ni à se detraquer.

L'on m'a apporté un Traité manuscrit d'un Mr. de Maroles, mort martir en France sur les galeres, où il y a des Problemes numeriques fort subtils, resolus de la maniere de Diophante. Il avoit grand commerce avec le P. Billy, et on doit me porter de leurs lettres reciproques. On a dessein d'imprimer le tout, Je n'ay jamais voulu m'amuser à ces sortes de questions, et toutefois j'aime à voir l'adresse que souvent ils demandent. Devant que finir, et pour ne laisser pas cette page vuide, je vous diray que dans l'invention de la Paracentrique de Mr. Bernoulli, je trouve que c'est beaucoup d'avoir determiné certaines choses touchant cette courbe, et entre autres le point où elle finit, comme en cette figure vers A, ce qui ne me semble pas qu'on puisse inferer de vostre calcul. Aussi ne scay je pas si sa determination est bien vraie, et si la courbe n'a pas BA pour asymptote.



J'en voudrois bien scavoir vostre sentiment, et finissant icy je demeure en vous souhaitant tout bonheur dans la prochaine année.

LXII.

Leibniz an Huygens.

21 Juin 1695.*)

Plusieurs distractions m'ont empeché de juir de l'avantage que je tire de l'honneur de vostre commerce. J'ay appris de M. Bauval Banage que vous aviés esté malade, mais j'espere que vous vous porterés bien presentement, ce que je souhaitte de tout mon coeur, sçachant combien nous importe vostre conservation, et combien il est important que nous ayons de nostre temps une personne dont le jugement puisse estre suivi seurement sur les matieres les plus profondes, et dont nous attendons encor de si importantes productions, qui sont déja en vostre pouvoir et pourroient estre donnés par parties, si vous vouliés vous humaniser comme vous avés fait dans les appendices de vostre excellent livre de la lumiere et de la pesanteur.

Un exemplaire du grand miroir de Mr. Tschirnhaus est à Amsterdam, de sorte que vous en pourriés voir l'experience quand vous voudriés. Ce que vous dites, Monsieur, des miroirs concaves de verre, que quelcun fait à la Haye, me paroist considerable. Il est difficile cependant pour l'ordinaire d'en faire avec de la feuille derriere. On fait des miroirs convexes de verre à Norenberg, qui ont une certaine composition derriere qui tient lieu de feuille. J'ay oui dire à plusieurs qu'ils ont taché en vain de l'apprendre. Et autres fois Mons. Curtius resident du Roy Charles II à Francfort me dit d'avoir eu ordre de la Societé Royale de s'en informer.

La seconde edition de Medicina Mentis de Mons de Tschirnhaus a paru à Leipzig. Il y corrige ce que Monsieur Facio et moy avions remarqué sur sa premiere façon de donner les tangentes par les foyers, qu'il semble attribuer à une maniere d'errata. Il donne encor d'autres theoremes plus generaux, mais je n'ay point le loisir qu'il faudroit pour mediter là dessus. Il en faut laisser le soin à Mons. le Marquis de l'Hospital, qui a trouvé la regle la plus generale qu'on puisse souhaitter là dessus autant que je m'en souviens.

---

*) Leibniz scheint diesen Brief nicht abgeschickt zu haben; wahrscheinlich erfuhr er inzwischen den Tod von Huygens.

Quant au denombrement des courbes de chaque degré Algebraique, il le donne autrement que dans sa premiere edition, mais je m'etonne qu'il le fait encor d'une maniere, qui me paroist insoutenable, comme si on pouvoit tousjours oster tous les termes d'y excepté un seul. Ainsi dans le 3me degré selon luy, toutes les courbes se peuvent reduire à ces equations $y^3 = x$, $y^3 = xx$, $y^3 = x + xx$, $y^3 = x + x^3$, $y^3 = xx + x^3$, $y^3 = x + xx + x^3$, mettant à part la varieté des coefficientes et des signes. Je m'etonne en effect qu'ayant tant de penetration et de connoissances, il avance si aisement de telles propositions. Mons. le Marquis de l'Hospital me mande, que Mons. de la Hire dans un livre sur les Epicycloides dispute contre la demonstration de la Caustique que M. Tschirnhaus avoit donnée à l'Academie royale des Sciences, et repond au passage de sa Medicina Mentis, où Mons. Tschirnhaus avoit cité vostre approbation, et m'avoit même fait l'honneur de me nommer avec vous. Mons. de la Hire dit que vostre exactitude estant connue, vous ne vous seriés pas fié sans doute à de telles demonstrations. Je remarque que Mons. de Tschirnhaus a retranché ce passage, où il s'estoit rapporté à vostre jugement. Il affecte aussi partout d'eviter l'usage de mon calcul des differences, bien eloigné en cela de vous, Monsieur, qui aviés toutes les raisons de monde de vous tenir entierement à vos propres Methodes qui vous avoient servi à tant d'importantes decouvertes avant que j'avois commencé d'y avoir quelque entrée, et qui n'avés pas laissé de vous abaisser tout grand Maistre de l'art que vous estes, à employer encor une nouvelle Methode d'un de vos disciples, car vous ne devés pas ignorer que je pretends à l'honneur de l'estre, et que j'en ay fait profession publique plus d'une fois. Au bien que je crois que Mr. de Tschirnhaus a profité un peu de mes meditations, et plus qu'il ne pense luy même. Il est vray que je m'imagine qu'il ne s'en est point apperçû, et c'est pour cela que je ne l'accuse point de peu de sincerité. Je ne laisse pas de trouver cette affectation un peu extraordinaire.

Vous aurés vû, Monsieur, les deux livres de Monsieur Bernard Nieuwentiit, Geometre Hollandois, qui m'a les envoyés par un autre Mathematicien du pays qu'il cite dans son livre, nommé M. J. Makreel, qui a écrit sur le livre qu'il me l'envoye jussu autoris. Je m'imagine que ces Messieurs vous seront connus. Pour ce qui est des objections de Monsieur Nieuwentiit, j'y repondray dans les Actes de Leipzig. Premierement il me fait une objection sur un point qui m'est commun avec Messieurs Fermat, Barrow, Newton et tous les autres, qui ont raisonné sur les grandeurs infiniment petites. Car il dit que selon luy deux grandeurs sont egales, quand leur difference est rien, et non pas,

quand elle est seulement infiniment petite. Mais pour employer cependant et justifier nos raisonnemens, il prend un plaisant tour. Il dit que ce qui ne sçauroit devenir une quantité ordinaire, quand on multiplieroit par un nombre infini, doit estre appellé rien, et n'est pas une quantité. Et que pour cela, quoyque dx soit quelque chose, neantmoins le quarré dxdx ou le rectangle dxdy n'est rien, parcequ'un tel rectangle multiplié par un nombre infini ne devient pas une grandeur. Il est aisé de luy repondre que le rectangle doit estre multiplié par un nombre infini du second degré, puisqu'il est infiniment petit du second degré, c'est à dire par un nombre infini multiplié par luy même. C'est cependant sur ce fondement, sçavoir que dxdx ou dxdy n'est rien, qu'il appuye ses pretendues demonstrations du calcul de Mons. Fermat (qu'il attribue à Mr. Barrow) comme si pour cela les termes où il y a dx ou dy restoient, et que les termes, où il y a ou dxdx ou dydy ou dxdy devoient estre rejettés, au lieu qu'on sçait qu'il faut tousjours rejetter les termes qui sont incomparablement moindres que ceux qui restent, et que ceux qui ont dx devoient encore estre rejettès, si les ordinaires n'evanouissoient. Cependant c'est une chose estrange, qu'il veut que le costé, dx, soit une grandeur, et son quarré dxdx ne soit rien. Il croit de même que les differences ulterieures, comme ddx, ne sont rien du tout. Mais comme les x estant en progression geometrique, les x, dx, ddx, d^3x, d^4x etc. le sont aussi, comment peut on dire que les termes x et dx sont quelque chose, et que la 3me proportionelle ddx n'est rien. Je repondray dans les Actes de Leipzig d'une maniere que j'espere luy pouvoir satisfaire et comme ses objections sont proposées d'une maniere fort honneste, j'en useray de même. J'espere de trouver un jour le loisir d'expliquer distinctement mon calcul, pour prevenir certaines beveues semblables à celles que Mons. Nieuwentiit a faites en le voulant employer à dessein de monstrer qu'il est peu seur.

Monsieur Bournet, gentilhomme Ecossois, parent de Mons. l'Eveque de Salisbury, a vû icy ma Machine Arithmetique entierement achevée, et des exemples que j'ay faits en sa presence, qui l'ont surpris; les produits peuvent aller à 12 figures, et le multiplicandus est de 8 figures. J'en fais faire encor d'autres exemplaires maintenant pendant que j'ay l'ouvrier à la main.

Je souhaitte fort de voir vostre traité philosophique, qu'on dit regarder des considerations particulieres sur la constitution des autres planetes ou mondes. Vous ne pouvés gueres entreprendre de sujet plus beau et plus digne de vous. Monsieur Mariotte me disoit que vous devriés estre un jour un des habitants de Saturne, puisqu'il vous a l'obligation de nous estre devenu mieux connu. Et s'il aime la

gloire, il y doit estre sensible. Je ne desapprouverois pas ce changement de domicile, pourveu que vous le fassiés bien tard. Serus in coelum redeas diuque Laetus intersis populo petenti. Il sera bon que les meditations numeriques de feu M. de Marolles paroissent. Mais je souhaitte sur tout que vous nous fassiés part des vostres de temps en temps sur toutes sortes de matieres. Je seray bien aise d'apprendre vostre jugement de mon Code diplomatique; il est vray qu'il n'y a rien de moy que la preface.

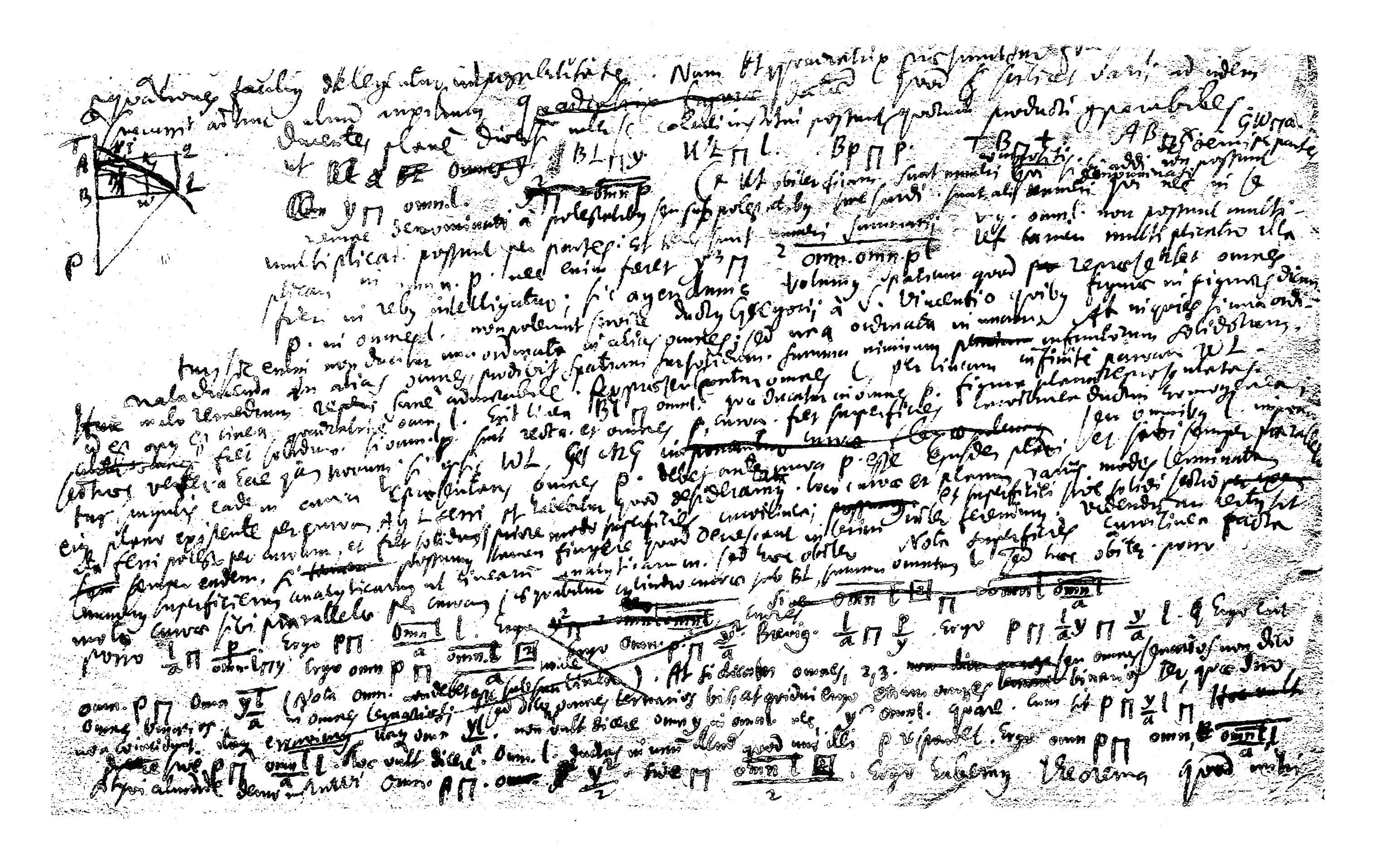
Nachtrag.

In Band VII der neuen Ausgabe von Huygens' Werken, der die Correspondenzen von 1670—1675 enthält, setzt der Herausgeber die beiden ersten Schreiben in der Correspondenz zwischen Leibniz und Huygens in das Jahr 1675; er stützt sich darauf, daß die Inhaltsangabe des zweiten Briefes, der von Huygens geschrieben und „30. Sept." datirt ist, sich findet „dans le livre 5 des Adversaria (von Huygens)". Zugleich wird bemerkt, daß der Ort, an dem das Manuscript gefunden wird, das Jahr 1675 bestätigt (confirme). Da diese Inhaltsangabe die Antwort von Huygens auf das erste Schreiben von Leibniz enthält, so sei auch dieses Schreiben in das Jahr 1675 zu versetzen. Darauf kann folgendes entgegnet werden: Leibniz schreibt in dem unterdrückten Postscriptum seines Briefes an Jacob Bernoulli, datirt Berolini April. 1703, in welchem er einen geschichtlichen Abriß seiner mathematischen Studien giebt: Algebram Lanzii cujusdam puerilem, deinde Clavii puer consuleram. Die Algebra des Clavius geht nicht über die Behandlung der quadratischen Gleichungen hinaus. Es läßt sich nun mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit annehmen, daß Leibniz, als er als Autodidact in Paris im Jahre 1673 seine mathematischen Studien wieder begann, beschloß zunächst in der Algebra sich zu vervollkommnen; er griff zur Algebra Bombelli's um die Behandlung der cubischen Gleichungen kennen zu lernen. Demnach dürften die beiden ersten Schreiben von Leibniz und Huygens in das Jahr 1673 zu setzen sein.

Druck von Max Schmersow vorm. Zahn & Baendel, Kirchhain N.-L.



Zu Seite 153.



[illegible] ad [illegible] et [illegible] calculi [illegible], nempe quod [illegible]

$\overline{\text{Omn. } \overline{l}^{2}}\ \frac{}{2}$ ⊓ omn. $\overline{\overline{\text{omn. } l}\ \frac{l}{a}}$ [illegible] in ultimam [illegible] summarum omnium [illegible] [illegible] ipsorum l, seu omnes l. [illegible] ponendo

[illegible] minime obvium theorema. Tale est etiam Theorema: omn. $\overline{xl}$ ⊓ x omn. l − omn. omn. l. [illegible]

l. esse terminum [illegible] progressionis, et x esse numerum qui exprimit locum seu ordinem ipsius l. ei respondentis, seu x esse numerum ordinalem, l. rem ordinatam. Nota in his calculis observari

posse legem homogeneorum. Nam si omn. praefigatur numero seu rationi, vel infinite parvo, fit linea, si lineae fit superficies, si superficiei fit corpus, et ita in infinitum [illegible] ad dimensiones.

Utile erit scribi ∫. pro omn. ut ∫l pro omn. l. id est summa ipsorum l.

Itaque fiet $\frac{\overline{\int l}^{2}}{2}$ ⊓ $\int \overline{\int l}\ \frac{l}{a}$ et $\int \overline{xl}$ ⊓ $x\int \overline{l} - \int \overline{\int l}$. Et ita apparebit semper

observari legem homogeneorum, quod utile est, ut calculi errores vitentur. Nota si analytice detur l dabitur etiam l. Ergo si detur ∫l dabitur etiam l. [illegible] $\int x$ ⊓ $\frac{x^{2}}{2}$. Nota omnia haec

theoremata vera de seriebus in quibus differentiae terminorum ad terminos [illegible] quavis assignabili. $\int x^{2}$ ⊓ $\frac{x^{3}}{3}$.

[illegible] Nota enim si termini summandi affecti sint, quemodo [illegible] [illegible] regulam generalem talem:

e.g. $\int \frac{a}{b} l$ ⊓ $\frac{a}{b} \int l$. scilicet si a [illegible] terminus constans [illegible] est in maximum ordinalem [illegible]

[illegible] ad [illegible] reducuntur

[illegible] terminus [illegible] Nota [illegible] in aequatione [illegible] ad [illegible]

[illegible] ad [illegible] communem [illegible] [illegible] fundamenta [illegible] theorema:

[illegible] l. [illegible] esse terminus constans, et ipsa [illegible] [illegible] possunt solvi, et

$\frac{\overline{\int l}^{2}}{2}$ ⊓ [illegible] $\int \overline{\int l}$ [illegible] idest $\frac{x^{2}}{2}$ ⊓ $\int x$

$\int l$ [illegible] $\overline{\int l}^{2} + ba^{2} + \frac{\int l^{3}}{3}$ + [illegible] $\int l^{3}$ ⊓ [illegible] a^{3} quaeritur qualis sit [illegible] e [illegible] $\frac{cx^{3}}{3} + ba^{2}x + \frac{x^{4}}{4} + xa^{3}$

1 2 3 4 [illegible] 1 2 3 4

[illegible] $\int l^{3}$ ⊓ x [illegible] $\frac{\int l}{a}$ ⊓ x

$\int$ [illegible] $\int c\overline{\int l}^{2}$ ⊓ $c\frac{x^{3}}{3}$, idest ⊓ $\frac{\int l^{3}}{3a^{3}}$ [illegible] $\int ba^{2}$ ⊓ [illegible] $\int l\,ba$ [illegible] a esse unitatem

Satis haec nova et notabilia, cum novum genus calculi inducant. [illegible] l. ex relatione ad x. quaerenda

[illegible] Quod fiet ex contrario calculo, scilicet si sit $\int l$ ⊓ ya. ponemus l ⊓ $\frac{ya}{d}$. Nempe ut ∫ augebit, ita d minuet dimensiones.

∫ autem significat summam, d. differentiam. [illegible] inveniatur $\frac{ya}{d}$, sive l. sive differentia

[illegible] y. [illegible] [illegible] $\int c \overline{\int l}^{2}$ ⊓ $\frac{c\int l^{3}}{3a^{3}}$, facere possumus:

$c\int l$ ⊓ $\frac{c\int l^{3}}{3a^{3}d}$. Nota [illegible] $\int \frac{x^{3}}{b} + \int \frac{x^{2}}{e}$ ⊓ $\int \overline{\frac{x^{3}}{b} + \frac{x^{2}a}{e}}$ [illegible] modo [illegible] $\frac{x^{3}}{db} + \frac{x^{2}a}{de}$ ⊓ [illegible] $\frac{x^{3}}{b} + \frac{x^{2}}{e}$

Druck von Max Schmersow vorm. Zahn & Baendel, Kirchhain N.-L.